

7ª LISTA DE PROBLEMAS DE ÁLGEBRA LINEAR
LEIC

1º semestre 01/02 - semana de 2001-11-12

1. Diga, justificando, quais dos seguintes conjuntos constituem bases:

I. de $\mathbb{R}^2$:

- a) $S_1 = \{(2, 1), (3, 0)\}$
- b) $S_2 = \{(4, 1)\}$
- c) $S_3 = \{(0, 0), (2, 6)\}$
- d) $S_4 = \{(3, 9), (-4, -12)\}$
- e) $S_5 = \{(1, 0), (0, -1), (-1, 1)\}$

Resposta: apenas o conjunto da alínea (a) constitui uma base de $\mathbb{R}^2$.

II. de $\mathbb{R}^3$:

- a) $S_1 = \{(1, 0, 0), (2, 2, 0), (3, 3, 3)\}$
- b) $S_2 = \{(2, 2, 0), (3, 3, 3)\}$
- c) $S_3 = \{(3, 1, -4), (2, 5, 6), (1, 4, 8)\}$
- d) $S_4 = \{(3, 1, -4), (2, 5, 6), (1, 4, 8), (3, 3, 3)\}$
- e) $S_5 = \{(1, 6, 4), (2, 4, -1), (-1, 2, 5)\}$

Resposta: apenas os conjuntos das alíneas (a) e (c) constituem bases de $\mathbb{R}^3$.

III. de $\mathbb{R}^4$:

- a) $S_1 = \{(1, 0, 0, 0), (2, 2, 0, 0), (3, 3, 3, 0), (4, 4, 4, 4)\}$
- b) $S_2 = \{(1, 0, 0, 0), (2, 2, 0, 0), (3, 3, 3, 0)\}$
- c) $S_3 = \{(3, 1, -4, 1), (6, 5, -3, -1), (1, 1, -2, 4), (-3, 2, 9, 0)\}$

Resposta: os conjuntos das alíneas (a) e (c) constituem bases de $\mathbb{R}^4$.

2. Seja W o espaço constituído pela expansão linear dos vectores $\mathbf{u} = (1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{v} = (2, 2, 0, 0)$ e $\mathbf{w} = (0, -2, 0, 0)$.

(a) Mostre que $S = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ não é uma base de W .

(b) Determine a dimensão e uma base de W .

Resposta: (a) S não constitui uma base de W porque é L.D. (apesar de gerar W). Temos, p. ex., $\mathbf{w} = 2\mathbf{u} - \mathbf{v}$; (b) $\dim W = 2$, uma base poderá ser o conjunto $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, outra será dada por $\{\mathbf{u}, \mathbf{w}\}$.

3. Escreva o vector de coordenadas $(\mathbf{v})_{B_i}$, i.e., determine as coordenadas de $\mathbf{v}$ nas seguintes bases B_i :

I. de $\mathbb{R}^2$:

- a) $\mathbf{v} = (2, 1)$; $B_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, com $\mathbf{v}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1)$,
- b) $\mathbf{v} = (2, 1)$; $B_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, com $\mathbf{v}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 2)$,

c) $\mathbf{v} = (2, 1)$; $B_3 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, com $\mathbf{v}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, -1)$,

Solução: (a) $(2, 1)_{B_1} = (2, 1)$; (b) $(2, 1)_{B_2} = (1, \frac{1}{2})$; (c) $(2, 1)_{B_3} = (3, -1)$

II. de $\mathbb{R}^3$:

a) $\mathbf{v} = (2, -1, 3)$; $B_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, com $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1)$

b) $\mathbf{v} = (2, -1, 3)$; $B_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, com $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 2, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (3, 3, 3)$

c) $\mathbf{v} = (5, -12, 3)$; $B_3 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, com $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (-4, 5, 6)$, $\mathbf{v}_3 = (7, -8, 9)$

Solução: (a) $(2, -1, 3)_{B_1} = (2, -1, 3)$; (b) $(2, -1, 3)_{B_2} = (3, -2, 1)$; (c) $(5, -12, 3)_{B_3} = (-2, 0, 1)$

III. de $\mathbb{R}^4$:

a) $\mathbf{v} = (1, 0, 2, -1)$; $B_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$, com $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1, 0)$, $\mathbf{v}_4 = (0, 0, 0, 1)$

b) $\mathbf{v} = (1, 0, 2, -1)$; $B_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$, com $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 1, 0)$, $\mathbf{v}_4 = (1, 1, 1, 1)$

c) $\mathbf{v} = (0, -1, 3, -6)$; $B_3 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$, com $\mathbf{v}_1 = (1, 0, -1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (-1, 1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_4 = (0, 0, 1, -1)$

