INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

8^{a} LISTA DE PROBLEMAS DE ÁLGEBRA LINEAR
LEIC
1^{o} semestre 01/02 - semana de 2001-11-19

1. Diga, justificando, quais das seguintes funções constituem transformações lineares.

   a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 3x_1 - x_2)$
   b) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x_1, x_2) = (1 + x_2, 3x_1 - 1)$
   c) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, x_2 - 4x_3)$
   d) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2x_3, 3x_2^2, x_1 - 4x_3)$
   e) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2x_3, 5x_2^2)$
   f) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_3, x_2 - x_3)$
   g) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 3x_2, x_1 + 5x_2)$

   Resposta: as funções das alíneas a), c), f) *e* g) *constituem transformações lineares.*

2. Sejam os vectores $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ do espaço linear W e $T: W \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por:

$$T(\mathbf{v_1}) = (1, -1, 2),\ T(\mathbf{v_2}) = (0, 3, 2),\ T(\mathbf{v_3}) = (-3, 1, 2)$$

   Encontre $T(2\mathbf{v_1} - 3\mathbf{v_2} + 4\mathbf{v_3})$.

   Solução: $T(2\mathbf{v_1} - 3\mathbf{v_2} + 4\mathbf{v_3}) = (-10, -7, 6)$

3. Seja a base $B = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ de $\mathbb{R}^2$, em que $\mathbf{v_1} = (1, 1)$ e $\mathbf{v_2} = (1, 0)$ e seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que:

   $T(\mathbf{v_1}) = (1, -2)$ e $T(\mathbf{v_2}) = (-4, 1)$

   Encontre a fórmula para $T(x_1, x_2)$ e use-a para calcular $T(5, -3)$.

   Solução: $T(x_1, x_2) = (-4x_1 + 5x_2, x_1 - 3x_2)$*;* $T(5, -3) = (-35, 14)$

4. Seja a base $B = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ de $\mathbb{R}^2$, em que $\mathbf{v_1} = (-2, 1)$ e $\mathbf{v_2} = (1, 3)$ e seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que:

   $T(\mathbf{v_1}) = (-1, 2, 0)$ e $T(\mathbf{v_2}) = (0, -3, 5)$

   Encontre a fórmula para $T(x_1, x_2)$ e use-a para calcular $T(2, -3)$.

   Solução: $T(x_1, x_2) = \frac{1}{7}(3x_1 - x_2, -9x_1 - 4x_2, 5x_1 + 10x_2)$*;* $T(2, -3) = \frac{1}{7}(9, -6, -20)$

5. Seja a base $B = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ de $\mathbb{R}^3$, em que $\mathbf{v_1} = (1, 2, 1,)$, $\mathbf{v_2} = (2, 9, 0)$ e $\mathbf{v_3} = (3, 3, 4)$ e seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que:

   $T(\mathbf{v_1}) = (1, 0)$, $T(\mathbf{v_2}) = (-1, 1)$ e $T(\mathbf{v_3}) = (0, 1)$

   Determine a fórmula para $T(x_1, x_2, x_3)$ e use-a para calcular $T(7, 13, 7)$.

   Solução: $T(x_1, x_2, x_3) = (41x_1 + 9x_2 + 24x_3, 914x_1 - 3x_2 - 8x_3)$*;* $T(7, 13, 7) = (-2, 3)$

6. Considere as seguintes equações. Determine a matriz que representa cada transformação linear relativamente às bases canónicas.

$$(a)\ \begin{cases} y_1 = 2x_1 - 3x_2 + 4x_4 \\ y_2 = 3x_1 + 5x_2 - x_4 \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} y_1 = 7x_1 + 2x_2 - 8x_3 \\ y_2 = - x_2 + 5x_3 \\ y_3 = 4x_1 + 7x_2 - x_3 \end{cases}$$

$$(c)\ \begin{cases} y_1 = -x_1 + 2x_2 \\ y_2 = 3x_1 - 2x_2 \\ y_3 = 5x_1 - 7x_2 \end{cases} \qquad (d)\ \begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_1 + x_2 \\ y_3 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \end{cases}$$

