

5ª LISTA DE PROBLEMAS DE ÁLGEBRA LINEAR
LEIC

1º semestre 2001/02 - semana de 2001-10-29

1. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ Considere por hipótese $\det A = -7$. Calcule

$$(a) \det(3A) \quad (b) \det(A^{-1}) \quad (c) \det(2A^{-1}) \quad (d) \det((2A)^{-1}) \quad (e) \det \begin{bmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{bmatrix}$$

Solução: (a) -189 ; (b) $-\frac{1}{7}$; (c) $-\frac{8}{7}$; (d) $-\frac{1}{56}$; (e) 7

2. Sem calcular explicitamente o determinante, mostre que $x = 0$ e $x = 2$ satisfazem a condição

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

3. Sem calcular explicitamente o determinante, mostre que

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Sugestão: some a segunda à primeira linha.

4. Escreva

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & c_1 + d_1 \\ a_2 + b_2 & c_2 + d_2 \end{vmatrix}$$

como uma soma de quatro determinantes, em cujas entradas não figurem adições.

Solução: $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}.$

5. Escreva

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & c_1 + d_1 & e_1 + f_1 \\ a_2 + b_2 & c_2 + d_2 & e_2 + f_2 \\ a_3 + b_3 & c_3 + d_3 & e_3 + f_3 \end{vmatrix}$$

como uma soma de oito determinantes, em cujas entradas não figurem adições.

Solução: $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & e_1 \\ a_2 & c_2 & e_2 \\ a_3 & c_3 & e_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & e_1 \\ a_2 & c_2 & f_2 \\ b_3 & d_3 & f_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & e_1 \\ b_2 & d_2 & f_2 \\ a_3 & c_3 & e_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & e_1 \\ b_2 & d_2 & f_2 \\ b_3 & d_3 & f_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & d_1 & f_1 \\ a_2 & c_2 & e_2 \\ a_3 & c_3 & e_3 \end{vmatrix} +$
 $\begin{vmatrix} b_1 & d_1 & f_1 \\ a_2 & c_2 & e_2 \\ b_3 & d_3 & f_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & d_1 & f_1 \\ b_2 & d_2 & f_2 \\ a_3 & c_3 & e_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & d_1 & f_1 \\ b_2 & d_2 & f_2 \\ b_3 & d_3 & f_3 \end{vmatrix}.$

6. Mostre as igualdades seguintes, sem calcular os determinantes.

$$(a) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 + b_1 + c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 + b_2 + c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 + b_3 + c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$
$$(b) \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 - b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2 & a_2 - b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3 & a_3 - b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

7. Para que valor(es) de k a matriz A deixa de ser invertível?

$$(a) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ k & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad (b) A = \begin{bmatrix} k-3 & -2 \\ -2 & k-2 \end{bmatrix}$$

Solução: (a) para $k = -1$; (b) para $k = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$

8. Calcule o determinante da matriz $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ utilizando a regra de Laplace.

Solução: o determinante é igual a -17.

9. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

- a) Calcule o determinante de A .
- b) Escreva todos os menores e cofactores de A .
- c) Calcule a primeira linha de A^{-1} , utilizando os cálculos das alíneas anteriores.

Solução: (a) $\det(A) = 152$; (c) a primeira linha L_1 de A^{-1} é dada por $\left(\frac{29}{152} \frac{11}{152} - \frac{19}{152}\right)$

10. Resolva os seguintes SELs, utilizando a regra de Cramer.

$$(a) \begin{cases} 7x_1 - 2x_2 = 3 \\ 3x_1 + x_2 = 5 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 = -2 \\ 4x_1 - 3x_3 = -2 \end{cases}$$
$$(c) \begin{cases} -x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 = -32 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 + 9x_4 = 14 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 11 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = -4 \end{cases}$$

11. Calcule a área do paralelograma definido pelos vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

$$(a) \mathbf{u} = (1, -1) \text{ e } \mathbf{v} = (0, 3) \quad (b) \mathbf{u} = (2, 3) \text{ e } \mathbf{v} = (-1, 2)$$
$$(c) \mathbf{u} = (3, -1) \text{ e } \mathbf{v} = (6, -2)$$

12. Calcule o volume do paralelepípedo definido pelos vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

$$(a) \mathbf{u} = (2, -6, 2), \mathbf{v} = (0, 4, -2) \text{ e } \mathbf{w} = (2, 2, -4)$$
$$(b) \mathbf{u} = (3, 1, 2), \mathbf{v} = (4, 5, 1) \text{ e } \mathbf{w} = (1, 2, 4)$$