INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

3ª LISTA DE PROBLEMAS DE ÁLGEBRA LINEAR
LEIC
1º semestre 2001/02 - semana de 2001-10-15

1. Resolva a seguinte equação matricial em a, b, c e d:

$$\begin{bmatrix} a-b & b+c \\ 3d+c & 2a-4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

   Solução: $a = 5$, $b = -3$, $c = 4$, $d = 1$

2. Usando as matrizes A, B e C do Problema 6 da segunda lista, calcule se possível:

$$\text{(a) } A - A \qquad \text{(b) } \operatorname{tr}(C) \qquad \text{(c) } 2\operatorname{tr}(-B) \qquad \text{(d) } A^T + B^T$$

$$\text{(e) } B^T - C^T \qquad \text{(f) } (B-C)^T \qquad \text{(g) } CC^T \qquad \text{(h) } \operatorname{tr}(C^T C)$$

   Solução: (a) *a matriz nula* 2×3*;* (b) 6*;* (c) 2*;* (d) *a matriz soma não está definida;* (e) $\begin{bmatrix} -2 & \sqrt{3} & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ \pi & 2 & -6 \end{bmatrix}$*;* (f) *igual à anterior;* (g) $\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}$*;* (h) 38

3. Obtenha uma fórmula para A^n, onde A é sucessivamente uma das seguintes matrizes:

$$\text{(a) } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \text{ (b) } \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \text{ (c) } \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

   Solução: (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$*;* (c) $\begin{bmatrix} \cos(n\alpha) & -\sin(n\alpha) \\ \sin(n\alpha) & \cos(n\alpha) \end{bmatrix}$

4. Mostre que se A é uma matriz 2×2 que comuta com qualquer outra matriz 2×2, então A é igual à multiplicação da matriz identidade por um escalar (A é uma matriz diagonal 2×2 com a mesma entrada na diagonal principal). Sugestão: se A comuta com todas, experimente algumas matrizes com zeros e uns.

5. Seja D_5 uma matriz quadrada diagonal $m \times m$ com entradas diagonais iguais a 5, ou seja uma matriz do tipo condiderado no problema anterior. Mostre que

   (a) para toda a matriz $A_{m\times n}$, $D_5\ A = 5A$;

   (b) para toda a matriz $B_{n\times m}$, $B\ D_5 = 5B$.

6. Sendo A e B duas matrizes quadradas, será verdade que se o produto AB se anula, então se tem necessariamente $A = 0$ ou $B = 0$?

   Resposta: falso. Mostra-se por contra-exemplo

7. Encontre as matrizes A, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{b}$, que permitem escrever os sistemas de equações lineares do Problema 2 (a)-(c) e Problema 4 (a)-(d) da primeira lista na forma de equação matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

8. Em cada alínea use a informação dada para calcular a matriz A.

$$\text{(a) } A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix};\ \text{(b) } (7A)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix};$$

$$\text{(c) } (5A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix};\ \text{(d) } (I+2A)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Solução: (a) $A = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$; (b) $A = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$; (c) $A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$; (d) $A = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} -9 & 1 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$

9. Seja A a matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule A^3, A^{-3} e $A^2 - 2A + I$.

Solução: $A^3 = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 28 & 1 \end{bmatrix}$; $A^{-3} = (A^3)^{-1} = (A^{-1})^3 = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -28 & 8 \end{bmatrix}$; $A^2 - 2A + I = (A-I)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

10. Calcule a matriz inversa de

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

Solução: $\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$