INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

11ª LISTA DE PROBLEMAS DE ÁLGEBRA LINEAR
LEIC
1º semestre 01/02 - semana de 2001-12-17 e 2002-01-03

1. Diga, justificando, quais dos seguintes ternos $(V, \oplus, \odot)$ são espaços lineares reais (V representa um conjunto e $\oplus$ e $\odot$ representam as operações de adição e multiplicação por um número real, respectivamente):

   a) O conjunto de ternos ordenados (x, y, z) de reais com as operações:

   $$(x, y, z) \oplus (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z') \text{ e } k \odot (x, y, z) = (kx, y, z).$$

   b) O conjunto de ternos ordenados (x, y, z) de reais com as operações:

   $$(x, y, z) \oplus (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z') \text{ e } k \odot (x, y, z) = (0, 0, 0).$$

   c) O conjunto de ternos ordenados (x, y, z) de reais com as operações:

   $$(x, y, z) \oplus (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z') \text{ e } k \odot (x, y, z) = (2kx, 2ky, 2kz).$$

   d) O conjunto de pares ordenados (x, y) de reais tais que $x \leq 0$ com as operações usuais em $\mathbb{R}^2$.

   e) O conjunto de pares ordenados (x, y) de reais com as operações:

   $$(x, y) \oplus (x', y') = (x + x' + 1, y + y' + 1) \text{ e } k \odot (x, y) = (kx, ky).$$

   f) O conjunto dos reais positivos com as operações $x \oplus x' = xx'$ e $k \odot x = x^k$.

   g) O conjunto das matrizes da forma:

   $$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

   com as operações usuais de adição matricial e multiplicação por um número real.

   h) O conjunto das matrizes da forma:

   $$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

   com as operações usuais de adição matricial e multiplicação por um número real.

   i) O conjunto das matrizes singulares $n \times n$, considerando as operações matriciais usuais.

   j) O conjunto das matrizes $n \times n$ que comutam com uma dada matriz A com as operações matriciais usuais.

   k) O conjunto das funções reais de variável real tais que $f(x) = -f(-x)$ (funções ímpares), considerando as operações usuais de adição de funções e multiplicação por um número real (definidas ponto a ponto).

l) O conjunto das funções reais de variável real tais que $f(1) = 0$, considerando as operações usuais de adição de funções e multiplicação por um número real (definidas ponto a ponto).

m) O conjunto dos polinómios reais $p(x)$ que se anulam em $x = 0$.

n) O conjunto das funções reais de variável real tais que f tem segunda derivada contínua e $f''(x) + af'(x) + bf(x) = \cos x$, onde a e b são dois números reais dados.

2. Diga, justificando, quais dos seguintes conjuntos com as operações definidas como sendo as operações usuais nos respectivos espaços lineares são subespaços lineares. Nos casos afirmativos, indique a respectiva dimensão.

I. de $\mathcal{M}(2 \times 2, \mathbb{R})$:

a) O conjunto de matrizes da forma $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ com a, b, c, d inteiros

b) O conjunto de matrizes da forma anterior, em que $a + d = 0$

c) O conjunto de matrizes 2×2 tais que $A^T = -A$, em que A^T representa a matriz transposta

d) O conjunto de matrizes 2×2 tais que $\det A = 0$

II. de $\mathcal{P}_3$:

a) O conjunto dos polinómios de variável real $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ tais que $a_0 = 0$

b) O conjunto dos polinómios de variável real $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ tais que $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$

c) O conjunto dos polinómios de variável real $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ tais que a_0, a_1, a_2, a_3 são inteiros

d) O conjunto dos polinómios de variável real $a_0 + a_1x$ tais que a_0, a_1 são reais

3. Quais dos vectores seguintes são combinações lineares de

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}?$$

(a) $\begin{bmatrix} 6 & -8 \\ -1 & -8 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$

4. Exprima os vectores seguintes como combinações lineares de $\mathbf{p_1} = 2 + x + 4x^2$, $\mathbf{p_2} = 1 - x + 3x^2$ e $\mathbf{p_3} = 3 + 2x + 5x^2$.

