## 5.7 Erros e propagação de erros*

Qualquer medida obtida experimentalmente está sujeita a erro (diferença entre o valor medido e o valor "verdadeiro") que é impossível eliminar totalmente.

**1) Classificação dos erros**

**(a) Erros sistemáticos**: são erros independentes das leis do acaso e produzidos sempre no mesmo sentido.

**(b) Erros acidentais** ou fortuitos: estes erros são devidos a variações, ao acaso, de causas não conhecidas exactamente (em geral, "irregulares" e "pequenas") e podem ocorrer em qualquer sentido.

**Nota:** os dois tipos de erros podem ocorrer simultaneamente.

---

* Só para Probabilidades, Erros e Estatística





Embora possam ser estabelecidos majorantes para certos erros e calculado o erro máximo por acumulação dos erros parciais tal não deve ser feito, por conduzir a valores demasiado pessimistas. O procedimento mais correcto para avaliar este tipo de erros consiste na utilização de métodos estatísticos.

**Admite-se que o erro acidental, associado a uma certa medição, é uma variável aleatória com determinada distribuição de probabilidades**, sendo depois possível, através da observação de vários resultados experimentais, estimar os parâmetros dessa distribuição.

A prática mostra (e uma justificação teórica é fornecida pelo Teorema do Limite Central) que **os erros acidentais seguem geralmente distribuições normais**.





**2) Precisão e exactidão**

Considere-se um conjunto de medidas independentes, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, de uma mesma quantidade, efectuadas em condições idênticas (utilizando o mesmo método, nas mesmas circunstâncias).

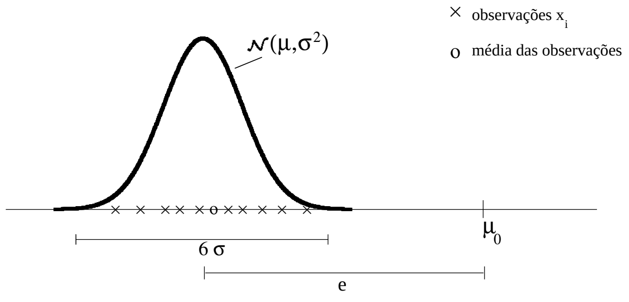
A **precisão** do método de medida está relacionada com a concordância entre os vários valores experimentais obtidos: quanto mais próximos entre si estiverem (quanto menor for a sua dispersão) maior será a precisão do método. Para medir a precisão usa-se então um parâmetro de dispersão, geralmente o desvio padrão, $\sigma$, estimado por

$$s = \left[ \frac{\sum_{i=1}^{n} \left( x_i - \bar{x} \right)^2}{n-1} \right]^{1/2}, \text{ com } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$





A **exactidão** do método traduz a concordância entre o valor médio dos valores experimentais ($\mu$), estimado, em geral, pela média aritmética, $\bar{x}$, e o valor exacto ou verdadeiro, $\mu_0$. A exactidão está, portanto, relacionada com a existência, ou não, de erro sistemático. A $e = \mu_0 - \bar{x}$ chama-se erro simples e ao seu módulo erro absoluto.



Nos Capítulos 7 e 8 aprenderemos:

- a avaliar e controlar a precisão (intervalos de confiança para $\mu$ e $\sigma$ a partir de $\bar{x}$ e $s$; determinação do número de observações que conduzem a um intervalo de confiança com dado comprimento);
- a comparar dois métodos tendo em conta as suas precisões (comparação de duas médias);
- a comparar as precisões de dois métodos (comparação de duas variâncias)[1];
- e a avaliar a exactidão de um método (comparação da média dos valores experimentais com um valor padrão, tido como verdadeiro).

[1] Apenas como curiosidade, não faz parte do programa.





**3) Propagação dos erros acidentais**

Considere-se uma grandeza, $A$, função de duas variáveis (grandezas) $X$ e $Y$, ambas sujeitas a erros acidentais:

$$A = f(X,Y)$$

e $\quad E(X) = \mu_X,\ E(Y) = \mu_Y,\ V(X) = \sigma_X^2,\ V(Y) = \sigma_Y^2$

(estes valores ou são conhecidos ou podem ser estimados)

A grandeza $A$ terá uma distribuição de probabilidades que é, em geral, de difícil determinação.

O que vamos fazer é encontrar uma expressão aproximada para os parâmetros $\mu_A$ e $\sigma_A$, da distribuição de probabilidades de $A$.





