12ª Aula Prática

1) Determine as equações das rectas tangente e normal à curva de nível $x+y-\log xy = e$ no ponto $(x, y) = (1, e)$.

2) Determine a equação do plano tangente ao parabolóide $z = 2x^2 + 3y^2$ que seja , simultaneamente, paralelo ao plano $4x - 6y - z = 10$.

3) Seja $(1, -1, 2)$ um ponto que pertence simultaneamente ao parabolóide $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0$ e ao elipsóide $g(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 = 9$. Escreva a equação do plano que passa em $(1, -1, 2)$ e é normal à curva de intersecção das duas superfícies de nível.

Obs. O vector tangente à curva de intersecção de $f(x, y, z) = 0$ e $g(x, y, z) = 0$ é dado pelo produto externo dos dois gradientes, i.e., $\nabla f(1, -1, 2) \times \nabla g(1, -1, 2)$.

Solução: $7x + 6y + 2z = 5$

4) Seja $F : D \to \mathbb{R}^2$ a função definida por

$$F(x, y) = \left(\frac{xy}{1 - x^2 - y^2}, \frac{\sqrt{y^2 - x}}{x} \right),$$

no domínio de existência desta expressão.

a) Represente geometricamente o domínio D.

b) Determine o domínio de diferenciabilidade de F.

c) Calcule $F'_{(1,1)}(1, 2)$.

5) Considere a função $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$g_1(u, v, w) = e^u \cos v \, \cos w$$
$$g_2(u, v, w) = e^u \cos v \, \operatorname{sen} w$$
$$g_3(u, v, w) = e^u \operatorname{sen} v$$

a) Determine o domínio de diferenciabilidade de g e defina a derivada $g'(0, 0, 0)$.

b) Sendo f uma função de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^2$, diferenciável no ponto $(1, 0, 0)$, mostre que $f \circ g$ é diferenciável em $(0, 0, 0)$ e determine $(f \circ g)'(0, 0, 0)$, sabendo que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0, 0) = (1, 2)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0, 0) = (-1, 0)$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(1, 0, 0) = (-1, 3)$$

6) Sejam $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^3$ e $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$\psi(u, v) = \operatorname{arctg}(u^2 + v) \ .$$

Calcule $(\psi \circ \varphi)'(0, 0, 0)$, sabendo que $\varphi(0, 0, 0) = (1, 2)$ e que as coordenadas da derivada de φ no ponto $(0, 0, 0)$ são as funções dadas por:

$$L_1(x, y, z) = 2x + 3y + z$$
$$L_2(x, y, z) = x - y + z$$

7) Considere as aplicações $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x,y) = \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} \qquad\qquad g(t) = e^t$$

a) Estude f e g quanto à continuidade. Verifique que f é prolongável por continuidade ao ponto $(0,0)$.

b) Designando por F o prolongamento por continuidade de f, calcule $\frac{\partial F}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)$.

c) Verifique que F é diferenciável em todo o seu domínio.

d) Sendo $\mathbf{h}$ um vector não nulo de $\mathbb{R}^2$, determine $F'_{\mathbf{h}}(0,0)$.

e) Estude a função $\varphi = g \circ F$ quanto à continuidade e diferenciabilidade.

f) Calcule $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,0)$.

g) Sendo ψ a aplicação de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ definida por

$$\psi(x,y) = \varphi(x,y)\mathbf{e_1} + e^{x^2+y^2}\mathbf{e_2} \quad (\text{com } \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\} = \text{base canónica}),$$

calcule a derivada de ψ no ponto $(0,0)$.

8) Considere a função $g : D \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = \int_{y+2}^{xy^2 - x} \frac{f(t)}{t}\, dt \ ,$$

onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$ e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y+2)(xy^2 - x) > 0\}$.

a) Represente geometricamente o domínio D.

b) Determine o domínio de diferenciabilidade de g e calcule as derivadas parciais de g.

9) Sendo F uma função real com derivada contínua em $\mathbb{R}$ e $z = xy + xF(y/x)$, mostre que

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$$

para todo $x \neq 0$.