Solução: (a) $(1, 0, 2, -1)_{B_1} = (1, 0, 2, -1)$; (b) $(1, 0, 2, -1)_{B_2} = (1, -2, 3, -1)$; (c) $(0, -1, 3, -6)_{B_3} = (1, -2, 1, 4)$

4. Determine uma base para os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$.

a) O plano $3x - 2y + 5z = 0$

b) O plano $x - y = 0$

c) A recta $x = 2t$, $y = -t$, $z = 4t$

d) Todos os vectores da forma (a, b, c) , em que $b = a + c$

Solução: (a) $\{(2, 3, 0), (-5, 0, 3)\}$; (b) $\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$; (c) $\{(2, -1, 4)\}$; (d) $\{(1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$

5. Determine uma base para os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$.

a) Todos os vectores da forma $(a, b, c, 0)$

b) Todos os vectores da forma (a, b, c, d) , em que $d = a + b$ e $c = a - b$

c) Todos os vectores da forma (a, b, c, d) , em que $a = b = c = d$

Solução: (a) $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$; (b) $\{(1, -1, 2, 0), (1, 1, 0, 2)\}$; (c) $\{(1, 1, 1, 1)\}$

6. Acrescente um vector da base canónica de $\mathbb{R}^3$ ao conjunto $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ de modo a produzir uma base de $\mathbb{R}^3$.

(a) $\mathbf{v}_1 = (-1, 2, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (1, -2, -2)$.

(b) $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (3, 1, -2)$.

Solução: (a) $(1, 0, 0)$ ou $(0, 1, 0)$; (b) $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ ou $(0, 0, 1)$

7. Acrescente vectores da base canónica de $\mathbf{R}^4$ ao conjunto $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ de modo a produzir uma base de $\mathbf{R}^4$.

$$\mathbf{v}_1 = (1, -4, 2, -3), \quad \mathbf{v}_2 = (-3, 8, -4, 6)$$

Solução: o vector $(1, 0, 0, 0)$ não serve, porque é combinação linear de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, mas os vectores $(0, 1, 0, 0)$ e $(0, 0, 0, 1)$ da base canónica de $\mathbf{R}^4$ podem ser acrescentados.

8. Seja $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ uma base de W . Mostre que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, com $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ e $\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$, é também uma base de W .
9. Considere os seguintes pares de subespaços lineares e encontre em cada caso a dimensão e uma base para $U \cap W$ e $U + W$.

- (a) $U = \mathcal{L}\{(1, 0, 2, 0)\}$ e
 $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbf{R}^4 : y + 2z - w = 0 \wedge -y + 3w = 0 \wedge z = 0\}$.
- (b) $U = \mathcal{L}\{(1, 0, -1, 0), (0, 1, 1, 0)\}$ e
 $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbf{R}^4 : -x + y - 2w = 0 \wedge 2y - z = 0\}$.
- (c) $U = \mathcal{L}\{(0, 0, 1, 0), (-2, 0, 0, -2)\}$
 $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbf{R}^4 : x + 2y - z - w = 0 \wedge x - w = 0\}$.

Solução: (a) uma base de $U + W$ pode ser dada pelo conjunto $\{(1, 0, 2, 0), (1, 0, 0, 0)\}$ e $\dim U + W = 2$; como $U \cap W = \{(0, 0, 0, 0)\}$, temos $\dim U \cap W = 0$ e não existe base para a intersecção. (b) uma base de $U + W$ pode ser dada pelo conjunto $\{(1, 0, -1, 0), (0, 1, 1, 0), (1, 1, 2, 0), (-2, 0, 0, 1)\}$, mas também pode escolher-se a base canónica de $\mathbf{R}^4$ e $\dim U + W = 4$; como $U \cap W = \{(0, 0, 0, 0)\}$, temos $\dim U \cap W = 0$ e não existe base para a intersecção. (c) uma base de $U + W$ pode ser dada pelo conjunto $\{(0, 0, 1, 0), (-2, 0, 0, -2), (0, 1, 2, 0)\}$, sendo $\dim U + W = 3$; como $U \cap W = \mathcal{L}\{(1, 0, 0, 1)\}$, temos $\dim U \cap W = 1$ e uma base para a intersecção será dada pelo conjunto $\{(1, 0, 0, 1)\}$.

10. Verifique que $\dim U + \dim W = \dim(U \cap W) + \dim(U + W)$ nos três casos considerados no problema anterior. Diga em que alíneas os pares de subespaços decompõem $\mathbf{R}^4$ numa soma directa.

