INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

$10^{\mathbf{a}}$ LISTA DE PROBLEMAS DE ÁLGEBRA LINEAR
LEIC
$1^{\mathbf{o}}$ semestre 01/02 - semana de 2001-12-10

1. Seja $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ o produto interno usual em $\mathbb{R}^2$. Para os vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ e para $k = -4$, verifique:

   (a) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ (b) $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$

   (c) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$ (d) $\langle k\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, k\mathbf{v} \rangle$

   (e) $\langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{0} \rangle = 0$

2. Repita o exercício anterior com o poduto interno não usual $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 4u_1v_1 + 5u_2v_2$.

3. Sejam $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$. Mostre que temos um produto interno em $\mathbb{R}^2$ nos seguintes casos:

   (a) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1v_1 + 5u_2v_2$ (b) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 4u_1v_1 + u_2v_1 + u_1v_2 + 4u_2v_2$

4. Sejam $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Identifique os casos em que temos um produto interno definido em $\mathbb{R}^3$. Nos casos que falham, indique as propriedades que não se verificam.

   (a) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + u_3v_3$ (b) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_3^2v_3^2$

   (c) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 4u_3v_3$ (d) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 - u_2v_2 + u_3v_3$

   Resposta: (a) *A expressão não constitui um produto interno (p.i.) porque falha a segunda propriedade da positividade (temos, p.ex.:* $\langle (0,1,0), (0,1,0) \rangle = 0$ *e o vector em causa não é o vector nulo!);* (b) *A expressão não constitui um p.i. porque não se verificam nem a linearidade, nem a homogeneidade;*(c) *A expressão é um p.i. não-usual (pesado);* (d) *A expressão não constitui um p.i. porque falha a primeira propriedade da positividade (temos, p.ex.:* $\langle (0,1,0), (0,1,0) \rangle = -1$*).*

5. Sejam $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$. Identifique os casos em que temos um produto interno definido em $\mathbb{R}^4$. Nos casos que falham, indique as propriedades que não se verificam.

   (a) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4$ (b) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_3^2v_3^2 + u_4^2v_4^2$

   (c) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 4u_3v_3 + u_4v_4$ (d) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + u_3v_3$

   Resposta: As expressões em (a) *e* (c) *constituem p.i., em* (b) *não temos linearidade, nem homogeneidade e em* (d) *não temos positividade (no sentido da alínea* (a) *do problema anterior).*

6. Utilize os produtos internos dos exercícios 1,2 e 3 para calcular:

   (a) $\|\mathbf{w}\|$ com $\mathbf{w} = (-1, 3)$. (b) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ com $\mathbf{u} = (-1, 3)$ e $\mathbf{v} = (2, 5)$.

   Solução: (a) *com o p.i. usual temos* $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{10}$*, mas com o p.i. do Problema* 2 *temos* $\|\mathbf{w}\| = 7$ *e com o p.i. do Problema* 3.(a) *temos* $\|\mathbf{w}\| = 4\sqrt{3}$

7. Utilize os produtos internos usuais para calcular:

   (a) $\|\mathbf{w}\|$ com $\mathbf{w} = (-1, 3)$. (b) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ com $\mathbf{u} = (1, -2)$ e $\mathbf{v} = (2, 1)$.

   (c) $\|\mathbf{w}\|$ com $\mathbf{w} = (-1, 3, 2)$. (d) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ com $\mathbf{u} = (2, -2, 2)$ e $\mathbf{v} = (0, 4, -2)$.

   (e) $\|\mathbf{w}\|$ com $\mathbf{w} = (3, 4, 0, -2)$. (f) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ com $\mathbf{u} = (0, -2, -1, 1)$ e $\mathbf{v} = (-3, 2, 4, 4)$.

   Solução: (a) $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{10}$; (b) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{10}$; (c) $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{14}$; (d) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2\sqrt{14}$; (e) $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{29}$; (f) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{43}$

8. Seja $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual. Para que valores de k podemos afirmar que $\|k\mathbf{v}\| = 5$ com $\mathbf{v} = (-2, 3, 0, 6)$?

