Capítulo 9 - Introdução à regressão linear simples

9.1 Modelos de regressão

São modelos utilizados para compreender a relação entre uma variável dependente (Y) e uma ou mais variáveis independentes (X ou $X_1, X_2, \ldots$)

Exemplos:

1) Y - pressão atmosférica (variável dependente ou resposta)

x - altitude (variável independente ou explicativa)

Modelo determinístico:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x$$

Modelos de regressão linear simples:

$$E(Y|x) = \beta_0 + \beta_1 x$$

ou

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$$

onde Y - variável aleatória

x - valores fixos (medições sem erro ou com erro desprezável)

ε - variável aleatória tal que $E(\varepsilon) = 0$

2) Y - pressão atmosférica

x_1 - altitude

x_2 - temperatura

Modelo de regressão linear múltipla (não faz parte do programa):

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon$$

O termo linear refere-se a linearidade nos parâmetros (β_0, β_1, etc.), assim, os modelos da mesma forma que os anteriores mas onde em vez de x e y figuram funções destas variáveis também são considerados modelos de regressão linear. Por exemplo

$$\log Y = \beta_0 + \beta_1 \log x + \varepsilon$$

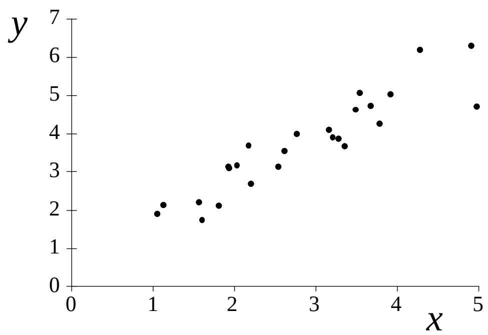
ou

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x^2 + \varepsilon$$

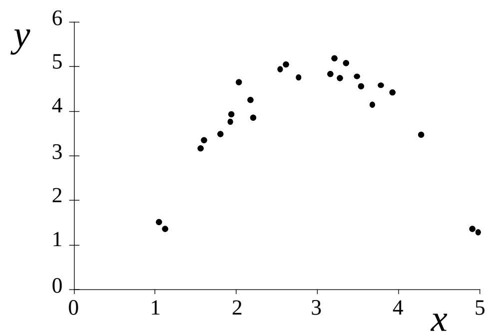
Um problema de regressão linear simples começa pela recolha de uma amostra de pares de pontos

$$(x_i, y_i), \qquad i = 1, \ldots, n$$

O primeiro passo é sempre a representação gráfica destes pontos (podemos verificar aqui se a relação entre x e y parece ser bem modelada por uma recta ou se há necessidade de alguma transformação):



Modelo $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$ parece adequado



Modelo $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$ não parece adequado

Por vezes há considerações de natureza teórica que ajudam a formular o modelo.

Exemplo: Para a maioria dos materiais utilizados em construção e para determinada gama de valores de tensão, assume-se teoricamente um comportamento elástico linear. Significa que se considera válida a relação

$$Extensão = Tensão/E$$

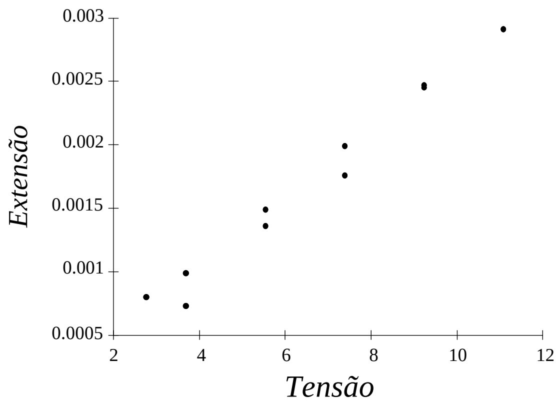
em que E (N/mm^2) é o módulo de elasticidade do material.

Vários provetes de "Perspex", de secção 270.72 mm^2, foram ensaiados à tracção. Aplicou-se a cada uma força e mediu-se a respectiva extensão longitudinal, tendo-se obtido os resultados da tabela seguinte.

