

9^a LISTA DE PROBLEMAS DE ÁLGEBRA LINEAR
LEIC

1^o semestre 01/02 - semana de 2001-11-26

1. Encontre subespaços invariantes por T , quando T é a seguinte transformação linear:

- a) A reflexão de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ relativamente ao eixo dos xx e a reflexão relativamente à recta $x = y$;
- b) A reflexão de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ relativamente ao plano- xy e a reflexão relativamente ao plano- yz ;
- c) A projecção ortogonal de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ no eixo dos xx e a projecção no eixo dos yy ;
- d) A projecção ortogonal de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sobre o plano- xy e a projecção sobre o plano- xz ;
- e) A rotação de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ em torno da origem no sentido contrário aos ponteiros do relógio (sentido positivo) por um ângulo de $\pi/2$;
- f) A rotação de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ em torno da origem no sentido positivo por um ângulo de $\pi/2$ relativamente ao semi-eixo positivo dos zz ;

Solução: a) o eixo dos xx e dos yy são subespaços invariantes pela reflexão relativamente ao eixo dos xx ; as rectas $y = x$ e $y = -x$ são subespaços invariantes pela reflexão relativamente à recta $x = y$; b) o eixo dos zz e o plano- xy (bem como qualquer recta nesse plano que passe na origem) são subespaços invariantes pela reflexão relativamente ao plano- xy ; o eixo dos xx e o plano- yz (bem como qualquer recta nesse plano que passe na origem) são subespaços invariantes pela reflexão relativamente ao plano- yz ; c) o eixo dos xx e dos yy são subespaços invariantes tanto pela projecção ortogonal no eixo dos xx , como dos yy ; e) e f) apenas a origem e o espaço todo são subespaços invariantes por qualquer rotação.

2. Em relação ao problema anterior, diga nas alíneas a)-d) quais os valores próprios e os vectores próprios das transformações.

Solução: a) $\lambda_1 = 1$ associado a $\mathbf{v}_1 = (1, 0)$ e $\lambda_2 = -1$ associado a $\mathbf{v}_2 = (0, 1)$ para a reflexão relativamente ao eixo dos xx ; $\lambda_1 = 1$ associado a $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$ e $\lambda_2 = -1$ associado a $\mathbf{v}_2 = (-1, 1)$ para a reflexão relativamente à recta $x = y$; b) $\lambda_1 = 1$ associado a $\mathbf{v}_{11} = (1, 0, 0)$ e a $\mathbf{v}_{12} = (0, 1, 0)$ e $\lambda_2 = -1$ associado a $\mathbf{v}_2 = (0, 0, 1)$ para a reflexão relativamente ao plano- xy ; c) $\lambda_1 = 1$ associado a $\mathbf{v}_1 = (1, 0)$ e $\lambda_2 = 0$ associado a $\mathbf{v}_2 = (0, 1)$ para a projecção ortogonal no eixo dos xx ; e) e f) não têm valores próprios em $\mathbb{R}$.

3. Escreva as equações das rectas em $\mathbb{R}^2$ (caso exista alguma) que são invariantes por A , i.e., $A\mathbf{x}$ pertence à mesma recta que $\mathbf{x}$ com A dada por

$$(a) A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (b) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (c) A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução: (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\} = L\{(1, 0)\}$; (b) não existe nenhuma recta nessas condições; (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\} = L\{(1, 2)\}$ e $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\} = L\{(1, 1)\}$.

4. Considere as seguintes matrizes que representam transformações lineares em $\mathbf{R}^2$ relativamente à base canónica:

$$(a) \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(d) \begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (e) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (f) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para cada uma delas escreva a equação característica, encontre os valores próprios e bases para os espaços próprios correspondentes.

Solução: (a) $p(\lambda) = (3 - \lambda)(1 + \lambda) = 0$, $\lambda_1 = 3$ com o espaço próprio $E(3) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = 2x\} = L\{(1, 2)\}$ e $\lambda_2 = -1$ com $E(-1) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x = 0\} = L\{(0, 1)\}$; (b) $p(\lambda) = (4 - \lambda)^2 = 0$, $\lambda = 4$ com o espaço próprio $E(4) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = \frac{2}{3}x\} = L\{(3, 2)\}$; (c) $p(\lambda) = \lambda^2 - 12 = 0$, $\lambda_1 = 2\sqrt{3}$ com o espaço próprio $E(2\sqrt{3}) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = \frac{2}{\sqrt{3}}x\} = L\{(\sqrt{3}, 2)\}$ e $\lambda_2 = -2\sqrt{3}$ com $E(-2\sqrt{3}) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = -\frac{2}{\sqrt{3}}x\} = L\{(-\sqrt{3}, 2)\}$; (e) $p(\lambda) = \lambda^2 = 0$, $\lambda = 0$ com o espaço próprio $E(0) = L\{(1, 0), (0, 1)\}$; (f) $p(\lambda) = (1 - \lambda)^2 = 0$, $\lambda = 1$ com o espaço próprio $E(1) = L\{(1, 0), (0, 1)\}$.

5. Considere as seguintes matrizes que representam transformações lineares em $\mathbf{R}^3$ relativamente à base canónica:

$$(a) \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -6 & -2 & 0 \\ 19 & 5 & -4 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para cada uma delas escreva a equação característica, encontre os valores próprios e bases para os espaços próprios correspondentes.

6. Considere as seguintes matrizes que representam transformações lineares em $\mathbf{R}^4$ relativamente à base canónica:

$$(a) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 10 & -9 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Para cada uma delas escreva a equação característica, encontre os valores próprios e bases para os espaços próprios correspondentes.

7. Encontre os valores próprios e bases para os espaços próprios de A^{25} , em que A é a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

8. Calcule $\det A$, sabendo que A é diagonalizável e o polinómio característico de A é dado por:

$$(a) p(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 5$$

$$(b) p(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 + 7$$

9. Entre as matrizes dadas, determine quais as que são diagonalizáveis. Em caso afirmativo, encontre a matriz S diagonalizante e escreva explicitamente $S^{-1}AS$.

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(d) \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (e) \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (f) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

10. Em relação ao problema anterior, considere nos casos diagonalizáveis que as matrizes representam uma transformação linear relativamente à base canónica. Represente o respectivo diagrama comutativo, relacionando a matriz dada com a matriz diagonal através das matrizes mudança de base. Pinte a vermelho as entradas da diagonal principal da matriz já diagonalizada. Pense no seu significado e discuta-o com o seu colega do lado.