   Solução: $k = \pm\frac{5}{7}$

9. Seja $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Para que valores de k podemos afirmar que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são ortogonais?

   (a) $\mathbf{u} = (2, 1, 3)$, $\mathbf{v} = (1, 7, k)$. (b) $\mathbf{u} = (k, k, 1)$, $\mathbf{v} = (k, 5, 6)$.

   Solução: (a) $k = 3$; (b) $k = -3$ *ou* $k = -2$

10. Seja $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual. Encontre dois vectores com norma igual a um que sejam ortogonais aos seguintes três vectores: $\mathbf{u} = (2, 1, -4, 0)$, $\mathbf{v} = (-1, -1, 2, 2)$ e $\mathbf{w} = (1, 0, -2, 2)$.

    Solução: $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)$, $\left(-\frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{4}{\sqrt{21}}, 0, \frac{1}{\sqrt{21}}\right)$

11. Utilizando o produto interno usual, verifique a desigualdade de Cauchy-Schwarz para os seguintes vectores.

    a) $\mathbf{u} = (-2, 1)$ e $\mathbf{v} = (1, 0)$

    b) $\mathbf{u} = (-3, 1, 0)$ e $\mathbf{v} = (2, -1, 3)$

    c) $\mathbf{u} = (-4, 2, 1)$ e $\mathbf{v} = (8, -4, -2)$

    d) $\mathbf{u} = (0, -2, 2, 1)$ e $\mathbf{v} = (-1, -1, 1, 1)$

12. Quais dos seguintes conjuntos de vectores são ortogonais relativamente ao produto interno usual em $\mathbb{R}^2$?

    (a) $\{(0, 1), (2, 0)\}$ (b) $\{(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\}$ (c) $\{(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\}$
    (d) $\{(0, 0), (0, 1)\}$

    Resposta: Todos excepto o conjunto da alínea (c).

13. Quais dos conjuntos do exercício anterior são ortonormais relativamente ao produto interno usual em $\mathbb{R}^2$?

    Resposta: Só o conjunto da alínea (b) *é ortonormal.*

14. Quais dos seguintes conjuntos de vectores são ortogonais relativamente ao produto interno usual em $\mathbb{R}^3$?

    (a) $\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})\}$ (b) $\{(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}), (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})\}$
    (c) $\{(1, 0, 0), (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (0, 0, 1)\}$ (d) $\{(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)\}$

    Resposta: Os conjuntos das alíneas (b) *e* (d) *são ortogonais.*

15. Converta os seguintes conjuntos de vectores (ortogonais relativamente ao produto interno usual) em conjuntos ortonormais.

    (*a*) $\{(-1,2),(6,3)\}$ (*b*) $\{(1,0,-1),(2,0,2),(0,5,0)\}$
    (*c*) $\{(\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5}),(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0),(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})\}$
    Solução: (*a*) $\{(-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}),(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}})\}$; (*b*) $\{(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}),(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}),(0,1,0)\}$;
    (*c*) $\{(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}),(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0),(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}})\}$

16. Sejam $\mathbf{x}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ e $\mathbf{y}=\left(\frac{2}{\sqrt{30}},\frac{3}{\sqrt{30}}\right)$. Mostre que $\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}$ é um conjunto ortonormal quando em $\mathbb{R}^2$ está definido o produto interno $\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle=3x_1y_1+2x_2y_2$, mas não é um conjunto ortonormal em $\mathbb{R}^2$ com o produto interno usual.

17. Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno usual e seja $B=\{\mathbf{v_1},\mathbf{v_2},\mathbf{v_3}\}$ uma base ortonormal, em que $\mathbf{v_1}=(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})$, $\mathbf{v_2}=(0,1,0)$, $\mathbf{v_3}=(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})$.

    a) Considere os seguintes vectores de coordenadas na base B: $(\mathbf{x})_B=(-1,0,1)$, $(\mathbf{y})_B=(0,0,-2)$, $(\mathbf{z})_B=(-1,-4,1)$. Determine os vectores $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.

    b) Mostre que os os vectores $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ da alínea anterior constituem uma base de $\mathbb{R}^3$.

    c) Para os vectores $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ da alínea anterior, calcule $\|\mathbf{y}\|$, $d(\mathbf{x},\mathbf{z})$ e $\langle\mathbf{z},\mathbf{y}\rangle$.

