

4ª Aula Prática

Observações: Esta aula trata fundamentalmente do cálculo de integrais pela regra de Barrow e da manipulação de integrais indefinidos (derivação e continuidade do integral indefinido). A regra de Barrow foi dada na versão geral para funções primitiváveis e integráveis.

É possível que não se consiga fazer tudo. Sugestão: omitir 1 (ii) e, por exemplo, 5 c) e/ou d).

- Ex. 1 e 2: Primitivação por substituição.
- Ex. 3: Problemas que se reduz à derivação de integrais indefinidos.
- Ex. 4: Um problema de primitivação em que as constantes têm de ser levadas em conta.
- Ex. 5: Integração por substituição.

1) Calcule uma primitiva de $\frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$,

(i) recorrendo à substituição $\operatorname{tg} x = t$;

Obs. Fazer notar que se trata de uma substituição conveniente quando a função é par em $\sin x$ e $\cos x$ (isto é, quando a função não se altera quando se troca o sinal de $\sin x$ e de $\cos x$).

(ii) recorrendo à substituição $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$.

Obs. Verifique o que obterá com as substituições $\cos x = t$ e $\sin x = t$.

2) Calcule uma primitiva de $\frac{3 + \cos x}{1 + \sin x}$, recorrendo à substituição $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$. Verifique se alguma das substituições consideradas no exercício anterior seria utilizável.

Obs. Observar que esta substituição funciona sempre (desde que se trate de funções racionais de $\sin x$ e $\cos x$), mas pode não ser a mais simples.

3) Sendo F a função definida em $\mathbb{R}$ pela seguinte expressão, calcule $F'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

a) $F(x) = \int_x^0 \sin^2 t \, dt$

b) $F(x) = \int_x^{x^2} \log(1 + t^2) \, dt$

c) $F(x) = \int_0^x \frac{e^{x+t}}{t^2 + 1} \, dt$

4) Mostre que existe uma (e uma só) função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que verifica as seguintes condições:

$$\begin{cases} f''(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} & \text{para todo } x \in \mathbb{R} \\ f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

5) Calcule os seguintes integrais:

a) $\int_1^8 \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$

b) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x} dx$

c) $\int_{1/2}^1 \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4} dx$ (Sugestão: substituição $x = 1/t$)

d) $\int_{1/4}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$ ($x = \operatorname{sen}^2 t$)

e) $\int_1^2 \frac{e^{2x} + 2e^{3x}}{1 - e^x} dx$

f) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + \cos x} dx$ ($\cotg x = t$)