

6^a LISTA DE PROBLEMAS DE ÁLGEBRA LINEAR
LEIC

1^o semestre 2001/02 - semana de 2001-11-06

1. Diga, justificando, quais dos seguintes conjuntos com as operações usuais de soma vectorial e multiplicação por escalares reais são subespaços lineares de $\mathbf{R}^3$:

- a) O conjunto de vectores da forma $(a, 0, 0)$ com a real
- b) O conjunto de vectores da forma $(a, 1, 1)$ com a real
- c) O conjunto de vectores da forma (a, b, c) com $b = a + c$ e a, b, c reais
- d) O conjunto de vectores da forma (a, b, c) com a, b, c inteiros
- e) O conjunto de vectores da forma (a, b, c) com $b = a + c + 1$ e a, b, c reais

Resposta: apenas os conjuntos das alíneas (a) e (c) são subespaços lineares de $\mathbf{R}^3$

2. Diga, justificando, quais dos seguintes conjuntos com as operações usuais de soma vectorial e multiplicação por escalares reais são subespaços lineares de $\mathbf{R}^4$:

- a) O conjunto de vectores da forma $(a, 0, 0, 1)$ com a real
- b) O conjunto de vectores da forma $(a, b, 0, 0)$ com a, b reais
- c) O conjunto de vectores da forma (a, b, c, d) com $b = a + c - d$ e $c = 2d$, sendo a, b, c, d reais
- c) O conjunto de vectores da forma (a, b, c, d) com a, b, c, d positivos
- d) O conjunto de vectores da forma (a, b, c, d) com $c = a + b + 1$ e $d = 2a - b$, sendo a, b, c reais

Resposta: apenas os conjuntos das alíneas (b) e (c) são subespaços lineares de $\mathbf{R}^4$

3. Quais dos vectores seguintes são combinações lineares de $\mathbf{u} = (0, -2, 2)$ e $\mathbf{v} = (1, 3, -1)$?

- (a) $(2, 2, 2)$ (b) $(3, 1, 5)$ (c) $(0, 4, 5)$ (d) $(0, 0, 0)$

Resposta: os vectores das alíneas (a), (b) e (d) são combinações lineares dos vectores dados.

4. Exprima os vectores seguintes como combinações lineares de $\mathbf{u} = (2, 1, 4)$, $\mathbf{v} = (1, -1, 3)$ e $\mathbf{w} = (3, 2, 5)$.

- (a) $(-9, -7, -15)$ (b) $(6, 11, 6)$ (c) $(0, 0, 0)$ (d) $(7, 8, 9)$

Solução: (a) $(-9, -7, -15) = -2\mathbf{u} + 1\mathbf{v} - 2\mathbf{w}$; (b) $(6, 11, 6) = 4\mathbf{u} - 5\mathbf{v} + \mathbf{w}$; (c) $(0, 0, 0) = 0\mathbf{u} + 0\mathbf{v} + 0\mathbf{w}$; (d) $(7, 8, 9) = 0\mathbf{u} - 2\mathbf{v} + 3\mathbf{w}$

5. Considere os seguintes conjuntos de vectores. Diga quais os que são L. I. e geram $\mathbf{R}^3$. Em caso de não gerarem $\mathbf{R}^3$, indique a dimensão do subespaço gerado.

- (a) $\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ (b) $\{(2, 2, 2), (0, 0, 0), (0, 1, 1)\}$
- (c) $\{(1, 2, 4), (0, 0, 0), (-2, -4, -8)\}$ (d) $\{(2, -1, 3), (4, 1, 2), (8, -1, 8)\}$
- (e) $\{(3, 1, 4), (2, -3, 5), (5, -2, 9), (1, 4, -1)\}$ (f) $\{(1, 2, 6), (3, 4, 1), (4, 3, 1), (3, 3, 1)\}$

Resposta: apenas o conjunto da alínea (d) é simultaneamente L.I. e gerador de $\mathbf{R}^3$. Os conjuntos das alíneas (a), (b) e (e) são geradores de planos em $\mathbf{R}^3$ (subespaços lineares de dimensão 2). O conjunto da alínea (c) gera uma recta em $\mathbf{R}^3$. O conjunto da alínea (f) não é L.I. mas é gerador de $\mathbf{R}^3$.

6. Sejam os vectores $\mathbf{v}_1 = (2, 1, 0, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (3, -1, 5, 2)$ e $\mathbf{v}_3 = (-1, 0, 2, 1)$. Quais dos vectores seguintes pertencem à expansão linear $\mathcal{L}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$?

- (a) $(2, 3, -7, 3)$ (b) $(0, 0, 0, 0)$ (c) $(1, 1, 1, 1)$ (d) $(-4, 6, -13, 4)$

Resposta: os vectores das alíneas (a), (b) e (d) pertencem à expansão linear $\mathcal{L}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

7. Determine a dimensão dos seguintes subespaços lineares de $\mathbf{R}^3$.

- a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 3x - 2y + 5z = 0\}$
 b) $W = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x - y = 0\}$
 c) $W = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x = -2y \wedge z = -4y\}$
 d) O conjunto de vectores da forma (a, b, c) com $b = a + c$ e a, b, c reais
 e) O conjunto de vectores da forma (a, b, c) com $b = a + c$ e $c = 2a$, sendo a, b, c reais

Resposta: os subespaços lineares das alíneas (c) e (e) têm dimensão 1; os subespaços lineares das alíneas (a), (b) e (d) têm dimensão 2.

8. Determine a dimensão dos seguintes subespaços lineares de $\mathbf{R}^4$.

- a) $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbf{R}^4 : 3x - 2y + 5z - w = 0\}$
 b) $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbf{R}^4 : x - y + z - w = 0 \wedge -4y + z = 0 \wedge x - w = 0\}$
 c) $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbf{R}^4 : -4y + w = 0 \wedge 2y - \frac{1}{2}w = 0\}$
 d) O conjunto de vectores da forma $(a, b, c, 0)$ com a, b, c reais
 e) O conjunto de vectores da forma (a, b, c, d) com $d = a + b$ e $c = a - b$ e a, b, c reais
 f) O conjunto de vectores da forma (a, b, c, d) com $a = b = c = d$ e a, b, c, d reais

Resposta: os subespaços lineares das alíneas (b) e (f) têm dimensão 1; o subespaço linear da alínea (e) tem dimensão 2; os subespaços lineares das alíneas (a), (c) e (d) têm dimensão 3.