(a) $-9 - 7x - 15x^2$ (b) $6 + 11x + 6x^2$ (c) 0 (d) $7 + 8x + 9x^2$

5. Diga, justificando, quais dos seguintes conjuntos constituem bases

I. de $\mathcal{M}(2 \times 2, \mathbb{R})$:

a) O conjunto das matrizes

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

b) O conjunto das primeiras três matrizes

c) O conjunto formado pelas matrizes da alínea a) e a matriz $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

II. de $\mathcal{P}_2$:

a) $B_1 = \{1 - 3x + 2x^2, 1 + x + 4x^2, 1 - 7x\}$

b) $B_2 = \{1 - 3x + 2x^2, 1 + x + 4x^2, 1 - 7x, 2 + x - 3x^2\}$

c) $B_3 = \{1 + x + x^2, x + x^2, x^2\}$

d) $B_4 = \{-4 + x + 3x^2, 6 + 5x + 2x^2, 8 + 4x + x^2\}$

6. Seja V o espaço constituido pela expansão linear dos vectores $\mathbf{u} = \cos^2 x$, $\mathbf{v} = \sin^2 x$ e $\mathbf{w} = \cos(2x)$.

(a) Mostre que $S = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ não é uma base de V. (b) Encontre uma base para V.

7. Escreva o vector $\mathbf{v}$ nas seguintes bases $B = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ de $\mathcal{P}_2$:

a) $\mathbf{v} = 4 - 3x + x^2$; $\mathbf{v_1} = 1$, $\mathbf{v_2} = x$, $\mathbf{v_3} = x^2$

b) $\mathbf{v} = 2 - x + x^2$; $\mathbf{v_1} = 1 + x$, $\mathbf{v_2} = 1 + x^2$, $\mathbf{v_3} = x + x^2$

8. Exprima as coordenadas do vector A relativamente às seguintes bases $B = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$.

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$; $A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix}$, $A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

9. Diga, justificando, quais das seguintes funções constituem transformações lineares.

a) $T : \mathcal{M}(2 \times 2, \mathbb{R}) \to \mathcal{M}(2 \times 3, \mathbb{R})$ tal que $T(A) = AB$, em que B é uma matriz fixa 2×3.

b) $T : \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tal que $T(A) = \mathrm{tr}A$, em que $\mathrm{tr}A$ representa o traço da matriz A.

c) $T : \mathcal{M}(m \times n, \mathbb{R}) \to \mathcal{M}(n \times m, \mathbb{R})$ tal que $T(A) = A^T$, em que A^T representa a matriz transposta da matriz A.

d) $T : \mathcal{M}(2\times 2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tal que $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 3a - 4b + c - d$, em que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

e) $T : \mathcal{M}(2 \times 2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tal que $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a^2 + b^2$, em que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

f) $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ tal que $T(a + bx + cx^2) = a + b(x + 1) + c(x + 1)^2$, em que $a, b, c \in \mathbb{R}$.

g) $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ tal que $T(a + bx + cx^2) = (a + 1) + (b + 1)x + (c + 1)x^2$, em que $a, b, c \in \mathbb{R}$.

10. Considere o espaço linear $\mathcal{P}_2$ dos polinómios reais de variável real de grau menor ou igual a 2 e a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida por

$$f(t) \mapsto 2f'(t) - f(t)$$

onde f' designa a derivada de f.

a) Determine a matriz que representa a transformação linear T em relação à base $\{1, t, t^2\}$ (base canónica) de $\mathcal{P}_2$. Diga, justificando, se a transformação linear T é invertível.

b) Encontre a função $g \in \mathcal{P}_2$ tal que $(T(g))(t) = (t+1)^2$, $t \in \mathbb{R}$.