Solução: (a) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 7 & 2 & -8 \\ 0 & -1 & 5 \\ 4 & 7 & -1 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$;
(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

7. Determine a matriz que representa cada transformação linear relativamente às bases canónicas dada pelas fórmulas:

   a) $T(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_1 + x_2)$
   b) $T(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$
   c) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + 5x_2, x_3)$
   d) $T(x_1, x_2, x_3) = (4x_1, 7x_2, -8x_3)$
   e) $T(x_1, x_2) = (x_2, -x_1, x_1 + 3x_2, x_1 - x_2)$
   f) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (7x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4, x_2 + x_3, -x_1)$
   g) $T(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0, 0)$
   h) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4, x_1, x_3, x_2, x_1 - x_3)$

Solução: a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$;
(e) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$; (f) $\begin{bmatrix} 7 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; (g) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; (h) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

8. Determine a matriz que representa cada transformação linear relativamente às bases canónicas e use-a para calcular os seguintes transformados:

   a) A reflexão de $(-1, 2)$ relativamente ao eixo dos xx e a reflexão do mesmo vector relativamente à recta $x = y$;
   b) A reflexão de $(2, -5, 3)$ relativamente ao plano-xy e a reflexão do mesmo vector relativamente ao plano-yz;

c) A projecção ortogonal de $(2,-5)$ no eixo dos xx e a projecção do mesmo vector no eixo dos yy;

d) A projecção ortogonal de $(-2,1,3)$ sobre o plano-xy e a projecção do mesmo vector no plano-xz;

e) A rotação de $(3,-4)$ em torno da origem no sentido contrário aos ponteiros do relógio (sentido positivo) por um ângulo de $\pi/2$ e a rotação do mesmo vector no mesmo sentido por um ângulo de $\pi/6$;

f) A rotação de $(-2,1,2)$ em torno da origem no sentido positivo por um ângulo de $\pi/2$ relativamente ao semi-eixo positivo dos zz;

g) A rotação de $(-2,1,2)$ em torno da origem no sentido positivo por um ângulo de $\pi/4$ relativamente ao semi-eixo positivo dos yy.

Solução: a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$;

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$;

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}$;

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$;

(e) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$; $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\sqrt{3}+4 \\ 3+4\sqrt{3} \end{bmatrix}$;

(f) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

9. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por $T(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, x_1 + x_2)$ e seja a base $B_1 = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ de $\mathbb{R}^2$, em que $\mathbf{v_1} = (1,1)$ e $\mathbf{v_2} = (-1,0)$

   a) Calcule, em relação à base B_1 no espaço de partida e de chegada, a matriz $A = M(T, B_1, B_1)$ que representa T relativamente a esta base.

   b) Determine a matriz que representa T relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^2$, $B = M(T, B_c^{(2)}, B_c^{(2)})$.

   c) Represente o respectivo diagrama comutativo, relacionando B com a matriz A através da matriz mudança de base.

   d) Calcule o transformado por T do vector $\mathbf{v} = (1,-1)$, usando a matriz A da alínea a).

   e) Calcule a imagem por T do mesmo vector $\mathbf{v} = (1,-1)$, usando a matriz B da alínea b).

   f) Represente o respectivo diagrama comutativo.

Solução: a)$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$; b)$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$;

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2_{B_1} \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^2_{B_1} \arrow[d, "\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}"] \\
\mathbb{R}^2_{B_c^{(2)}} \arrow[u, "\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}"] \arrow[r, "B"] & \mathbb{R}^2_{B_c^{(2)}}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \arrow[r, "\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}"] & \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} \arrow[d, "\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}"] \\
\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \arrow[u, "\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}"] \arrow[r, "\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}"] & \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{tikzcd}
$$

10. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por $T(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, -x_1, x_2)$ e sejam as bases $B_1 = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ de $\mathbb{R}^2$ e $B_2 = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$ de $\mathbb{R}^3$, em que

