

4^a LISTA DE PROBLEMAS DE ÁLGEBRA LINEAR
LEIC

1^o semestre 2001/02 - semana de 2001-10-22

1. Quais das seguintes matrizes são matrizes elementares?

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}; (b) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; (c) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; (d) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$(e) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}; (f) \begin{bmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; (g) \begin{bmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; (h) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Resposta: as matrizes das alíneas (a), (b), (c), (e) e (g)

2. Indique qual a operação que se deve realizar com as linhas das seguintes matrizes para que elas se transformem na respectiva matriz identidade.

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}; (b) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}; (c) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; (d) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

Solução: (a) multiplicar a primeira linha por 3 e somar com a segunda linha, ou seja multiplicar a matriz por $E_{21}(3)$; (b) multiplicar a terceira linha por $\frac{1}{5}$, ou seja multiplicar pela matriz elementar $D_3(\frac{1}{5})$; trocar a primeira com a quarta linha, ou seja multiplicar por $P_{(14)}$; (d) multiplicar a terceira linha por $\frac{1}{5}$ e somar com a segunda linha, ou seja multiplicar a matriz por $E_{23}(\frac{1}{5})$.

3. Considere a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

- (a) Encontre matrizes elementares tais que $E_3 E_2 E_1 A = I$.
 (b) Escreva A^{-1} como um produto de três matrizes elementares.
 (c) Escreva A como um produto de três matrizes.

Solução: (a) $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; (b) $A^{-1} = E_3 E_2 E_1$ (c) $A = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1}$.

4. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 3 & 8 \\ -2 & -5 & 1 & -8 \end{bmatrix}$$

Encontre uma expressão para A na forma $A = E_1 E_2 E_3 R$, onde as matrizes $E_j, j = 1, 2, 3$ são matrizes elementares e R uma matriz em escada de linhas.

$$\text{Solução: } E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Mostre que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{bmatrix}$$

não é invertível para quaisquer entradas $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbf{R}$.

6. Utilizando o Método de Gauss-Jordan, calcule sempre que existir a matriz inversa de cada uma das seguintes matrizes.

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(d) \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix} \quad (e) \begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{bmatrix} \quad (f) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(g) \begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 2 & 7 & 6 \\ 2 & 7 & 7 \end{bmatrix} \quad (h) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \quad (i) \begin{bmatrix} -8 & 17 & 2 & \frac{1}{3} \\ 4 & 0 & \frac{2}{5} & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 13 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Solução: (a) } \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}; (b) -\frac{1}{39} \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}; (c) \text{ não é invertível}; (d) \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{11}{10} & -\frac{6}{5} \\ -1 & 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{7}{10} & \frac{2}{5} \end{bmatrix};$$

$$(e) \text{ não é invertível}; (f) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}; (g) \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}; (i) \text{ não é invertível};$$

7. Calcule sempre que existir a matriz inversa de cada uma das seguintes matrizes

$$(a) \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix}$$

em que $k_1, k_2, k_3, k_4, k \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}
& \text{Solução: (a)} \begin{bmatrix} k_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4^{-1} \end{bmatrix}; \text{ (b)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_4^{-1} \\ 0 & 0 & k_3^{-1} & 0 \\ 0 & k_2^{-1} & 0 & 0 \\ k_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\
& \text{(c)} \begin{bmatrix} k^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -k^{-2} & k^{-1} & 0 & 0 \\ k^{-3} & -k^{-2} & k^{-1} & 0 \\ -k^{-4} & k^{-3} & -k^{-2} & k^{-1} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$