11. Considere as transformações lineares $T_1 : \mathcal{M}(2 \times 2, \mathbb{R}) \to \mathcal{M}(2 \times 2, \mathbb{R})$ e $T_2 : \mathcal{M}(2 \times 2, \mathbb{R}) \to \mathcal{M}(2 \times 2, \mathbb{R})$, em que $\mathcal{M}(2 \times 2, \mathbb{R})$ representa o espaço vectorial das matrizes 2×2 com entradas reais, dadas por $T_1(A) = \frac{A+A^T}{2}$ e $T_2(A) = \frac{A-A^T}{2}$.

a) Determine as matrizes que representam T_1 e T_2, respectivamente, relativamente à base canónica de $\mathcal{M}(2 \times 2, \mathbb{R})$ no espaço de partida e de chegada.

b) Calcule $T_1\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right)$ e $T_2\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right)$.

c) Mostre que as imagens de T_1 e T_2 são complementos ortogonais, quando se considera o produto interno usual em $\mathcal{M}(2 \times 2, \mathbb{R})$.

12. a) Determine $\langle U, V \rangle$, em que $U = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ e o produto interno é o usual em $\mathcal{M}(2 \times 2, \mathbb{R})$.

b) Determine a norma $\|U\|$ e a distância $d(U, V)$ com as matrizes da alínea anterior e usando o mesmo produto interno.

c) Determine $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$, em que $\mathbf{p} = 3 + x - x^2$ e $\mathbf{q} = 1 - 2x + 3x^2$ e o produto interno é o usual em $\mathcal{P}_2$.

d) Determine a norma $\|\mathbf{p}\|$ e a distância $d(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ com os polinómios da alínea anterior e usando o mesmo produto interno.

13. Verifique a desigualdade de Cauchy-Schwarz para os seguintes vectores.

a) $U = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ e$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ com o produto interno usual em $\mathcal{M}(2 \times 2, \mathbb{R})$.

b) $\mathbf{p} = -5 + 2x + x^2$ e $\mathbf{q} = 3 + 2x - 4x^2$ com o produto interno usual em $\mathcal{P}_2$.

14. Verifique a condição de ortogonalidade para os seguintes vectores.

a) $U = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $V = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ com o produto interno usual em $\mathcal{M}(2 \times 2, \mathbb{R})$.

a) $U = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ com o produto interno usual em $\mathcal{M}(2 \times 2, \mathbb{R})$.

c) $\mathbf{p} = 1 - x + 2x^2$ e $\mathbf{q} = 2x + x^2$ com o produto interno usual em $\mathcal{P}_2$.

d) $\mathbf{p} = 1 - x + 2x^2$ e $\mathbf{q} = -1 + x - x^2$ com o produto interno usual em $\mathcal{P}_2$.

15. Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 3+2i & 0 \\ -i & 2 \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -i & 2 \\ 0 & i \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} -1-i & 0 & -i \\ 3 & 2i & 5 \end{bmatrix}.$$

Calcule

(a) $A(BC)$ (b) $(BC)A$ (c) $(CA)B^2$ (d) $(1+i)(AB) + (3-4i)A$

16. Verifique que $z\bar{z} = |z|^2$ para os números

(a) $z = 2 - 4i$ (b) $z = -3 + 5i$ (c) $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$

17. Em cada alínea represente o conjunto de pontos no plano complexo que verificam a respectiva condição.

(a) $|z - (1 + i)| = 1$ (b) $|z + i| = |z - i|$ (c) $\text{Im}(\bar{z} + i) = 3$
(d) $|z + i| \leq 1$ (e) $1 < |z| < 2$ (f) $|z| \leq |z + i|$

18. Em cada alínea encontre todas as raízes e represente-as como vectores no plano complexo.

(a) $(-i)^{\frac{1}{2}}$ (b) $(1 + \sqrt{3}i)^{\frac{1}{2}}$ (c) $(i)^{\frac{1}{3}}$ (d) $(-1)^{\frac{1}{4}}$

