10ª Aula Prática

1) Calcule, se existirem, os seguintes limites:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2+y^2-z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{yz}{x^2+y^2+z^2}$

c) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{z(x-y)^2}{(x-y)^4+z^2}$

d) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} z\log xy$

2) Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ uma aplicação dada por :

$$f(x,y) = (\,y\,+\,1)^2 - \frac{3\,x\,(y\,+\,1)}{2}.$$

a) Calcule o limite segundo a recta que passa pelo ponto $(0,\,-1\,)$ com direcção $(1,\,1\,)$ da seguinte função $\frac{f(x,y)}{x^2+(y+1)^2}$.

b) Calcule o limite segundo a recta que passa pelo ponto $(0,\,-1\,)$ com direcção $(1,\,-1\,)$ da função da alínea anterior

c) Estude a função $\frac{f(x,y)}{x^2+(y+1)^2}$ quanto à continuidade.

3) Considere a função $f:D\to\mathbb{R}^2$ definida pela expressão

$$f(x,y) = \left(\log(4-x^2-y^2),\ \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{x+y}\right)$$

a) Represente geometricamente o domínio D, e diga se é aberto, fechado ou limitado.

b) Verifique se f é prolongável por continuidade a algum ponto fronteiro a D.

4) Considere a função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{x\sqrt{3x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}},\ x^2+y^2,\ \frac{\operatorname{sh}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right) & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ (0,0,0) & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Estude a função f quanto à continuidade.

5) Calcule, se existir, o limite $\lim\limits_{t\to0}\mathbf{f}\,(t)$ para as seguintes funções vectoriais:

a) $\mathbf{f}\,(t) \;=\; (1+2t,\, 3-t,\, 2+3t)$

b) $\mathbf{f}\,(t) \;=\; (e^t,\, \log t,\, \operatorname{arctg} t)$

c) $\mathbf{f}\,(t) \;=\; (\frac{t+1}{t-1},\, te^{2t},\, \sec t)$