    Solução: (*a*) $\mathbf{x}=(\sqrt{2},0,0),\mathbf{y}=(-\sqrt{2},0,-\sqrt{2}),\mathbf{z}=(\sqrt{2},-4,0)$; (*c*) $\|\mathbf{y}\|=2$; $d(\mathbf{x},\mathbf{z})=4$; $\langle\mathbf{z},\mathbf{y}\rangle=-2$

18. Considere em $\mathbb{R}^4$ o produto interno usual e seja $B=\{\mathbf{v_1},\mathbf{v_2},\mathbf{v_3},\mathbf{v_4}\}$ uma base ortogonal, em que $\mathbf{v_1}=(1,-2,3,-4)$, $\mathbf{v_2}=(2,1,-4,-3)$, $\mathbf{v_3}=(-3,4,1,-2)$ e $\mathbf{v_4}=(4,3,2,1)$.

    a) Considere os seguintes vectores de coordenadas na base B: $(\mathbf{x})_B=(-1,2,1,3)$, $(\mathbf{y})_B=(0,-3,1,5)$, $(\mathbf{z})_B=(-2,-4,3,1)$. Determine os vectores $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.

    b) Para os vectores $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ da alínea anterior, calcule $\|\mathbf{x}\|$, $d(\mathbf{x},\mathbf{y})$ e $\langle\mathbf{z},\mathbf{y}\rangle$.

    Solução: (*c*) $\|\mathbf{x}\|=\sqrt{15}$; $d(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sqrt{30}$; $\langle\mathbf{z},\mathbf{y}\rangle=20$

19. Seja $\mathbb{R}^2$ com o produto interno usual. Utilize o algoritmo de Gram-Schmidt e a normalização para transformar $\{\mathbf{u_1},\mathbf{u_2}\}$ numa base ortonormal.

    (*a*) $\mathbf{u_1}=(1,-3),\mathbf{u_2}=(2,2)$ (*b*) $\mathbf{u_1}=(1,0),\mathbf{u_2}=(3,-5)$
    Solução: (*a*) $\{(\frac{1}{\sqrt{10}},-\frac{3}{\sqrt{10}}),(\frac{6}{\sqrt{37}},\frac{2}{\sqrt{37}})\}$; (*b*) $\{(1,0),(0,-1)\}$

20. Seja $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Utilize o algoritmo de Gram-Schmidt e a normalização para transformar $\{\mathbf{u_1},\mathbf{u_2},\mathbf{u_3}\}$ numa base ortonormal.

    (*a*) $\mathbf{u_1}=(1,1,1),\mathbf{u_2}=(-1,1,0),\mathbf{u_3}=(1,2,1)$ (*b*) $\mathbf{u_1}=(1,0,0),\mathbf{u_2}=(3,7,-2),\mathbf{u_3}=(0,4,1)$
    Solução: (*a*) $\{(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}),(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0),(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}})\}$

21. Seja $\mathbb{R}^3$ com o produto interno $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle=u_1v_1+2u_2v_2+3u_3v_3$. Utilize o algoritmo de Gram-Schmidt e a normalização para transformar $\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ numa base ortonormal.

    Solução: $\{(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}),(\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}}),(\frac{1}{6\sqrt{3}},\frac{-5}{6\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}})\}$

22. Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores $\mathbf{u_1} = (0,1,0)$ e $\mathbf{u_2} = (\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5})$ Exprima $\mathbf{w} = (1,2,3)$ na forma $\mathbf{w} = \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}$, em que $\mathbf{w_1} \in W$ e $\mathbf{w_2} \in W^{\perp}$.