19. Considere em $\mathbb{C}^2$ o produto interno (produto interno usual em $\mathbb{C}^2$) definido por $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1\bar{v}_1 + u_2\bar{v}_2$, em que $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$. Para os vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ dados calcule $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

(*a*) $\mathbf{u} = (2i, -i)\,, \mathbf{v} = (-i, 3i)$ (*b*) $\mathbf{u} = (0, 0)\,, \mathbf{v} = (1 - i, 7 - 5i)$
(*c*) $\mathbf{u} = (1 + i, 1 - i)\,, \mathbf{v} = (1 - i, 1 + i)$ (*d*) $\mathbf{u} = (3i, -1 + 2i)\,, \mathbf{v} = (3i, -1 + 2i)$

20. Repita o exercício anterior com o poduto interno em $\mathbb{C}^2$ dado por $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1\bar{v}_1 + 2u_2\bar{v}_2$.

21. Utilize os produtos internos dos exercícios 19 e 20 para calcular:

(*a*) $\|\mathbf{w}\|$ com $\mathbf{w} = (1 - i, 1 + i)$. (*b*) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ com $\mathbf{u} = (1 - i, 3 + 2i)$ e $\mathbf{v} = (1 + i, 3)$.

22. Sejam $\mathbf{x} = \left(\frac{i}{\sqrt{5}}, -\frac{i}{\sqrt{5}}\right)$ e $\mathbf{y} = \left(\frac{2i}{\sqrt{30}}, \frac{3i}{\sqrt{30}}\right)$. Mostre que $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ é um conjunto ortonormal quando em $\mathbb{C}^2$ está definido o produto interno do exercício 20, mas não é um conjunto ortonormal em $\mathbb{C}^2$ com o produto interno usual (exercício 19).

23. Encontre k, $l\,m$ que tornam a matriz A numa matriz hermiteana.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & k & -i \\ 3 - 5i & 0 & m \\ l & 2 + 4i & 2 \end{bmatrix}$$

24. Determine entre as matrizes dadas, quais as que são unitárias.

$$\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 + i & 1 + i \\ 1 - i & -1 + i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{i}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-i}{\sqrt{6}} & \frac{i}{\sqrt{3}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{i}{\sqrt{3}} \end{bmatrix},$$

25. Encontre a matriz S unitária, que é diagonalizante relativamente a A, e calcule $S^{-1}AS$.

(*a*) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 - i \\ 1 + i & 5 \end{bmatrix}$ (*b*) $A = \begin{bmatrix} 3 & -i \\ i & 3 \end{bmatrix}$ (*c*) $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 + 2i \\ 2 - 2i & 4 \end{bmatrix}$

(*d*) $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 + i \\ 0 & -1 - i & 0 \end{bmatrix}$ (*e*) $A = \begin{bmatrix} 2 & \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} & 2 & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & 2 \end{bmatrix}$

26. Encontre a matriz S ortogonal, que é diagonalizante relativamente a A, e calcule $S^{-1}AS$.

$(a)\ A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ $(b)\ A = \begin{bmatrix} 6 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 7 \end{bmatrix}$ $(c)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$(d)\ A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ $(e)\ A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

27. Exprima as seguintes formas quadráticas na notação matricial, i.e. $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$, em que A é uma matriz simétrica.

$(a)\ 3x^2 + 7y^2$; $(b)\ 4x^2 - 9y^2 - 6xy$; $(c)\ -7xy$; $(d)\ 9x^2 - y^2 + 4z^2 + 6xy - 8xz + yz$;
$(e)\ xy + xz + yz$; $(f)\ x^2 + y^2 - 2z^2 + 5xy - 8xz$.

28. Classifique as seguintes matrizes como definidas positivas, semidefinidas positivas, definidas negativas, semidefinidas negativas ou indefinidas.

$(a)\ \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $(b)\ \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $(c)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$(d)\ \begin{bmatrix} 6 & 7 & 1 \\ 7 & 9 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $(e)\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $(f)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

29. Diagonalize (no caso de ser necessário) as formas quadráticas dos dois problemas anteriores.