Força (em *N*)	*Extensão* $\times 10^5$
750	80
2500	245
2000	176
1500	136
1000	73
1000	99
1500	149
2000	199
2500	247
3000	291

$$Tensão = Força \,/\, Secção$$

Representação gráfica:



O gráfico também indica que um modelo do tipo

$$Extensão = \beta_0 + \beta_1 \times Tensão + \varepsilon$$

parece adequado.

9.2 Regressão linear simples (estimação de parâmetros)

<u>Modelo</u>: $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n$

onde ε_i são v.a. <u>não correlacionadas</u> tais que

$$E(\varepsilon_i) = 0$$

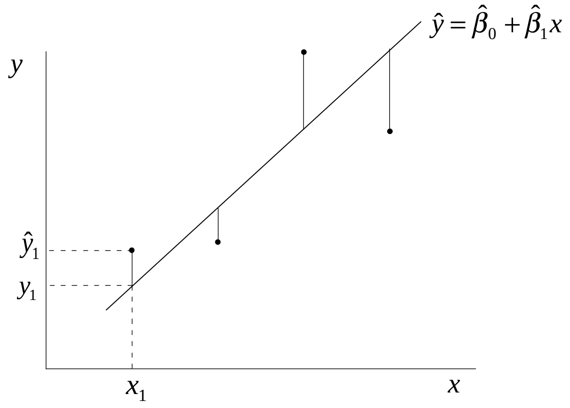
e

$$V(\varepsilon_i) = \sigma^2$$

Como estimar os parâmetros β_0 e β_1?

Método dos mínimos quadrados:

Encontrar os valores $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$ que minimizam a soma dos quadrados dos desvios verticais entre os pontos observados e a recta $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$.



Para cada valor de x_i observado o ponto sobre a recta tem ordenada $\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$

Seja

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{y}_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i\right)^2$$

Pretende-se então determinar $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$ que minimizam Q.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial \beta_0} = -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i\right) = 0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial \beta_1} = -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i\right) x_i = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases}$$

trata-se de um sistema de duas equações lineares a duas incógnitas que tem como solução as **estimativas dos mínimos quadrados:**

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \quad \text{e} \quad \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\,\bar{x}\,\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\,\bar{x}^2}$$

onde $\bar{y} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$ e $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$.

Notas:

1) Pode-se mostrar, pelo determinante da matriz Hessiana, que se existir solução ela corresponde sempre a um mínimo.

2) Existe solução se e só se $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\,\bar{x}^2 \neq 0$, ou seja, se na amostra existirem pelo menos dois valores distintos de x.

3) Às diferenças $e_i = y_i - \hat{y}_i,\ i = 1,\ldots,n$, chamam-se resíduos. A análise dos resíduos permite avaliar se o modelo assumido é adequado (ver secção 9.7).

4) Notações alternativas:

$$S_{XX} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\,\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2$$

$$S_{XY} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\,\bar{x}\,\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)\left(y_i - \bar{y}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_i \left(x_i - \bar{x}\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(y_i - \bar{y}\right)$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{XY}}{S_{XX}}$$

Exemplo (cont.):

Modelo: $Extensão_i = \beta_0 + \beta_1 \times Tensão_i + \varepsilon_i,\quad i = 1,\ldots,10,$

$V\left(\varepsilon_i\right) = \sigma^2 \quad E\left(\varepsilon_i\right) = 0 \quad \mathrm{Cov}\left(\varepsilon_i, \varepsilon_j\right) = 0\ \left(i \neq j\right)$

($x_i \equiv Tensão_i \qquad y_i \equiv Extensão_i$)

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 65.5659 \qquad \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 498.87897$$

$$\sum_{i=1}^{10} y_i = 0.01695 \qquad \sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 0.129747$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{0.129747 - 10 \times \dfrac{65.5659}{10} \times \dfrac{0.01695}{10}}{498.87897 - 10 \times \left(\dfrac{65.5659}{10}\right)^2} =$$

$$= 2.69783 \times 10^{-4}$$

$$\hat{\beta}_0 = \frac{0.01695}{10} - 2.69783 \times 10^{-4} \times \frac{65.5659}{10} =$$

