4ª Aula Prática

1) Calcule uma primitiva de $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + \cos x}$,

(i) recorrendo à substituição $\operatorname{tg} x = t$;

(ii) recorrendo à substituição $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = t$.

Obs. Verifique o que obteria com as substituições $\cos x = t$ e $\operatorname{sen} x = t$.

2) Calcule uma primitiva de $\dfrac{3 + \cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$, recorrendo à substituição $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = t$. Verifique se alguma das substituições consideradas no exercício anterior seria utilizável.

3) Sendo F a função definida em $\mathbb{R}$ pela seguinte expressão, calcule $F'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

a) $F(x) = \displaystyle\int_x^0 \operatorname{sen}^2 t \, dt$

b) $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \log(1 + t^2) \, dt$

c) $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{e^{x+t}}{t^2 + 1} \, dt$

4) Mostre que existe uma (e uma só) função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifica as seguintes condições:

$$\begin{cases} f''(x) = \dfrac{e^x}{(e^x + 1)^2} & \text{para todo } x \in \mathbb{R} \\ f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

5) Calcule os seguintes integrais:

a) $\displaystyle\int_1^8 \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x \, \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x} \, dx$

c) $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x^4} \, dx$ (Sugestão: substituição $x = 1/t$)

d) $\displaystyle\int_{1/4}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}}$ ($x = \operatorname{sen}^2 t$)

e) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{2x} + 2e^{3x}}{1 - e^x} \, dx$

f) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + \cos x} \, dx$ ($\operatorname{cotg} x = t$)