13ª Aula Prática

1) Sendo f uma função duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e

$$u(x,t) = af(x+ct) + bf(x-ct) \ ,$$

com a, b e c constantes reais e $c \neq 0$, mostre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

para quaisquer x e t.

2) Sabendo que $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em $\mathbb{R}^3$ e que $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é a função definida por $\psi(x,y,z) = \varphi(x-y, y-z, z-x)$, mostre que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad \text{(para qualquer } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.)$$

3) Supondo que $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é a função dada por $f(x,y,z) = x^2y + z\cos x$, calcule a derivada de $f \circ \gamma$, sendo γ a curva paramétrica definida por $\gamma(t) = (t,\, t^2,\, t^3)$.

Solução: $t^3(4 - \operatorname{sen} t) + 3t^2 \cos t$

4) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por:

$$f(x) = 2e^{-x} \operatorname{ch} x - 1 + \frac{1}{2}x$$

a) Verifique se a função f tem extremos locais em $\mathbb{R}^+$.
Solução: O único ponto de estacionaridade é $x = \log 2$, que constitui um ponto de mínimo local da função.

b) Escreva o polinómio de Taylor de segunda ordem da função f relativo ao ponto 1.
Solução: $p_2(x) = (e^{-2} + \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - 2e^{-2})(x-1) + 2e^{-2}(x-1)^2$.

c) Indique um majorante do erro cometido ao aproximar f pelo polinómio obtido na alínea anterior no intervalo $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$.
Sugestão: Use a fórmula de Lagrange para o resto da fórmula de Taylor: $|r_2(x)| = \left| f'''(\xi)\frac{(x-1)^3}{3!} \right|$ com ξ entre 1 e x.

5) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = (x-1)^4 \operatorname{sen} x$$

a) Mostre que 1 é ponto de estacionaridade de f, e recorra à fórmula de Taylor da função f para determinar a sua natureza.

b) Escreva a fórmula de Taylor de ordem zero da função *sen* relativa ao ponto 1, e aproveite para resolver o problema da alínea anterior de maneira alternativa.
Solução: Fórmula de Taylor: $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 1 + r_0(x)$

6) Determine e classifique os pontos de estacionaridade das funções $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidas por

a) $f(x,y) = 3y^2 + \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{8}y^4 - 4x^2$

b) $f(x,y) = (x-y)(x+y-2) + (x-1)^2(y-1)$
Solução: f tem um ponto de sela em $(1,1)$.

c) $f(x,y) = xye^{x-y}$
Solução: f tem um ponto de sela em $(0,0)$ e um mínimo local em $(-1,1)$.

7) Considere agora a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por:

$$g(x,y) = \left(1 + 2x,\, 1 - x - 2y^2\right).$$

Sendo f a função definida na alínea $a)$ do exercício anterior, calcule o polinómio de Taylor de primeiro grau de $f \circ g$ no ponto $(1,-1)$.

Solução: Polinómio de Taylor: $p(x,y) = -\frac{82}{3} - 42(x-1) - 24(y+1)$