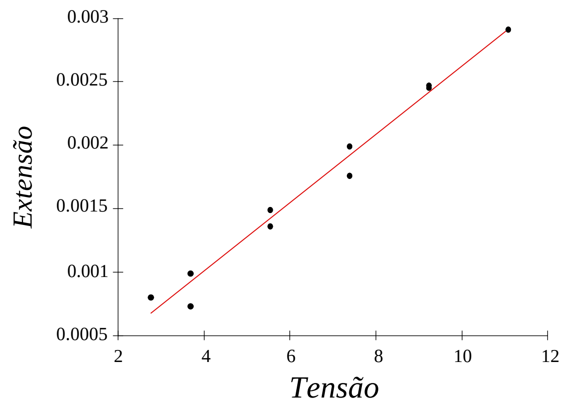
$$= -7.3857 \times 10^{-5}$$

Recta estimada:

$$\widehat{Extensão} = -7.3857 \times 10^{-5} + 2.6978 \times 10^{-4} \times Tensão$$

Nota: nos cálculos efectuados "à mão" devem usar-se, nos passos intermédios, o máximo de algarismos possíveis, para evitar a acumulação de erros de arredondamento. Só na apresentação de resultados é que se fazem arredondamentos.

Representação gráfica dos pontos observados e da recta estimada (ou ajustada):



9.3 Propriedades dos estimadores dos mínimos quadrados e estimação de σ^2

Como se viu para cada x_i, Y_i é uma v.a., da qual dispomos de um valor observado y_i. $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$ podem também ser vistos como variáveis aleatórias (os estimadores). Vamos verificar que são estimadores centrados dos parâmetros β_0 e β_1, e ainda calcular as suas variâncias.

$$E\left(\hat{\beta}_1\right) = E\left(\frac{S_{XY}}{S_{XX}}\right) = \frac{1}{S_{XX}} E\left[\sum_{i=1}^{n} Y_i (x_i - \bar{x})\right] =$$

$$= \frac{1}{S_{XX}} E\left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(\beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i)\right] =$$

$$= \frac{1}{S_{XX}} \left[\beta_0 \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i (x_i - \bar{x}) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) E(\varepsilon_i)\right] = \frac{\beta_1}{S_{XX}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right) = \beta_1$$

$$V\left(\hat{\beta}_1\right) = V\left(\frac{S_{XY}}{S_{XX}}\right) = \frac{1}{S_{XX}^2} V\left[\sum_{i=1}^{n} Y_i (x_i - \bar{x})\right]$$

$$V(\varepsilon_i) = \sigma^2 \Rightarrow V(Y_i) = \sigma^2$$

$$\mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \ (i \neq j) \Rightarrow \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = 0 \ (i \neq j)$$

logo

$$V\left(\hat{\beta}_1\right) = \frac{1}{S_{XX}^2} \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{\sigma^2}{S_{XX}}$$

Do mesmo modo se poderia mostrar que

$$E\left(\hat{\beta}_0\right) = \beta_0 \quad \text{e} \quad V\left(\hat{\beta}_0\right) = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{XX}}\right)$$

e que $\qquad \mathrm{Cov}\left(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1\right) = -\dfrac{\sigma^2 \bar{x}}{S_{XX}}$

(para isso era necessário primeiro mostrar que $\mathrm{Cov}\left(\bar{Y}, \hat{\beta}_1\right) = 0$)

Para estimar as variâncias associadas às estimativas $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$ torna-se necessário estimar σ^2 (variância do erro aleatório), isso é feito usando os resíduos.

Seja
$$SS_E = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{y}_i\right)^2$$

Pode mostrar-se que $E\left(SS_E\right) = (n-2)\sigma^2$

logo
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SS_E}{n-2}$$

é um estimador centrado de σ^2.