    $\mathbf{v_1} = (1, 3)$, $\mathbf{v_2} = (-2, 4)$ e $\mathbf{u_1} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{u_2} = (2, 2, 0)$, $\mathbf{u_3} = (3, 0, 0)$

    a) Calcule, em relação às base B_1 e B_2 no espaço de partida e de chegada, respectivamente, a matriz $A = M(T, B_1, B_2)$ que representa T relativamente a essas bases.
    b) Determine a matriz que representa T relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ e de $\mathbb{R}^3$, $B = M(T, B_c^{(2)}, B_c^{(3)})$.
    c) Represente o respectivo diagrama comutativo, relacionando B com a matriz A através das matrizes mudança de base.
    d) Calcule o transformado por T do vector $\mathbf{v} = (2, -1)$, usando a matriz A da alínea a).
    e) Calcule a imagem por T do mesmo vector $\mathbf{v} = (2, -1)$, usando a matriz B da alínea b).
    f) Represente o respectivo diagrama comutativo.

Solução: a)$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \\ \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$; b)$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2_{B_1} \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^2_{B_1} \arrow[d, "\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}"] \\
\mathbb{R}^2_{B_c^{(2)}} \arrow[u, "\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}"] \arrow[r, "B"] & \mathbb{R}^2_{B_c^{(2)}}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{7}{10} \end{bmatrix} \arrow[r, "\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \\ \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}"] & \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \arrow[d, "\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}"] \\
\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \arrow[u, "\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}"] \arrow[r, "\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}"] & \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}
\end{tikzcd}
$$

11. Diga, justificando, em que casos se tem $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$:

    a) T_1 é a projecção ortogonal de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ no eixo dos xx e T_2 é a projecção ortogonal de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ no eixo dos yy;

    b) T_1 é a rotação de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ num ângulo θ_1 no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio e T_2 é a rotação de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ num ângulo θ_2 no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio;

    c) T_1 é a reflexão de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ relativamente ao eixo dos xx e T_2 é a reflexão de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ relativamente ao eixo dos yy;

    d) T_1 é a expansão de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ num factor $c \in \mathbb{R}$ e T_2 é a rotação de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ num ângulo θ no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio relativamente ao eixo dos zz ;

    e) T_1 é a rotação de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ num ângulo θ_1 no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio relativamente ao semi-eixo positivo dos xx e T_2 é a rotação de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ num ângulo θ_2 no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio relativamente ao semi-eixo positivo dos zz.

    Resposta: em todos os casos das alíneas a) *a* d)*; apenas falha a comutatividade na alínea* e).

12. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por $T(x_1, x_2) = (4x_1 - 2x_2, 2x_1 - x_2)$.

    a) Determine o núcleo e a imagem da transformação linear.

    b) Indique um vector de $\mathbb{R}^2$ que não esteja na imagem da transformação.

    c) Verifique o teorema da dimensão.

    Solução: a) $N(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x = y\} = L\{(1, 2)\}$ *e* $I(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2y\} = L\{(2, 1)\}$*;*
    b)$(1, 1)$*;* c)$dim I(T) + \text{nul} T = dim\, \mathbb{R}^2$

13. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2 + x_3, 5x_1 - x_2 + 3x_3, 4x_1 + x_2 + 2x_3)$.

a) Determine o núcleo e a imagem da transformação linear.

b) Indique um vector de $\mathbb{R}^3$ que não esteja na imagem da transformação.

c) Verifique o teorema da dimensão.

Solução: a) $N(T) = L\{(-5,2,9)\}$ *e* $I(T) = L\{(1,5,4),(2,1,-1)\}$*;* b)$(0,0,1)$*;* c)$dim I(T) + \text{nul}T = dim\,\mathbb{R}^3$

14. Determine o núcleo e a imagem da transformação linear $T_2 \circ T_1$ e encontre o transformado $(T_2 \circ T_1)(x,y)$.

    a) $T_1(x,y) = (2x, 3y)$, $T_2(x,y) = (x-y, x+y)$.

    b) $T_1(x,y) = (2x, -3y, x+y)$, $T_2(x,y,z) = (x-y, y+z)$.

    c) $T_1(x,y) = (x-y, y+z, x-z)$, $T_2(x,y,z) = (0, x+y+z)$.