Solução: $(1,2,3) = (-\frac{4}{5}, 2, \frac{3}{5}) + (\frac{9}{5}, 0, \frac{12}{5})$

23. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

(a) Encontre bases para os subespaços gerados pelas linhas da matriz, pelas colunas da matriz e para o espaço nulo (ou núcleo) da matriz A.

(b) Verifique que qualquer vector do espaço gerado pelas linhas de A é ortogonal a qualquer vector do espaço nulo da matriz A.

(c) Encontre uma base para o espaço nulo da matriz A^T. Verifique que qualquer vector do espaço gerado pelas colunas de A é ortogonal a qualquer vector do espaço nulo da matriz A^T.

Solução: (a) $LinA = \mathcal{L}\{(1,2,-1,2), (0,-1,3,-2)\}$, $ColA = \mathcal{L}\{(1,3,1), (2,5,1)\}$ e $NuclA = \mathcal{L}\{(2,-2,0,1), (-5,3,1,0)\}$; (c) $NuclA^T = \mathcal{L}\{(2,-1,1)\}$

24. Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^2$ dado pela equação $y = 2x$. Determine $W^{\perp}$. Qual a distância do vector $(1,-1)$ aos subespaços W e $W^{\perp}$, respectivamente?

Solução: $W^{\perp} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -\frac{x}{2}\right\}$; $d((1,-1),W) = \frac{3\sqrt{5}}{5}$; $d((1,-1),W^{\perp}) = \frac{\sqrt{5}}{5}$

25. a) Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^3$ dado pela equação $x - 2y - 3z = 0$. Determine $W^{\perp}$. Qual a distância do vector $(1,0,-1)$ aos subespaços W e $W^{\perp}$, respectivamente?

b) Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^3$ dado pelas equações paramétricas $x = 2t$, $y = -t$ e $z = 3t$, sendo $t \in \mathbb{R}$. Determine $W^{\perp}$. Qual a distância do vector $(1,0,-1)$ aos subespaços W e $W^{\perp}$, respectivamente?

Solução: (a) $W^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 0,\ 3x + z = 0\}$; $d((1,0,-1),W) = 2\sqrt{\frac{2}{7}}$; $d((1,0,-1),W^{\perp}) = \sqrt{\frac{6}{7}}$; (b) $W^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : 2x - 5y + 4z = 0\}$; $d((1,0,-1),W) = \frac{\sqrt{67}}{7}$; $d((1,0,-1),W^{\perp}) = \frac{1}{\sqrt{14}}$

26. Determine as equações cartesianas da recta que passa no ponto P e é paralela a $\mathbf{n}$.

(a) $P(3,-1,2)\,, \mathbf{n} = (2,1,3)$ (b) $P(-2,3,-3)\,, \mathbf{n} = (6,-6,-2)$
(c) $P(2,2,6)\,, \mathbf{n} = (0,1,0)$ (d) $P(0,0,0)\,, \mathbf{n} = (1,-2,3)$

Solução: (a) $-2x + 2y = -5$ e $-3x + 2z = -7$; (b) $x + y = 1$ e $x + 3z = -11$; (c) $x = 2$ e $z = 6$; (d) $2x + y = 0$ e $-3y + z = 0$

27. Determine a equação cartesiana do plano que contém o ponto $(1,-1,2)$ e a recta

$$x = t\,,\ y = t + 1\,,\ z = -3 + 2t\,,\ t \in \mathbb{R}.$$

28. Determine a distância do ponto P ao plano:

(a) $P(3,-1,2,1)\,;\ x + 2y - 2z - w = 4$ (b) $P(-1,2,0,1)\,;\ 2x + 3y + w = 1$
(c) $P(2,0,2,0)\,;\ x - y - z + w = 3$

Solução: (a) $d(P, W+(0,1,-1,0)) = 4\sqrt{\frac{2}{5}}$; (b) $d(P, W+(1,0,0,-1)) = 2\sqrt{\frac{2}{7}}$; (c) $d(P, W+(1,-1,-1,0)) = \frac{3}{\sqrt{4}}$