INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

7ª LISTA DE PROBLEMAS DE ÁLGEBRA LINEAR
LEIC
1º semestre 01/02 - semana de 2001-11-12

1. Diga, justificando, quais dos seguintes conjuntos constituem bases:

   I. de $\mathbb{R}^2$:

   a) $S_1 = \{(2,1),(3,0)\}$
   b) $S_2 = \{(4,1)\}$
   c) $S_3 = \{(0,0),(2,6)\}$
   d) $S_4 = \{(3,9),(-4,-12)\}$
   e) $S_5 = \{(1,0),(0,-1),(-1,1)\}$

   Resposta: apenas o conjunto da alínea (a) constitui uma base de $\mathbb{R}^2$.

   II. de $\mathbb{R}^3$:

   a) $S_1 = \{(1,0,0),(2,2,0),(3,3,3)\}$
   b) $S_2 = \{(2,2,0),(3,3,3)\}$
   c) $S_3 = \{(3,1,-4),(2,5,6),(1,4,8)\}$
   d) $S_4 = \{(3,1,-4),(2,5,6),(1,4,8),(3,3,3)\}$
   e) $S_5 = \{(1,6,4),(2,4,-1),(-1,2,5)\}$

   Resposta: apenas os conjuntos das alíneas (a) e (c) constituem bases de $\mathbb{R}^3$.

   III. de $\mathbb{R}^4$:

   a) $S_1 = \{(1,0,0,0),(2,2,0,0),(3,3,3,0),(4,4,4,4)\}$
   b) $S_2 = \{(1,0,0,0),(2,2,0,0),(3,3,3,0)\}$
   c) $S_3 = \{(3,1,-4,1),(6,5,-3,-1),(1,1,-2,4),(-3,2,9,0)\}$

   Resposta: os conjuntos das alíneas (a) e (c) constituem bases de $\mathbb{R}^4$.

2. Seja W o espaço constituido pela expansão linear dos vectores $\mathbf{u} = (1,0,0,0)$, $\mathbf{v} = (2,2,0,0)$ e $\mathbf{w} = (0,-2,0,0)$.

   (a) Mostre que $S = \{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\}$ não é uma base de W.

   (b) Determine a dimensão e uma base de W.

   Resposta: (a) S não constitui uma base de W porque é L.D. (apesar de gerar W). Temos, p. ex., $\mathbf{w} = 2\mathbf{u} - \mathbf{v}$*; (b)* $\dim W = 2$*, uma base poderá ser o conjunto* $\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}$*, outra será dada por* $\{\mathbf{u},\mathbf{w}\}$.

3. Escreva o vector de coordenadas $(\mathbf{v})_{B_i}$, i.e., determine as coordenadas de $\mathbf{v}$ nas seguintes bases B_i:

   I. de $\mathbb{R}^2$:

   a) $\mathbf{v} = (2,1)$; $B_1 = \{\mathbf{v_1},\mathbf{v_2}\}$, com $\mathbf{v_1} = (1,0)$, $\mathbf{v_2} = (0,1)$,
   b) $\mathbf{v} = (2,1)$; $B_2 = \{\mathbf{v_1},\mathbf{v_2}\}$, com $\mathbf{v_1} = (1,0)$, $\mathbf{v_2} = (2,2)$,

c) $\mathbf{v} = (2,1)$; $B_3 = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$, com $\mathbf{v_1} = (1,0)$, $\mathbf{v_2} = (1,-1)$,

Solução: (a) $(2,1)_{B_1} = (2,1)$; (b) $(2,1)_{B_2} = (1,\frac{1}{2})$; (c) $(2,1)_{B_3} = (3,-1)$

II. de $\mathbb{R}^3$:

a) $\mathbf{v} = (2,-1,3)$; $B_1 = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$, com $\mathbf{v_1} = (1,0,0)$, $\mathbf{v_2} = (0,1,0)$, $\mathbf{v_3} = (0,0,1)$

b) $\mathbf{v} = (2,-1,3)$; $B_2 = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$, com $\mathbf{v_1} = (1,0,0)$, $\mathbf{v_2} = (2,2,0)$, $\mathbf{v_3} = (3,3,3)$

c) $\mathbf{v} = (5,-12,3)$; $B_3 = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$, com $\mathbf{v_1} = (1,2,3)$, $\mathbf{v_2} = (-4,5,6)$, $\mathbf{v_3} = (7,-8,9)$

Solução: (a) $(2,-1,3)_{B_1} = (2,-1,3)$; (b) $(2,-1,3)_{B_2} = (3,-2,1)$; (c) $(5,-12,3)_{B_3} = (-2,0,1)$