Aproximação da função $f$ dada pela fórmula de Taylor, com termos até à segunda ordem, em torno do ponto $(\mu_X,\mu_Y)$:

$$\begin{aligned} A = f(X,Y) \approx\ & f(\mu_X,\mu_Y) + \\ & + (X-\mu_X)\left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{(\mu_X,\mu_Y)} + (Y-\mu_Y)\left.\frac{\partial f}{\partial Y}\right|_{(\mu_X,\mu_Y)} + \\ & + \frac{(X-\mu_X)^2}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}\right|_{(\mu_X,\mu_Y)} + \frac{(Y-\mu_Y)^2}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial Y^2}\right|_{(\mu_X,\mu_Y)} + \\ & + (X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\left.\frac{\partial^2 f}{\partial X \partial Y}\right|_{(\mu_X,\mu_Y)} \end{aligned}$$

Tomando valores esperados em ambos os membros obtém-se

$$\begin{aligned} \mu_A = E(A) \approx\ & f(\mu_X,\mu_Y) + \frac{\sigma_X^2}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}\right|_{(\mu_X,\mu_Y)} + \\ & + \frac{\sigma_Y^2}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial Y^2}\right|_{(\mu_X,\mu_Y)} + \operatorname{Cov}(X,Y)\left.\frac{\partial^2 f}{\partial X \partial Y}\right|_{(\mu_X,\mu_Y)} \end{aligned}$$





**Notas:**

**1)** Se as variáveis $X$ e $Y$ forem independentes (ou apenas não correlacionadas) a última parcela desaparece pois $\operatorname{Cov}(X,Y) = 0$.

**2)** Pode obter-se uma aproximação mais grosseira tomando apenas os termos de primeira ordem $\mu_A \approx f(\mu_X,\mu_Y)$

Para obtenção da expressão aproximada da variância de $A$ usam-se apenas os termos de 1ª ordem:

$$\begin{aligned} \sigma_A^2 = V(A) \approx\ & \sigma_X^2\left(\left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{(\mu_X,\mu_Y)}\right)^2 + \sigma_Y^2\left(\left.\frac{\partial f}{\partial Y}\right|_{(\mu_X,\mu_Y)}\right)^2 + \\ & + 2\operatorname{Cov}(X,Y)\left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{(\mu_X,\mu_Y)} \cdot \left.\frac{\partial f}{\partial Y}\right|_{(\mu_X,\mu_Y)} \end{aligned}$$

As expressões obtidas podem generalizar-se para $A$ função de várias variáveis

$$A = f\left(X_1, X_2, \ldots, X_p\right).$$

Com $E\left(X_i\right) = \mu_i$, $V\left(X_i\right) = \sigma_i^2$ $\left(i = 1, \ldots, p\right)$ e $\mathrm{Cov}\left(X_i, X_j\right) = \sigma_{ij}$ $\left(i, j = 1, \ldots, p; i \neq j\right)$, obtém-se então

$$\mu_A \approx f\left(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p\right)$$

e

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma_A^2 \approx & \sum_{i=1}^{p} \sigma_i^2 \left( \left.\frac{\partial f}{\partial X_i}\right|_{\left(\mu_1, \ldots, \mu_p\right)} \right)^2 + \\ & + 2\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{i-1} \sigma_{ij} \left( \left.\frac{\partial f}{\partial X_i}\right|_{\left(\mu_1, \ldots, \mu_p\right)} \cdot \left.\frac{\partial f}{\partial X_j}\right|_{\left(\mu_1, \ldots, \mu_p\right)} \right)\end{aligned}}$$

(a última parcela desaparece se as variáveis $X_1, X_2, \ldots, X_p$ forem não correlacionadas duas a duas ou se forem independentes duas a duas).





**Nota:** Se a função $f$ for linear então as expressões anteriores são exactas e coincidem com as obtidas na secção 5.4 (combinações lineares de variáveis aleatórias).

**Exemplo 1:** Seja $A = f(X, Y) = X/Y$,

$$E(X) = \mu_X \quad E(Y) = \mu_Y \neq 0 \quad V(X) = \sigma_X^2$$

$$V(Y) = \sigma_Y^2 \quad \mathrm{Cov}(X, Y) = \sigma_{X,Y}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{(\mu_X, \mu_Y)} = \left.\frac{1}{Y}\right|_{(\mu_X, \mu_Y)} = \frac{1}{\mu_Y} \qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}\right|_{(\mu_X, \mu_Y)} = 0$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial Y}\right|_{(\mu_X, \mu_Y)} = -\left.\frac{X}{Y^2}\right|_{(\mu_X, \mu_Y)} = -\frac{\mu_X}{\mu_Y^2}$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial Y^2}\right|_{(\mu_X, \mu_Y)} = \left.\frac{2X}{Y^3}\right|_{(\mu_X, \mu_Y)} = \frac{2\mu_X}{\mu_Y^3}$$





