INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

2ª LISTA DE PROBLEMAS DE ÁLGEBRA LINEAR
LEIC
1º semestre 2001/02 - semana de 2001-10-08

1. Escreva as matrizes dos coeficientes dos sistemas lineares homogéneos do problema 2 da primeira lista. Utilizando o Método de Eliminação de Gauss na escrita matricial, resolva cada um dos sistemas.

2. Escreva as matrizes aumentadas dos sistemas lineares não-homogéneos do problema 4 da primeira lista. Utilizando o Método de Eliminação de Gauss na escrita matricial, resolva cada um dos sistemas.

3. Faça a discussão de cada um dos sistemas de equações lineares (nas variáveis x, y, z) do problema 5 da primeira lista em função dos respectivos parâmetros, usando a escrita da matriz aumentada.

4. Considere as seguintes matrizes aumentadas em escada de linhas. Resolva cada um dos respectivos sistemas de equações lineares.

$$(a)\ \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad (b)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(c)\ \begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 & 0 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (d)\ \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução: (a) $x = -37$, $y = -8$, $z = 5$*; (b)* $x = -10 + 13w$, $y = -5 + 13w$, $z = 2 - w$, $w \in \mathbb{R}$*; (c)* $x = -11 - 7y + 2v$, $z = -4 - 3v$, $u = 9 - 3v$, $y, w \in \mathbb{R}$*; (d) O SEL não tem solução*

5. Quais das seguintes matrizes 3×3 são matrizes em escada de linhas? Indique as características de todas as matrizes.

$$\text{(a)}\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\ \text{(b)}\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ \text{(c)}\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ \text{(d)}\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\text{(e)}\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ \text{(f)}\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ \text{(g)}\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\ \text{(h)}\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{(i)}\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ \text{(j)}\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix};\ \text{(k)}\ \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix};\ \text{(l)}\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Resposta: as matrizes das alíneas (a)-(c), (f), (h) e (l) são matrizes em escadas de linhas. As características são, respectivamente: (a) 3 *;(b)* 2 *;(c)* 2 *;(d)* 2 *;(e)* 2 *;(f)* 2 *;(g)* 2 *;(h)* 0 *;(i)* 1 *;(j)* 3 *;(k)* 2 *;(l)* 2

6. Calcule se possível $A+B$, $B+C$, $2A$, AB, BA e CB:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & \sqrt{2} \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & \pi \\ \sqrt{3} & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\ ,\ C=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Solução:

$$B+C=\begin{bmatrix} 4 & 2 & \pi \\ \sqrt{3} & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}\ ,\ 2A=\begin{bmatrix} 2 & 8 & 2\sqrt{2} \\ -4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix} 1+4\sqrt{3} & -2+\sqrt{2} & \pi+8-\sqrt{2} \\ -2+\sqrt{3} & -2 & -1-2\pi \end{bmatrix}\ ,\ CB=\begin{bmatrix} 3 & 6 & 3\pi \\ -2\sqrt{3} & 2 & -4 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

As restantes operações não estão bem definidas.

7. Sejam A uma matriz 4×5, B uma matriz 4×5, C uma matriz 5×2, D uma matriz 4×2 e E uma matriz 5×4 . Determine quais das seguintes expressões matriciais estão bem definidas, e nesses casos, indique a dimensão da matriz resultante.

(a) BA (b) $AC+D$ (c) $AE+B$ (d) $AB+B$

(e) $E(A+B)$ (f) $E(AC)$ (g) E^TA (h) $(A^T+E)D$

Resposta: as expressões das alíneas (b), (e), (f) e (h) estão bem definidas. As dimensões das matrizes resultantes são, respectivamente: (b) 4×2*;(e)* 5×5 *;(f)* 5×2 *;(h)* 5×2