INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

6ª LISTA DE PROBLEMAS DE ÁLGEBRA LINEAR
LEIC
1º semestre 2001/02 - semana de 2001-11-06

1. Diga, justificando, quais dos seguintes conjuntos com as operações usuais de soma vectorial e multiplicação por escalares reais são subespaços lineares de $\mathbb{R}^3$:

   a) O conjunto de vectores da forma $(a, 0, 0)$ com a real

   b) O conjunto de vectores da forma $(a, 1, 1)$ com a real

   c) O conjunto de vectores da forma (a, b, c) com $b = a + c$ e a, b, c reais

   d) O conjunto de vectores da forma (a, b, c) com a, b, c inteiros

   e) O conjunto de vectores da forma (a, b, c) com $b = a + c + 1$ e a, b, c reais

   Resposta: apenas os conjuntos das alíneas (a) e (c) são subespaços lineares de $\mathbb{R}^3$

2. Diga, justificando, quais dos seguintes conjuntos com as operações usuais de soma vectorial e multiplicação por escalares reais são subespaços lineares de $\mathbb{R}^4$:

   a) O conjunto de vectores da forma $(a, 0, 0, 1)$ com a real

   b) O conjunto de vectores da forma $(a, b, 0, 0)$ com a, b reais

   c) O conjunto de vectores da forma (a, b, c, d) com $b = a + c - d$ e $c = 2d$, sendo a, b, c, d reais

   c) O conjunto de vectores da forma (a, b, c, d) com a, b, c, d positivos

   d) O conjunto de vectores da forma (a, b, c, d) com $c = a + b + 1$ e $d = 2a - b$, sendo a, b, c reais

   Resposta: apenas os conjuntos das alíneas (b) e (c) são subespaços lineares de $\mathbb{R}^4$

3. Quais dos vectores seguintes são combinações lineares de $\mathbf{u} = (0, -2, 2)$ e $\mathbf{v} = (1, 3, -1)$?

   (a) $(2, 2, 2)$ (b) $(3, 1, 5)$ (c) $(0, 4, 5)$ (d) $(0, 0, 0)$

   Resposta: os vectores das alíneas (a), (b) e (d) são combinações lineares dos vectores dados.

4. Exprima os vectores seguintes como combinações lineares de $\mathbf{u} = (2, 1, 4)$, $\mathbf{v} = (1, -1, 3)$ e $\mathbf{w} = (3, 2, 5)$.

   (a) $(-9, -7, -15)$ (b) $(6, 11, 6)$ (c) $(0, 0, 0)$ (d) $(7, 8, 9)$

   Solução: (a) $(-9, -7, -15) = -2\mathbf{u}+1\mathbf{v}-2\mathbf{w}$*;* (b) $(6, 11, 6) = 4\mathbf{u}-5\mathbf{v}+\mathbf{w}$*;* (c) $(0, 0, 0) = 0\mathbf{u} + 0\mathbf{v} + 0\mathbf{w}$*;* (d) $(7, 8, 9) = 0\mathbf{u} - 2\mathbf{v} + 3\mathbf{w}$

5. Considere os seguintes conjuntos de vectores. Diga quais os que são L. I. e geram $\mathbb{R}^3$. Em caso de não gerarem $\mathbb{R}^3$, indique a dimensão do subespaço gerado.

   (a) $\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ (b) $\{(2, 2, 2), (0, 0, 0), (0, 1, 1)\}$
   (c) $\{(1, 2, 4), (0, 0, 0), (-2, -4, -8)\}$ (d) $\{(2, -1, 3), (4, 1, 2), (8, -1, 8)\}$
   (e) $\{(3, 1, 4), (2, -3, 5), (5, -2, 9), (1, 4, -1)\}$ (f) $\{(1, 2, 6), (3, 4, 1), (4, 3, 1), (3, 3, 1)\}$

Resposta: apena o conjunto da alínea (d) é simultaneamente L.I. e gerador de $\mathbb{R}^3$. Os conjuntos das alíneas (a), (b) e (e) são geradores de planos em $\mathbb{R}^3$ (subespaços lineares de dimensão 2). O conjunto da alínea (c) gera uma recta em $\mathbb{R}^3$. O conjuntos da alínea (f) não é L.I. mas é gerador de $\mathbb{R}^3$.

6. Sejam os vectores $\mathbf{v_1} = (2, 1, 0, 3)$, $\mathbf{v_2} = (3, -1, 5, 2)$ e $\mathbf{v_3} = (-1, 0, 2, 1)$. Quais dos vectores seguintes pertencem à expansão linear $\mathcal{L}\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$?

   (a) $(2, 3, -7, 3)$ (b) $(0, 0, 0, 0)$ (c) $(1, 1, 1, 1)$ (d) $(-4, 6, -13, 4)$

   Resposta: os vectores das alíneas (a), (b) e (d) pertencem à expansão linear $\mathcal{L}\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$.

7. Determine a dimensão dos seguintes subespaços lineares de $\mathbb{R}^3$.

   a) $\mathrm{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - 2y + 5z = 0\}$

   b) $\mathrm{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0\}$

   c) $\mathrm{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -2y \wedge z = -4y\}$

   d) O conjunto de vectores da forma (a, b, c) com $b = a + c$ e a, b, c reais

   e) O conjunto de vectores da forma (a, b, c) com $b = a + c$ e $c = 2a$, sendo a, b, c reais

   Resposta: os subespaços lineares das alíneas (c) e (e) têm dimensão 1; os subespaços lineares das alíneas (a), (b) e (d) têm dimensão 2.

8. Determine a dimensão dos seguintes subespaços lineares de $\mathbb{R}^4$.

   a) $\mathrm{W} = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : 3x - 2y + 5z - w = 0\}$

   b) $\mathrm{W} = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z - w = 0 \wedge -4y + z = 0 \wedge x - w = 0\}$

   c) $\mathrm{W} = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : -4y + w = 0 \wedge 2y - \frac{1}{2}w = 0\}$

   d) O conjunto de vectores da forma $(a, b, c, 0)$ com a, b, c reais

   e) O conjunto de vectores da forma (a, b, c, d) com $d = a + b$ e $c = a - b$ e a, b, c reais

   f) O conjunto de vectores da forma (a, b, c, d) com $a = b = c = d$ e a, b, c, d reais

   Resposta: os subespaços lineares das alíneas (b) e (f) têm dimensão 1; o subespaço linear da alínea (e) tem dimensão 2; os subespaços lineares das alíneas (a), (c) e (d) têm dimensão 3.