INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

4ª LISTA DE PROBLEMAS DE ÁLGEBRA LINEAR
LEIC
1º semestre 2001/02 - semana de 2001-10-22

1. Quais das seguintes matrizes são matrizes elementares?

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix};\ \text{(b)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};\ \text{(c)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ \text{(d)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\text{(e)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix};\ \text{(f)} \begin{bmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ \text{(g)} \begin{bmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\ \text{(h)} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Resposta: as matrizes das alíneas (a), (b), (c), (e) e (g)

2. Indique qual a operação que se deve realizar com as linhas das seguintes matrizes para que elas se transformem na respectiva matriz identidade.

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix};\ \text{(b)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix};\ \text{(c)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ \text{(d)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

Solução: (a) *multiplicar a primeira linha por* 3 *e somar com a segunda linha, ou seja multiplicar a matriz por* $E_{21}(3)$*;* (b) *multiplicar a terceira linha por* $\frac{1}{5}$*, ou seja multiplicar pela matriz elementar* $D_3(\frac{1}{5})$*; trocar a primeira com a quarta linha, ou seja multiplicar por* $P_{(14)}$*;* (d) *multiplicar a terceira linha por* $\frac{1}{5}$ *e somar com a segunda linha, ou seja multiplicar a matriz por* $E_{23}(\frac{1}{5})$*.*

3. Considere a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

   (a) Encontre matrizes elementares tais que $E_3E_2E_1A = I$.

   (b) Escreva A^{-1} como um produto de três matrizes elementares.

   (c) Escreva A como um produto de três matrizes.

Solução: (a) $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *;* (b) $A^{-1} = E_3E_2E_1$ (c) $A = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}$.

4. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 3 & 8 \\ -2 & -5 & 1 & -8 \end{bmatrix}$$

Encontre uma expressão para A na forma $A = E_1E_2E_3R$, onde as matrizes $E_j, j = 1, 2, 3$ são matrizes elementares e R uma matriz em escada de linhas.

Solução: $E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. Mostre que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{bmatrix}$$

não é invertível para quaisquer entradas $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{R}$.

6. Utilizando o Método de Gauss-Jordan, calcule sempre que existir a matriz inversa de cada uma das seguintes matrizes.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 2 & 7 & 6 \\ 2 & 7 & 7 \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ (i) $\begin{bmatrix} -8 & 17 & 2 & \frac{1}{3} \\ 4 & 0 & \frac{2}{5} & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 13 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

Solução: (a) $\begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$; (b) $-\frac{1}{39}\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$; (c) *não é invertível;* (d) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{11}{10} & -\frac{6}{5} \\ -1 & 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{7}{10} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$; (e) *não é invertível;* (f) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$; (g) $\begin{bmatrix} \frac{7}{2} & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; (i) *não é invertível;*

7. Calcule sempre que existir a matriz inversa de cada uma das seguintes matrizes

(a) $\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix}$

em que $k_1, k_2, k_3, k_4, k \in \mathbb{R}$.

Solução: (a) $\begin{bmatrix} k_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4^{-1} \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_4^{-1} \\ 0 & 0 & k_3^{-1} & 0 \\ 0 & k_2^{-1} & 0 & 0 \\ k_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} k^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -k^{-2} & k^{-1} & 0 & 0 \\ k^{-3} & -k^{-2} & k^{-1} & 0 \\ -k^{-4} & k^{-3} & -k^{-2} & k^{-1} \end{bmatrix}$.