III. de $\mathbb{R}^4$:

a) $\mathbf{v} = (1,0,2,-1)$; $B_1 = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}\}$, com $\mathbf{v_1} = (1,0,0,0)$, $\mathbf{v_2} = (0,1,0,0)$, $\mathbf{v_3} = (0,0,1,0)$, $\mathbf{v_4} = (0,0,0,1)$

b) $\mathbf{v} = (1,0,2,-1)$; $B_2 = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}\}$, com $\mathbf{v_1} = (1,0,0,0)$, $\mathbf{v_2} = (1,1,0,0)$, $\mathbf{v_3} = (1,1,1,0)$, $\mathbf{v_4} = (1,1,1,1)$

c) $\mathbf{v} = (0,-1,3,-6)$; $B_3 = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}\}$, com $\mathbf{v_1} = (1,0,-1,0)$, $\mathbf{v_2} = (0,1,0,1)$, $\mathbf{v_3} = (-1,1,0,0)$, $\mathbf{v_4} = (0,0,1,-1)$

Solução: (a) $(1,0,2,-1)_{B_1} = (1,0,2,-1)$; (b) $(1,0,2,-1)_{B_2} = (1,-2,3,-1)$; (c) $(0,-1,3,-6)_{B_3} = (1,-2,1,4)$

4. Determine uma base para os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$.

a) O plano $3x - 2y + 5z = 0$

b) O plano $x - y = 0$

c) A recta $x = 2t$, $y = -t$, $z = 4t$

d) Todos os vectores da forma (a,b,c), em que $b = a + c$

Solução: (a) $\{(2,3,0),(-5,0,3)\}$; (b) $\{(1,1,0),(0,0,1)\}$; (c) $\{(2,-1,4)\}$; (d) $\{(1,1,0),(-1,0,1)\}$

5. Determine uma base para os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$.

a) Todos os vectores da forma $(a,b,c,0)$

b) Todos os vectores da forma (a,b,c,d), em que $d = a + b$ e $c = a - b$

c) Todos os vectores da forma (a,b,c,d), em que $a = b = c = d$

Solução: (a) $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0)\}$; (b) $\{(1,-1,2,0),(1,1,0,2)\}$; (c) $\{(1,1,1,1)\}$

6. Acrescente um vector da base canónica de $\mathbb{R}^3$ ao conjunto $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ de modo a produzir uma base de $\mathbb{R}^3$.

(a) $\mathbf{v_1} = (-1,2,3)$, $\mathbf{v_2} = (1,-2,-2)$. (b) $\mathbf{v_1} = (1,-1,0)$, $\mathbf{v_2} = (3,1,-2)$.

Solução: (a) $(1,0,0)$ *ou* $(0,1,0)$; (b) $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ *ou* $(0,0,1)$

7. Acrescente vectores da base canónica de $\mathbb{R}^4$ ao conjunto $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ de modo a produzir uma base de $\mathbb{R}^4$.

$$\mathbf{v_1} = (1, -4, 2, -3)\,,\ \mathbf{v_2} = (-3, 8, -4, 6)$$

Solução: o vector $(1,0,0,0)$ *não serve, porque é combinação linear de* $\mathbf{v_1}$ *e* $\mathbf{v_2}$*, mas os vectores* $(0,1,0,0)$ *e* $(0,0,0,1)$ *da base canónica de* $\mathbb{R}^4$ *podem ser acrescentados.*

8. Seja $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ uma base de W. Mostre que $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$, com $\mathbf{u_1} = \mathbf{v_1}$, $\mathbf{u_2} = \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$ e $\mathbf{u_3} = \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} + \mathbf{v_3}$, é também uma base de W.

9. Considere os seguintes pares de subespaços lineares e encontre em cada caso a dimensão e uma base para $U \cap W$ e $U + W$.

   (a) $U = \mathcal{L}\{(1,0,2,0)\}$ e
   $W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : y + 2z - w = 0 \wedge -y + 3w = 0 \wedge z = 0\}$.

   (b) $U = \mathcal{L}\{(1,0,-1,0), (0,1,1,0)\}$ e
   $W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : -x + y - 2w = 0 \wedge 2y - z = 0\}$.

   (c) $U = \mathcal{L}(\{(0,0,1,0), (-2,0,0,-2)\})$
   $W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y - z - w = 0 \ \wedge \ x - w = 0\}$.

   Solução: (a) *uma base de* $U + W$ *pode ser dada pelo conjunto* $\{(1,0,2,0),\ (1,0,0,0)\}$ *e* $\dim U + W = 2$*; como* $U \cap W = \{(0,0,0,0)\}$*, temos* $\dim U \cap W = 0$ *e não existe base para a intersecção.* (b) *uma base de* $U + W$ *pode ser dada pelo conjunto* $\{(1,0,-1,0), (0,1,1,0), (1,1,2,0),\ (-2,0,0,1)\}$*, mas também pode escolher-se a base canónica de* $\mathbb{R}^4$ *e* $\dim U + W = 4$*; como* $U \cap W = \{(0,0,0,0)\}$*, temos* $\dim U \cap W = 0$ *e não existe base para a intersecção.*(c) *uma base de* $U + W$ *pode ser dada pelo conjunto* $\{(0,0,1,0), (-2,0,0,-2), (0,1,2,0)\}$*, sendo* $\dim U + W = 3$*; como* $U \cap W = \mathcal{L}\{(1,0,0,1)\}$*, temos* $\dim U \cap W = 1$ *e uma base para a intersecção será dada pelo conjunto* $\{(1,0,0,1)\}$.

