INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

$5^{\mathbf{a}}$ LISTA DE PROBLEMAS DE ÁLGEBRA LINEAR
LEIC
$1^{\mathbf{o}}$ semestre 2001/02 - semana de 2001-10-29

1. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ Considere por hipótese $\det A = -7$. Calcule

   $(a)\ \det(3A)$ $(b)\ \det(A^{-1})$ $(c)\ \det(2A^{-1})$ $(d)\ \det((2A)^{-1})$ $(e)\ \det \begin{bmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{bmatrix}$

   Solução: (a) -189; (b) $-\frac{1}{7}$ (c) $-\frac{8}{7}$; (d) $-\frac{1}{56}$ (e) 7

2. Sem calcular explicitamente o determinante, mostre que $x = 0$ e $x = 2$ satisfazem a condição
$$\begin{vmatrix} x & x^2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

3. Sem calcular explicitamente o determinante, mostre que
$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

   Sugestão: some a segunda à primeira linha.

4. Escreva
$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & c_1+d_1 \\ a_2+b_2 & c_2+d_2 \end{vmatrix}$$
   como uma soma de quatro determinantes, em cujas entradas não figurem adições.

   Solução: $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}$.

5. Escreva
$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & c_1+d_1 & e_1+f_1 \\ a_2+b_2 & c_2+d_2 & e_2+f_2 \\ a_3+b_3 & c_3+d_3 & e_3+f_3 \end{vmatrix}$$
   como uma soma de oito determinantes, em cujas entradas não figurem adições.

   Solução: $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & e_1 \\ a_2 & c_2 & e_2 \\ a_3 & c_3 & e_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & e_1 \\ b_3 & d_3 & f_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & e_1 \\ b_2 & d_2 & f_2 \\ a_3 & c_3 & e_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & e_1 \\ b_2 & d_2 & f_2 \\ b_3 & d_3 & f_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & d_1 & f_1 \\ a_2 & c_2 & e_2 \\ a_3 & c_3 & e_3 \end{vmatrix} +$
   $\begin{vmatrix} b_1 & d_1 & f_1 \\ a_2 & c_2 & e_2 \\ b_3 & d_3 & f_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & d_1 & f_1 \\ b_2 & d_2 & f_2 \\ a_3 & c_3 & e_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & d_1 & f_1 \\ b_2 & d_2 & f_2 \\ b_3 & d_3 & f_3 \end{vmatrix}$.

6. Mostre as igualdades seguintes, sem calcular os determinantes.

(a) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1+b_1+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2+b_2+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3+b_3+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

7. Para que valor(es) de k a matriz A deixa de ser invertível?

$$(a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ k & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad (b)\ A = \begin{bmatrix} k-3 & -2 \\ -2 & k-2 \end{bmatrix}$$

Solução: (a) *para* $k = -1$*;* (b) *para* $k = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$

8. Calcule o determinante da matriz $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ utilizando a regra de Laplace.

Solução: o determinante é igual a -17.

9. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

   a) Calcule o determinante de A.

   b) Escreva todos os menores e cofactores de A.

   c) Calcule a primeira linha de A^{-1}, utilizando os cálculos das alíneas anteriores.

Solução: (a) $\det(A) = 152$*;* (c) *a primeira linha* L_1 *de* A^{-1} *é dada por* $\left(\frac{29}{152}\ \frac{11}{152}\ -\frac{19}{152}\right)$

10. Resolva os seguintes SELs, utilizando a regra de Cramer.

(a) $\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 = 3 \\ 3x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 = -2 \\ 4x_1 - 3x_3 = -2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} -x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 = -32 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 + 9x_4 = 14 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 11 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = -4 \end{cases}$

Solução: (a) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$,*;* (b) $x_1 = -\frac{28}{11}$, $x_2 = -\frac{34}{11}$, $x_3 = -\frac{30}{11}$*;* (c) $x_1 = 5$, $x_2 = 8$, $x_3 = 3$, $x_4 = -1$

11. Calcule a área do paralelogramo definido pelos vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

(a) $\mathbf{u} = (1, -1)$ e $\mathbf{v} = (0, 3)$ (b) $\mathbf{u} = (2, 3)$ e $\mathbf{v} = (-1, 2)$
(c) $\mathbf{u} = (3, -1)$ e $\mathbf{v} = (6, -2)$

Solução: (a) 3 *;* (b) 7 (c) 0

12. Calcule o volume do paralelipípedo definido pelos vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

(a) $\mathbf{u} = (2, -6, 2)$, $\mathbf{v} = (0, 4, -2)$ e $\mathbf{w} = (2, 2, -4)$

(b) $\mathbf{u} = (3, 1, 2)$, $\mathbf{v} = (4, 5, 1)$ e $\mathbf{w} = (1, 2, 4)$

Solução: (a) 16 *;* (b) 45