8ª Aula Prática

1) Considere a função $f : D \to \mathbb{R}$ definida por:

$$D = \big\{(x, y) : xy > 0\big\}$$
$$f(x, y) = x \log(xy)$$

a) Interprete geometricamente o domínio D e determine o seu interior, exterior e fronteira. Diga se D é aberto, fechado, limitado. (Justifique a resposta.)

b) A função f é contínua no seu domínio? Justifique a resposta.

c) Mostre que para qualquer semi-recta S com origem no ponto $(0, 0)$ e contida em D o limite

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S}} f(x, y)$$

existe e não depende de S.

d) Sendo $E = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = e^{-1/x^2}\big\}$, calcule, se existir, o limite:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in E}} f(x, y)$$

e) Existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$? Justifique a resposta.

2) Seja $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ a função dada por:

$$f(x, y) = 1 + \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Calcule, se existir, o limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.

3) Repita o exercício anterior, com a função

$$f(x, y) = 1 + xy \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \ .$$

4) Calcule (ou mostre que não existe) cada um dos seguintes limites:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{x - 2y}$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,1,1)} \frac{y^2}{x}(z + 1) \operatorname{sen} 3x$

5) Considere a função $f : D \to \mathbb{R}$ definida pela expressão

$$f(x, y) = \log(4 - x^2 - y^2)$$

no domínio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$.

a) Represente geometricamente o conjunto D, e diga se é aberto, fechado ou limitado.

b) Verifique se f é prolongável por continuidade a algum ponto fronteiro a D.