Tem-se então que o <u>erro padrão</u> (desvio padrão) <u>estimado</u> de $\hat{\beta}_1$ é

$$se\left(\hat{\beta}_1\right) = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{XX}}}$$

e que o <u>erro padrão estimado</u> de $\hat{\beta}_0$ é

$$se\left(\hat{\beta}_0\right) = \sqrt{\hat{\sigma}^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{XX}}\right)}$$

Nota: outras formas de escrever SS_E:

$$SS_E = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y} + \hat{\beta}_1\bar{x} - \hat{\beta}_1 x_i\right)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\left(y_i - \bar{y}\right) - \hat{\beta}_1\left(x_i - \bar{x}\right)\right]^2 =$$

$$= S_{YY} + \frac{S_{XY}^2}{S_{XX}^2} S_{XX} - 2\frac{S_{XY}}{S_{XX}} S_{XY} = S_{YY} - \frac{S_{XY}}{S_{XX}} S_{XY} =$$

$$= S_{YY} - \hat{\beta}_1 S_{XY} = S_{YY} - \hat{\beta}_1^2 S_{XX}$$

Exemplo (cont.):

$$S_{YY} = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2 =$$
$$= 3.38519\times10^{-5} - 10\times\left(\frac{0.01695}{10}\right)^2 = 5.12165\times10^{-6}$$

$$S_{XX} = 498.8789744 - 10\times\left(\frac{65.565898}{10}\right)^2 =$$
$$= 68.99027$$

$$SS_E = S_{YY} - \hat{\beta}_1^2 S_{XX} = 1.0034\times10^{-7}$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{SS_E}{8}} = 1.1199\times10^{-4}$$

$$se\left(\hat{\beta}_1\right) = \hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{S_{XX}}} = 1.3483\times10^{-5}$$

$$se\left(\hat{\beta}_0\right) = \hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{\bar{x}^2}{S_{XX}}} = 9.5235\times10^{-5}$$

9.4 Alguns abusos do modelo de regressão

- Escolha incorrecta das variáveis explicativas pode levar a conclusões absurdas (uma associação entre duas variáveis não implica necessariamente uma relação de causa-efeito).

- As relações extraídas dos modelos de regressão só são válidas dentro do domínio dos dados originais. **Não se devem fazer extrapolações**.

9.5 Testes de hipóteses em regressão linear simples

Para fazer testes de hipóteses em relação aos parâmetros β_0 e β_1, é necessário admitir que os erros têm distribuição normal (esta <u>hipótese de trabalho</u> deve ser verificada *a posteriori* por análise dos resíduos).

Assim, supondo que $\varepsilon_i \underset{iid}{\sim} N(0;\sigma^2)$ conclui-se imediatamente que

$$Y_i \sim N(\beta_0 + \beta_1 x_i; \sigma^2)$$

e sendo os estimadores $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$ combinações lineares das v.a. Y_i, terão também distribuições normais, ou seja;

$$\hat{\beta}_0 \sim N\left(\beta_0; \sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{XX}}\right)\right)$$

e

$$\hat{\beta}_1 \sim N\left(\beta_1; \frac{\sigma^2}{S_{XX}}\right)$$

Pode ainda mostrar-se que $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$ são independentes de $\hat{\sigma}^2$ e que

$$\frac{(n-2)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{SS_E}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-2}$$

pelo que

$$\frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\sqrt{\hat{\sigma}^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{XX}}\right)}} = \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{se(\hat{\beta}_0)} \sim t_{n-2}$$

e

$$\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{XX}}}} = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{se(\hat{\beta}_1)} \sim t_{n-2}$$

Então, para testar $H_0\colon \beta_1 = \beta_{1,0}$ contra $H_1\colon \beta_1 \neq \beta_{1,0}$ usa-se a estatística

$$T_0 = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_{1,0}}{se(\hat{\beta}_1)} \underset{sob\, H_0}{\sim} t_{n-2}$$

e rejeita-se H_0 ao nível de significância α se

$$|t_0| > a, \quad \text{onde} \quad a\colon P(T_{n-2} > a) = \alpha/2.$$

O procedimento em relação ao parâmetro β_0 é similar.