10. Verifique que $\dim U + \dim W = \dim(U \cap W) + \dim(U + W)$ nos três casos considerados no problema anterior. Diga em que alíneas os pares de subespaços decompõem $\mathbb{R}^4$ numa soma directa.

    Resposta: nas alíneas (b) *e* (c) *os pares de subespaços decompõem* $\mathbb{R}^4$ *numa soma directa.*

11. Para cada uma das matrizes seguintes, encontre a dimensão e uma base para o espaço nulo (ou núcleo) da matriz, para o espaço gerado pelas linhas da matriz, e para o espaço gerado pelas colunas da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ ; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -8 \end{bmatrix} \ ; \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Solução: uma base de $NuclA$ *pode ser dada pelo conjunto* $\{(0,0,1,0),\ (1,1,0,2)\}$*, uma base de* $LinA$ *pode ser dada pelo conjunto* $\{(1,-3,0,1),\ (1,1,0,-1)\}$ *e uma base de* $ColA$ *pode ser dada pelo conjunto* $\{(1,1,0),\ (-3,1,0)\}$*. Assim, temos* $\dim LinA = \dim ColA = \mathrm{car}A = 2$ *e* $\dim NuclA = 2$*. Uma base de* $NuclB$ *pode ser dada pelo conjunto* $\{(-1,2,0)\}$*, uma base de* $LinA$ *pode ser dada pelo conjunto* $\{(2,1,5),\ (0,0,1)\}$ *e uma base de* $ColA$ *pode ser dada pelo conjunto* $\{(2,6),\ (5,-8)\}$*. Assim, temos* $\dim LinA = \dim ColA = \mathrm{car}A = 2$ *e* $\dim NuclA = 1$.

12. Sempre que $\mathbf{b}$ pertencer ao espaço gerado pelas colunas da matriz A, escrever $\mathbf{b}$ como combinação linear das colunas de A.

$(a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}\ ;\ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $(b)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\ ;\ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

$(c)\ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\ ;\ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $(d)\ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\ ;\ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Solução: (a) $\mathbf{b} = (1,4) - (3,-6)$; (b) $\mathbf{b} \notin Col A$; (c) $\mathbf{b} = 3(1,9,1) - 3(-1,3,1) - (1,1,1)$; (c) $\mathbf{b} = (1,1,-1) - (1-\alpha)(-1,1,-1) + \alpha(1,-1,1)$

13. Suponha que $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$, $x_4 = -3$ é uma solução particular do SEL não-homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e que o conjunto das soluções do SEL homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é dado pelas fórmulas

$$x_1 = -3r + 4s\ ,\ \ x_2 = r - s\ ,\ \ x_3 = r\ ,\ \ x_4 = s$$

(a) Indique a forma vectorial da solução geral de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(b) Indique a forma vectorial da solução geral de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Solução: (a) $\mathbf{x} = (-3,1,1,0)\,r + (4,-1,0,1)\,s$; (b) $\mathbf{x} = (-1,2,4,-3) + (-3,1,1,0)\,r + (4,-1,0,1)\,s$

14. Nas alíneas que se seguem indique a forma vectorial da solução geral do SEL não-homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Com base nesse resultado, indique a forma vectorial da solução geral do SEL homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$(a)\ \begin{cases} x_1 - 3x_2 = 1 \\ 2x_1 - 6x_2 = 2 \end{cases}$ $\qquad$ $(b)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$

$(c)\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 6x_4 = -3 \end{cases}$

Solução: (a) $\mathbf{x} = (1,0) + (3,1)\,t$; (b) $\mathbf{x} = (-2,7,0) + (1,1,-1)\,t$; (c) $\mathbf{x} = (-1,0,0,0) + (0,1,0,0)\,r + (0,0,1,0)\,s + (0,0,0,1)\,t$

15. Utilize a informação da seguinte tabela para determinar a dimensão do espaço gerado pelas linhas da matriz A, do espaço gerado pelas colunas de A, do núcleo de A (nulidade de A) e do núcleo de A^T (matriz transposta de A).

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)
A	3×3	3×3	3×3	5×9	9×5	4×4	6×2
car A	3	2	1	2	2	0	2
nul A	0	1	2	7	3	4	0
nul A^T	0	1	2	3	7	4	4

16. Utilize a informação da seguinte tabela para determinar se o correspondente SEL não-homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é possível. Em caso afirmativo, indique o número de parâmetros que entram na solução geral.

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)
A	3×3	3×3	3×3	5×9	9×5	4×4	6×2
car A	3	2	1	2	2	0	2
car (A:b)	3	3	1	2	3	0	2
SEL	det	imposs	indet	indet	imposs	indet	det

17. Indique a nulidade de cada uma das matrizes do exercício anterior e determine o número de parâmetros que entram na solução geral do correspondente SEL homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.