Resposta: nas alíneas (b) e (c) os pares de subespaços decompõem $\mathbf{R}^4$ numa soma directa.

11. Para cada uma das matrizes seguintes, encontre a dimensão e uma base para o espaço nulo (ou núcleo) da matriz, para o espaço gerado pelas linhas da matriz, e para o espaço gerado pelas colunas da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -8 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Solução: uma base de $\text{Nucl} A$ pode ser dada pelo conjunto $\{(0, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 2)\}$, uma base de $\text{Lin} A$ pode ser dada pelo conjunto $\{(1, -3, 0, 1), (1, 1, 0, -1)\}$ e uma base de $\text{Col} A$ pode ser dada pelo conjunto $\{(1, 1, 0), (-3, 1, 0)\}$. Assim, temos $\dim \text{Lin} A = \dim \text{Col} A = \text{car} A = 2$ e $\dim \text{Nucl} A = 2$. Uma base de $\text{Nucl} B$ pode ser dada pelo conjunto $\{(-1, 2, 0)\}$, uma base de $\text{Lin} B$ pode ser dada pelo conjunto $\{(2, 1, 5), (0, 0, 1)\}$ e uma base de $\text{Col} B$ pode ser dada pelo conjunto $\{(2, 6), (5, -8)\}$. Assim, temos $\dim \text{Lin} B = \dim \text{Col} B = \text{car} B = 2$ e $\dim \text{Nucl} B = 1$.

12. Sempre que $\mathbf{b}$ pertencer ao espaço gerado pelas colunas da matriz A , escrever $\mathbf{b}$ como combinação linear das colunas de A .

$$(a) A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} ; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \end{bmatrix} \quad (b) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} ; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$(c) A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} ; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (d) A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} ; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solução: (a) $\mathbf{b} = (1, 4) - (3, -6)$; (b) $\mathbf{b} \notin \text{Col}A$; (c) $\mathbf{b} = 3(1, 9, 1) - 3(-1, 3, 1) - (1, 1, 1)$; (d) $\mathbf{b} = (1, 1, -1) - (1 - \alpha)(-1, 1, -1) + \alpha(1, -1, 1)$

13. Suponha que $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$, $x_4 = -3$ é uma solução particular do SEL não-homogêneo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e que o conjunto das soluções do SEL homogêneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é dado pelas fórmulas

$$x_1 = -3r + 4s, \quad x_2 = r - s, \quad x_3 = r, \quad x_4 = s$$

- (a) Indique a forma vectorial da solução geral de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
 (b) Indique a forma vectorial da solução geral de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Solução: (a) $\mathbf{x} = (-3, 1, 1, 0)r + (4, -1, 0, 1)s$; (b) $\mathbf{x} = (-1, 2, 4, -3) + (-3, 1, 1, 0)r + (4, -1, 0, 1)s$

14. Nas alíneas que se seguem indique a forma vectorial da solução geral do SEL não-homogêneo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Com base nesse resultado, indique a forma vectorial da solução geral do SEL homogêneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$$(a) \begin{cases} x_1 - 3x_2 = 1 \\ 2x_1 - 6x_2 = 2 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 6x_4 = -3 \end{cases}$$

Solução: (a) $\mathbf{x} = (1, 0) + (3, 1)t$; (b) $\mathbf{x} = (-2, 7, 0) + (1, 1, -1)t$; (c) $\mathbf{x} = (-1, 0, 0, 0) + (0, 1, 0, 0)r + (0, 0, 1, 0)s + (0, 0, 0, 1)t$

15. Utilize a informação da seguinte tabela para determinar a dimensão do espaço gerado pelas linhas da matriz A , do espaço gerado pelas colunas de A , do núcleo de A (nulidade de A) e do núcleo de A^T (matriz transposta de A).

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)
A	3×3	3×3	3×3	5×9	9×5	4×4	6×2
$\text{car } A$	3	2	1	2	2	0	2
$\text{nul } A$	0	1	2	7	3	4	0
$\text{nul } A^T$	0	1	2	3	7	4	4

16. Utilize a informação da seguinte tabela para determinar se o correspondente SEL não-homogêneo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é possível. Em caso afirmativo, indique o número de parâmetros que entram na solução geral.

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)
A	3×3	3×3	3×3	5×9	9×5	4×4	6×2
car A	3	2	1	2	2	0	2
car (A:b)	3	3	1	2	3	0	2
SEL	det	imposs	indet	indet	imposs	indet	det

17. Indique a nulidade de cada uma das matrizes do exercício anterior e determine o número de parâmetros que entram na solução geral do correspondente SEL homogêneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.