INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

9ª LISTA DE PROBLEMAS DE ÁLGEBRA LINEAR
LEIC
1º semestre 01/02 - semana de 2001-11-26

1. Encontre subespaços invariantes por T , quando T é a seguinte transformação linear:

   a) A reflexão de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ relativamente ao eixo dos xx e a reflexão relativamente à recta $x = y$;

   b) A reflexão de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ relativamente ao plano-xy e a reflexão relativamente ao plano-yz;

   c) A projecção ortogonal de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ no eixo dos xx e a projecção no eixo dos yy;

   d) A projecção ortogonal de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sobre o plano-xy e a projecção sobre o plano-xz;

   e) A rotação de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ em torno da origem no sentido contrário aos ponteiros do relógio (sentido positivo) por um ângulo de $\pi/2$;

   f) A rotação de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ em torno da origem no sentido positivo por um ângulo de $\pi/2$ relativamente ao semi-eixo positivo dos zz;

   Solução: a) *o eixo dos xx e dos yy são subespaços invariantes pela reflexão relativamente ao eixo dos xx; as rectas* $y = x$ *e* $y = -x$ *são subespaços invariantes pela reflexão relativamente à recta* $x = y$*;*b) *o eixo dos zz e o plano-xy (bem como qualquer recta nesse plano que passe na origem) são subespaços invariantes pela reflexão relativamente plano-xy; o eixo dos xx e o plano-yz (bem como qualquer recta nesse plano que passe na origem) são subespaços invariantes pela reflexão relativamente plano-yz;* c) *o eixo dos xx e dos yy são subespaços invariantes tanto pela projecção ortogonal no eixo dos xx, como dos yy;* e) *e* f) *apenas a origem e o espaço todo são subespaços invariantes por qualquer rotação.*

2. Em relação ao problema anterior, diga nas alíneas a)-d) quais os valores próprios e os vectores próprios das transformações.

   Solução: a) $\lambda_1 = 1$ *associado a* $\mathbf{v}_1 = (1, 0)$ *e* $\lambda_2 = -1$ *associado a* $\mathbf{v}_2 = (0, 1)$ *para a reflexão relativamente ao eixo dos xx;* $\lambda_1 = 1$ *associado a* $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$ *e* $\lambda_2 = -1$ *associado a* $\mathbf{v}_2 = (-1, 1)$ *para a reflexão relativamente à recta* $x = y$*;*b) $\lambda_1 = 1$ *associado a* $\mathbf{v}_{11} = (1, 0, 0)$ *e a* $\mathbf{v}_{12} = (0, 1, 0)$ *e* $\lambda_2 = -1$ *associado a* $\mathbf{v}_2 = (0, 0, 1)$ *para a reflexão relativamente plano-xy;* c) $\lambda_1 = 1$ *associado a* $\mathbf{v}_1 = (1, 0)$ *e* $\lambda_2 = 0$ *associado a* $\mathbf{v}_2 = (0, 1)$ *para a projecção ortogonal no eixo dos xx;* e) *e* f) *não têm valores próprios em* $\mathbb{R}$.

3. Escreva as equações das rectas em $\mathbb{R}^2$ (caso exista alguma) que são invariantes por A, i.e., $A\mathbf{x}$ pertence à mesma recta que $\mathbf{x}$ com A dada por

   $(a)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\qquad (b)\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad (c)\ A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

   Solução: (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\} = L\{(1, 0)\}$*;* (b) *não existe nenhuma recta nessas condições;* (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\} = L\{(1, 2)\}$ *e* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\} = L\{(1, 1)\}$.

4. Considere as seguintes matrizes que representam transformações lineares em $\mathbb{R}^2$ relativamente à base canónica:

$$(a)\ \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \qquad (b)\ \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \qquad (c)\ \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(d)\ \begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (e)\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (f)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para cada uma delas escreva a equação característica, encontre os valores próprios e bases para os espaços próprios correspondentes.

Solução: (a) $p(\lambda) = (3-\lambda)(1+\lambda) = 0$, $\lambda_1 = 3$ *com o espaço próprio* $E(3) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\} = L\{(1,2)\}$ *e* $\lambda_2 = -1$ *com* $E(-1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\} = L\{(0,1)\}$; (b) $p(\lambda) = (4-\lambda)^2 = 0$, $\lambda = 4$ *com o espaço próprio* $E(4) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{2}{3}x\} = L\{(3,2)\}$; (c) $p(\lambda) = \lambda^2 - 12 = 0$, $\lambda_1 = 2\sqrt{3}$ *com o espaço próprio* $E(2\sqrt{3}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{2}{\sqrt{3}}x\} = L\{(\sqrt{3},2)\}$ *e* $\lambda_2 = -2\sqrt{3}$ *com* $E(2\sqrt{3}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -\frac{2}{\sqrt{3}}x\} = L\{(-\sqrt{3},2)\}$; (e) $p(\lambda) = \lambda^2 = 0$, $\lambda = 0$ *com o espaço próprio* $E(0) = L\{(1,0),(0,1)\}$; (f) $p(\lambda) = (1-\lambda)^2 = 0$, $\lambda = 1$ *com o espaço próprio* $E(1) = L\{(1,0),(0,1)\}$.