    Solução: a) $N(T_2 \circ T_1) = \{(0,0)\}$ *e* $I(T_2 \circ T_1) = \mathbb{R}^2$; $(T_2 \circ T_1)(x,y) = \frac{1}{2}(x+y, x-y)$;b) $N(T_2 \circ T_1) = \{(0,0)\}$ *e* $I(T_2 \circ T_1) = \mathbb{R}^2$; $(T_2 \circ T_1)(x,y) = (2x-3y, x-2y)$;c) $N(T_2 \circ T_1) = L\{(0,1)\}$ *e* $I(T_2 \circ T_1) = L\{(0,1)\}$ $(T_2 \circ T_1)(x,y) = (0, 2x)$

15. Diga, justificando, quais das seguintes transformações lineares são isomorfismos (bijecções):

    a) A projecção ortogonal de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ no eixo dos xx;

    b) A reflexão de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ relativamente à recta $x = y$;

    c) A projecção ortogonal de $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ sobre o plano-xy;

    d) A reflexão de $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ relativamente ao plano-yz;

    e) A rotação de $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ no sentido positivo por um ângulo de $\pi/2$ relativamente ao semi-eixo positivo dos zz.

    Resposta: as transformações lineares das alíneas b), d) *e* e) *são isomorfismos (injectivas e sobrejectivas).*

16. Em relação ao problema anterior, diga

    a) no caso dos isomorfismos: quais as transformações lineares inversas;

    b) nos outros casos: quais os núcleos e as imagens das transformações;

    c) nos casos 15.a) e 15.c): Mostre que se tem $T \circ T = T$.

17. Sejam $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tais que $T_1(x,y) = (x+y, x-y)$ e $T_2(x,y) = (2x+y, x-2y)$.

    a) Mostre que T_1 e T_2 são invertíveis.

    b) Determine $T_1^{-1}(x,y)$, $T_2^{-1}(x,y)$ e $(T_2 \circ T_1)^{-1}(x,y)$.

    c) Verifique que $(T_2 \circ T_1)^{-1} = T_1^{-1} \circ T_2^{-1}$

    Solução: a) $N(T_1) = N(T_2) = \{(0,0)\}$ *e* $I(T_1) = I(T_2) = \mathbb{R}^2$*;* b) $T_1^{-1}(x,y) = -\frac{1}{2}(x-y, x+y)$: $T_2^{-1}(x,y) = \frac{1}{5}(2x+y, x-2y)$: $(T_2 \circ T_1)^{-1}(x,y) = -\frac{1}{10}(3x-y, x+3y)$

18. Sejam $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $T_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma reflexão de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ relativamente ao plano-yz, uma reflexão relativamente ao plano-xz e uma rotação no sentido positivo por um ângulo de $\pi/2$ relativamente ao semi-eixo positivo dos zz, respectivamente.

a) Determine $T_1^{-1}(x, y, z)$, $T_2^{-1}(x, y, z)$ e $T_3^{-1}(x, y, z)$.

b) Determine $(T_3 \circ T_2 \circ T_1)^{-1}(x, y, z)$.

c) Verifique que $(T_3 \circ T_2 \circ T_1)^{-1} = T_1^{-1} \circ T_2^{-1} \circ T_3^{-1}$

Solução: a) $T_1^{-1}(x, y, z) = T_1(x, y, z) = (-x, y, z) \ : \ T_2^{-1}(x, y, z) = T_2(x, y, z) = (x, -y, z) \ : \ T_3^{-1}(x, y, z) = (y, -x, z)$; b) $(T_3 \circ T_2 \circ T_1)^{-1}(x, y, z) = (y, -x, z)$