Um teste de especial importância (por vezes chamado <u>teste à significância da regressão</u>) é o seguinte:

$$H_0\colon \beta_1 = 0 \quad \text{contra} \quad H_1\colon \beta_1 \neq 0$$

Não rejeitar H_0 ("aceitar" H_0) é equivalente a concluir que não há associação linear entre *x* e *y* (ou entre as funções de *x* e *y* em causa), ou seja, não há associação ou a associação não é linear.

Exemplo (cont.):

$$se(\hat{\beta}_1) = \hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{S_{XX}}} = 1.3483 \times 10^{-5}$$

$$se(\hat{\beta}_0) = \hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{\bar{x}^2}{S_{XX}}} = 9.5235 \times 10^{-5}$$

Teste de $H_0\colon \beta_1 = 0$ contra $H_1\colon \beta_1 \neq 0$

$$t_0 = \frac{2.6978 \times 10^{-4} - 0}{1.3483 \times 10^{-5}} = 20.01$$

Para um nível de significância de 5% e $n-2=8$, obtém-se $t_{8,0.975} = 2.306$.

Como 20.01 > 2.306 rejeita-se H_0, ou seja, a regressão é significativa.

Teste de $H_0\colon \beta_0 = 0$ contra $H_1\colon \beta_0 \neq 0$

$$t_0 = \frac{-7.386 \times 10^{-5} - 0}{9.5235 \times 10^{-5}} = -0.776$$

Como - 2.306 < -0.776 < 2.306 não se rejeita H_0, ao nível de significância de 5%, o que está de acordo com o modelo teórico.

9.6 Intervalos de confiança

Podem construir-se intervalos de confiança para β_0 e β_1 usando as distribuições deduzidas na secção anterior:

$$\frac{\hat{\beta}_0-\beta_0}{se\left(\hat{\beta}_0\right)} \sim t_{n-2} \quad \text{e} \quad \frac{\hat{\beta}_1-\beta_1}{se\left(\hat{\beta}_1\right)} \sim t_{n-2}$$

obtendo-se

$$I.C._{100\times(1-\alpha)\%}\left(\beta_0\right)=\left[\hat{\beta}_0-a\times se\left(\hat{\beta}_0\right);\hat{\beta}_0+a\times se\left(\hat{\beta}_0\right)\right]$$

$$I.C._{100\times(1-\alpha)\%}\left(\beta_1\right)=\left[\hat{\beta}_1-a\times se\left(\hat{\beta}_1\right);\hat{\beta}_1+a\times se\left(\hat{\beta}_1\right)\right]$$

onde a: $P\left(T_{n-2}>a\right)=\alpha/2$.

Exemplo (cont.):

$\hat{\beta}_1=2.6978\times10^{-4}$ $\hat{\beta}_0=-7.386\times10^{-5}$

$se\left(\hat{\beta}_1\right)=1.3483\times10^{-5}$ $se\left(\hat{\beta}_0\right)=9.5235\times10^{-5}$

$a=t_{8,0.975}=2.306$

$I.C._{95\%}\left(\beta_1\right)=\left[2.3869\times10^{-4};3.0088\times10^{-4}\right]$

$I.C._{95\%}\left(\beta_0\right)=\left[-2.935\times10^{-4};1.458\times10^{-4}\right]$

****

Por vezes é também necessário construir intervalos de confiança para

$$E\left(Y|x_0\right)=\mu_{Y|x_0}=\beta_0+\beta_1x_0$$

Um estimador centrado de $\mu_{Y|x_0}$ é

$$\hat{\mu}_{Y|x_0}=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1x_0$$

e a sua variância é

$$V\left(\hat{\mu}_{Y|x_0}\right)=V\left(\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1x_0\right)=$$
$$=V\left(\hat{\beta}_0\right)+x_0^2V\left(\hat{\beta}_1\right)+2x_0\mathrm{Cov}\left(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1\right)=$$
$$=\sigma^2\left[\frac{1}{n}+\frac{\left(x_0-\bar{x}\right)^2}{S_{XX}}\right]$$

donde

$$se\left(\hat{\mu}_{Y|x_0}\right)=\sqrt{\hat{\sigma}^2\left[\frac{1}{n}+\frac{\left(x_0-\bar{x}\right)^2}{S_{XX}}\right]}$$

e

$$\frac{\hat{\mu}_{Y|x_0}-\left(\beta_0+\beta_1x_0\right)}{se\left(\hat{\mu}_{Y|x_0}\right)}\sim t_{n-2}$$