$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial X \partial Y}\right|_{(\mu_X, \mu_Y)} = -\left.\frac{1}{Y^2}\right|_{(\mu_X, \mu_Y)} = -\frac{1}{\mu_Y^2}$$

donde

$$\boxed{\mu_A \approx E\left(\frac{X}{Y}\right) \approx \frac{\mu_X}{\mu_Y} + \frac{\sigma_Y^2 \mu_X}{\mu_Y^3} - \frac{\sigma_{X,Y}}{\mu_Y^2}}$$

e

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma_A^2 \approx V\left(\frac{X}{Y}\right) \approx \frac{\sigma_X^2}{\mu_Y^2} + \sigma_Y^2 \left(-\frac{\mu_X}{\mu_Y^2}\right)^2 - 2\,\frac{\sigma_{X,Y} \cdot \mu_X}{\mu_Y^3} = \\ = \left(\frac{\mu_X}{\mu_Y}\right)^2 \left(\frac{\sigma_X^2}{\mu_X^2} + \frac{\sigma_Y^2}{\mu_Y^2} - 2\,\frac{\sigma_{X,Y}}{\mu_X \mu_Y}\right) \quad (\text{se } \mu_X \neq 0)\end{aligned}}$$





**Exemplo 2:** Na determinação da concentração de uma certa solução por titulação usa-se a expressão

$$C' = \frac{K \cdot \overline{V}}{V}$$

$K = 0.4271$ é uma constante não aleatória

$\overline{V}$ e $V$ são variáveis aleatórias independentes com

$\mu_{\overline{V}} = 12.4$, $\mu_V = 10.0$, $\sigma_{\overline{V}} = 0.12$ e $\sigma_V = 0.04$

(Numa situação real estes valores serão estimativas calculadas a partir dos valores experimentais.)

Aplicando as expressões deduzidas no Ex. 1:

$$\mu_{C'} \approx 0.4271\left(\frac{12.4}{10} + \frac{0.04^2 \times 12.4}{10^3}\right) \approx$$

$$\approx 0.4271 \times \frac{12.4}{10} = 0.5296$$

$$\sigma^2_{C'} \approx 0.4271^2 \left(\frac{12.4}{10}\right)^2 \left(\frac{0.12^2}{12.4^2} + \frac{0.04^2}{10^2}\right) =$$

$$= 3.0755 \times 10^{-5}$$

$$\sigma_{C'} \approx 5.5 \times 10^{-3}$$

**Exemplo 3:** (Problema de calibração) Sabe-se que entre as variáveis $X$ e $Y$ existe a relação $Y = B_0 + B_1 X$, onde $B_0$ e $B_1$ também são variáveis aleatórias. Quando se quer determinar $X$ a partir de $Y$ usa-se

$$X = \frac{Y - B_0}{B_1}.$$

Admitindo que:

- $E(B_0) = \beta_0$, $E(B_1) = \beta_1$, $V(B_0) = \sigma_0^2$, $V(B_1) = \sigma_1^2$, $\mathrm{Cov}(B_0, B_1) = \sigma_{01}$,
- $Y$ é independente de $B_0$ e $B_1$,
- $E(Y - B_0) = \beta_1 E(X)$, $V(Y) = \sigma^2$





e aplicando a expressão para a variância (do Ex. 1)

$$\sigma_X^2 \approx \left[\frac{E(Y - B_0)}{E(B_1)}\right]^2 \left[\frac{V(Y - B_0)}{E(Y - B_0)^2} + \frac{V(B_1)}{E(B_1)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{2\mathrm{Cov}(Y - B_0, B_1)}{E(Y - B_0)E(B_1)}\right] =$$

$$= \left[\frac{\beta_1 E(X)}{\beta_1}\right]^2 \left[\frac{\sigma^2 + \sigma_0^2}{\beta_1^2 E(X)^2} + \frac{\sigma_1^2}{\beta_1^2} + \frac{2\sigma_{01}}{\beta_1^2 E(X)}\right] =$$

$$= \frac{1}{\beta_1^2}\left[\sigma^2 + \sigma_0^2 + \sigma_1^2 E(X)^2 + 2\sigma_{01} E(X)\right]$$