7ª Aula Prática

1) Considere a função $f : D \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{xy-1}} \ ,$$

onde $D = \{(x,y) : xy > 1)$.

a) Interprete geometricamente o domínio.

b) Justifique que f é contínua em D.

c) Existe algum ponto fronteiro a D ao qual f seja prolongável por continuidade?

d) Indique o contradomínio de f.

2) Estude quanto à continuidade a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x^2+y^2 < 2y \\ |x| & \text{se } x^2+y^2 = 2y \\ y^2 & \text{se } x^2+y^2 > 2y \end{cases}$$

3) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Estude a função f quanto à continuidade.

4) Seja (x_i, y_i) uma sucessão em $\mathbb{R}^2$ e seja (a,b) um elemento de $\mathbb{R}^2$. Diz-se que a sucessão (x_i, y_i) converge para (a,b) se (x_i) tende para a e (y_i) tende para b. Prove que são equivalentes:

a)

$$(x_i, y_i) \to (a,b) \ ;$$

b)

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{p\in\mathbb{N}}\ \forall_{i\in\mathbb{N}} \quad \big(i > p \implies \|(x_i,y_i)-(a,b)\| < \epsilon\big) \ .$$

Generalize esta noção de convergência para sucessões de termos em $\mathbb{R}^n$.