Então um I.C. a $100\times(1-\alpha)\%$ para $\mu_{Y|x_0}=\beta_0+\beta_1x_0$ é

$$\left[\hat{\mu}_{Y|x_0}-a\times se\left(\hat{\mu}_{Y|x_0}\right);\hat{\mu}_{Y|x_0}+a\times se\left(\hat{\mu}_{Y|x_0}\right)\right]$$

9.7 Coeficiente de determinação e análise empírica de resíduos

<u>Coeficiente de determinação</u>:

$$R^2=1-\frac{SS_E}{S_{YY}}=1-\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\hat{y}_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\bar{y}\right)^2}$$

$\hat{y}_i=y_i\ ,\ \forall_i \Leftrightarrow R^2=1$

(todos os pontos estão sobre a recta, o modelo de regressão explica toda a variabilidade observada em *y*). Modelo muito bom!

$\hat{\beta}_1=0 \Leftrightarrow \hat{\beta}_0=\bar{y} \Leftrightarrow \hat{y}_i=\bar{y}\ ,\ \forall_i \Leftrightarrow R^2=0$

(o modelo de regressão não explica nada da variabilidade observada em *y*). Modelo muito mau!

$$0\le R^2\le1$$

Pode dizer-se que R^2 representa a percentagem da variabilidade de y que é explicada pela regressão.

Nota:

$$R^2 = 1 - \frac{\left(S_{YY} - \frac{S_{XY}^2}{S_{XX}}\right)}{S_{YY}} = \frac{S_{XY}^2}{S_{XX}S_{YY}} =$$

$$= \left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}} \right]^2$$

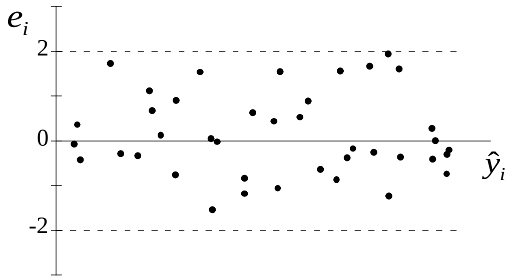
ou seja, o coeficiente de determinação coincide com o quadrado do coeficiente de correlação (empírico) entre x e y.

Exemplo (cont.):

$$R^2 = 1 - \frac{1.0034 \times 10^{-7}}{5.12165 \times 10^{-6}} = 0.9804 = 98.04\%$$

Análise empírica de resíduos:

- Gráfico $e_i = y_i - \hat{y}_i$ versus $\hat{y}_i$. Se as hipóteses de trabalho estiverem correctas deve ter o aspecto de uma mancha de pontos dispersos ao acaso numa faixa horizontal.



- O histograma dos resíduos deve ter um aspecto simétrico de forma semelhante à densidade da distribuição normal. (Se n for grande pode fazer-se um teste do χ^2).

Exemplo (conclusão):

No caso do "Perspex" usa-se geralmente $E = 3500$ (N/mm^2). Será que os resultados da experiência confirmam este valor? Como $\beta_1 = 1/E$, pretende-se testar

$$H_0: \beta_1 = \frac{1}{3500} \quad \text{versus} \quad H_1: \beta_1 \neq \frac{1}{3500}$$

$$\frac{1}{3500} = 2.857 \times 10^{-4}$$

Se fixarmos $\alpha = 5\%$ (nível de significância), basta verificar se o valor em causa pertence ao $I.C._{95\%}(\beta_1)$, já determinado:

$$I.C._{95\%}(\beta_1) = \left[2.3869 \times 10^{-4}; 3.0088 \times 10^{-4}\right],$$

o que de facto acontece, logo não se rejeita H_0 para $\alpha = 5\%$.