5. Considere as seguintes matrizes que representam transformações lineares em $\mathbb{R}^3$ relativamente à base canónica:

$$(a)\ \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (b)\ \begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \qquad (c)\ \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para cada uma delas escreva a equação característica, encontre os valores próprios e bases para os espaços próprios correspondentes.

Solução: (a) $p(\lambda) = (1-\lambda)[\lambda^2 - 5\lambda + 6] = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$ *com os espaços próprios* $E(1) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = z = 0\} = L\{(0,1,0)\}$, $E(2) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x = -z,\ y = z\} = L\{(-1,2,2)\}$, $E(3) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = -z,\ y = z\} = L\{(-1,1,1)\}$; (b) $p(\lambda) = (3-\lambda)(2+\lambda)(4+\lambda) = 0$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -4$ *com os espaços próprios* $E(3) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = z = 0\} = L\{(1,0,0)\}$, $E(-2) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = z,\ z = 0\} = L\{(0,1,0)\}$, $E(-4) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 7x = z,\ 2y = z\} = L\{(\frac{1}{7},\frac{1}{2},1)\}$; (c) $p(\lambda) = (1-\lambda)[\lambda^2 - 5\lambda + 7] = 0$, *o único valor próprio real é* $\lambda = 1$ *com o espaço próprio* $E(1) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = z = 0\} = L\{(0,1,0)\}$.

6. Considere as seguintes matrizes que representam transformações lineares em $\mathbb{R}^4$ relativamente à base canónica:

$$(a)\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (b)\ \begin{bmatrix} 10 & -9 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Para cada uma delas escreva a equação característica, encontre os valores próprios e bases para os espaços próprios correspondentes.

Solução: (a) $p(\lambda) = (1-\lambda)^2(2+\lambda)(1+\lambda) = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -1$ *com os espaços próprios* $E(1) = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x = y = z = 0\} = L\{(0,0,0,1)\}$,

$E(-2) = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x = -z,\, y = z = 0\} = L\{(-1,0,1,0)\}$, $E(-1) = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x = -2z,\, y = z,\, w = 0\} = L\{(-2,1,1,0)\}$; (b) $p(\lambda) = (4-\lambda)^2(3+\lambda^2) = 0$, *o único valor próprio real é* $\lambda = 4$ *com o espaço próprio* $E(4) = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : 2x - 3y = 0,\, z = w = 0\} = L\{(3,2,0,0)\}$.

7. Encontre os valores próprios e bases para os espaços próprios de A^{25}, em que A é a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Solução: Os valores próprios são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ *com os espaços próprios* $E(1) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\} = L\{(-1,0,1),(-1,1,0)\}$, $E(-1) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = -z,\, x = 2z\} = L\{(2,-1,1)\}$. *Assim, temos a seguinte base de vectores próprios:* $\{(-1,0,1),(-1,1,0),(2,-1,1)\}$.

8. Calcule $\det A$, sabendo que A é diagonalizável e o polinómio característico de A é dado por:

(*a*) $p(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 5$ (*b*) $p(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 + 7$

Solução: (a) $\det A = -5$;(b) $\det A = -7$

9. Entre as matrizes dadas, determine quais as que são diagonalizáveis. Em caso afirmativo, encontre a matriz S diagonalizante e escreva explicitamente $S^{-1}AS$.

$$(a)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \qquad (b)\ \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad (c)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(d)\ \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (e)\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad (f)\ \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solução: As matrizes diagonalizáveis são as das alíneas a), c) *e* e). *Temos assim:*

$$\text{(a)}\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(c)}\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(e)\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

10. Em relação ao problema anterior, considere nos casos diagonalizáveis que as matrizes representam uma transformação linear relativamente à base canónica. Represente o respectivo diagrama comutativo, relacionando a matriz dada com a matriz diagonal através das matrizes mudança de base. Pinte a vermelho as entradas da diagonal principal da matriz já diagonalizada. Pense no seu significado e discuta-o com o seu colega do lado.