

10^a LISTA DE PROBLEMAS DE ÁLGEBRA LINEAR
LEIC

1^o semestre 01/02 - semana de 2001-12-10

1. Seja $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ o produto interno usual em $\mathbb{R}^2$. Para os vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ e para $k = -4$, verifique:

$$\begin{array}{ll} (a) \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle & (b) \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \\ (c) \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle & (d) \langle k\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, k\mathbf{v} \rangle \\ (e) \langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{0} \rangle = 0 \end{array}$$

2. Repita o exercício anterior com o produto interno não usual $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 4u_1v_1 + 5u_2v_2$.
3. Sejam $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$. Mostre que temos um produto interno em $\mathbb{R}^2$ nos seguintes casos:

$$(a) \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1v_1 + 5u_2v_2 \qquad (b) \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 4u_1v_1 + u_2v_1 + u_1v_2 + 4u_2v_2$$

4. Sejam $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Identifique os casos em que temos um produto interno definido em $\mathbb{R}^3$. Nos casos que falham, indique as propriedades que não se verificam.

$$\begin{array}{ll} (a) \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + u_3v_3 & (b) \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_3^2v_3^2 \\ (c) \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 4u_3v_3 & (d) \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 - u_2v_2 + u_3v_3 \end{array}$$

Resposta: (a) A expressão não constitui um produto interno (p.i.) porque falha a segunda propriedade da positividade (temos, p.ex.: $\langle (0, 1, 0), (0, 1, 0) \rangle = 0$ e o vector em causa não é o vector nulo!); (b) A expressão não constitui um p.i. porque não se verificam nem a linearidade, nem a homogeneidade; (c) A expressão é um p.i. não-usual (pesado); (d) A expressão não constitui um p.i. porque falha a primeira propriedade da positividade (temos, p.ex.: $\langle (0, 1, 0), (0, 1, 0) \rangle = -1$).

5. Sejam $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$. Identifique os casos em que temos um produto interno definido em $\mathbb{R}^4$. Nos casos que falham, indique as propriedades que não se verificam.

$$\begin{array}{ll} (a) \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4 & (b) \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_3^2v_3^2 + u_4^2v_4^2 \\ (c) \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 4u_3v_3 + u_4v_4 & (d) \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + u_3v_3 \end{array}$$

Resposta: As expressões em (a) e (c) constituem p.i., em (b) não temos linearidade, nem homogeneidade e em (d) não temos positividade (no sentido da alínea (a) do problema anterior).

6. Utilize os produtos internos dos exercícios 1, 2 e 3 para calcular:

$$(a) \|\mathbf{w}\| \text{ com } \mathbf{w} = (-1, 3). \qquad (b) d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \text{ com } \mathbf{u} = (-1, 3) \text{ e } \mathbf{v} = (2, 5).$$

Solução: (a) com o p.i. usual temos $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{10}$, mas com o p.i. do Problema 2 temos $\|\mathbf{w}\| = 7$ e com o p.i. do Problema 3.(a) temos $\|\mathbf{w}\| = 4\sqrt{3}$

7. Utilize os produtos internos usuais para calcular:

(a) $\|\mathbf{w}\|$ com $\mathbf{w} = (-1, 3)$. (b) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ com $\mathbf{u} = (1, -2)$ e $\mathbf{v} = (2, 1)$.

(c) $\|\mathbf{w}\|$ com $\mathbf{w} = (-1, 3, 2)$. (d) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ com $\mathbf{u} = (2, -2, 2)$ e $\mathbf{v} = (0, 4, -2)$.

(e) $\|\mathbf{w}\|$ com $\mathbf{w} = (3, 4, 0, -2)$. (f) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ com $\mathbf{u} = (0, -2, -1, 1)$ e $\mathbf{v} = (-3, 2, 4, 4)$.

Solução: (a) $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{10}$; (b) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{10}$; (c) $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{14}$; (d) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2\sqrt{14}$;
(e) $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{29}$; (f) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{43}$

8. Seja $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual. Para que valores de k podemos afirmar que $\|k\mathbf{v}\| = 5$ com $\mathbf{v} = (-2, 3, 0, 6)$?

Solução: $k = \pm \frac{5}{7}$

9. Seja $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Para que valores de k podemos afirmar que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são ortogonais?

(a) $\mathbf{u} = (2, 1, 3)$, $\mathbf{v} = (1, 7, k)$. (b) $\mathbf{u} = (k, k, 1)$, $\mathbf{v} = (k, 5, 6)$.

Solução: (a) $k = 3$; (b) $k = -3$ ou $k = -2$

10. Seja $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual. Encontre dois vectores com norma igual a um que sejam ortogonais aos seguintes três vectores: $\mathbf{u} = (2, 1, -4, 0)$, $\mathbf{v} = (-1, -1, 2, 2)$ e $\mathbf{w} = (1, 0, -2, 2)$.

Solução: $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)$, $\left(-\frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{4}{\sqrt{21}}, 0, \frac{1}{\sqrt{21}}\right)$

11. Utilizando o produto interno usual, verifique a desigualdade de Cauchy-Schwarz para os seguintes vectores.

a) $\mathbf{u} = (-2, 1)$ e $\mathbf{v} = (1, 0)$

b) $\mathbf{u} = (-3, 1, 0)$ e $\mathbf{v} = (2, -1, 3)$

c) $\mathbf{u} = (-4, 2, 1)$ e $\mathbf{v} = (8, -4, -2)$

d) $\mathbf{u} = (0, -2, 2, 1)$ e $\mathbf{v} = (-1, -1, 1, 1)$

12. Quais dos seguintes conjuntos de vectores são ortogonais relativamente ao produto interno usual em $\mathbb{R}^2$?

(a) $\{(0, 1), (2, 0)\}$ (b) $\{(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\}$ (c) $\{(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\}$

(d) $\{(0, 0), (0, 1)\}$

Resposta: Todos excepto o conjunto da alínea (c).

13. Quais dos conjuntos do exercício anterior são ortonormais relativamente ao produto interno usual em $\mathbb{R}^2$?

Resposta: Só o conjunto da alínea (b) é ortonormal.

14. Quais dos seguintes conjuntos de vectores são ortogonais relativamente ao produto interno usual em $\mathbb{R}^3$?

(a) $\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})\}$ (b) $\{(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}), (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})\}$

(c) $\{(1, 0, 0), (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (0, 0, 1)\}$ (d) $\{(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)\}$

Resposta: Os conjuntos das alíneas (b) e (d) são ortogonais.

15. Converta os seguintes conjuntos de vectores (ortogonais relativamente ao produto interno usual) em conjuntos ortonormais.

$$(a) \{(-1, 2), (6, 3)\} \quad (b) \{(1, 0, -1), (2, 0, 2), (0, 5, 0)\}$$

$$(c) \{(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})\}$$

$$\text{Solução: } (a) \{(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}), (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})\}; (b) \{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), (0, 1, 0)\};$$

$$(c) \{(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})\}$$

16. Sejam $\mathbf{x} = (\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$ e $\mathbf{y} = (\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{3}{\sqrt{30}})$. Mostre que $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ é um conjunto ortonormal quando em $\mathbb{R}^2$ está definido o produto interno $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 3x_1y_1 + 2x_2y_2$, mas não é um conjunto ortonormal em $\mathbb{R}^2$ com o produto interno usual.

17. Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno usual e seja $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ uma base ortonormal, em que $\mathbf{v}_1 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

a) Considere os seguintes vectores de coordenadas na base B : $(\mathbf{x})_B = (-1, 0, 1)$, $(\mathbf{y})_B = (0, 0, -2)$, $(\mathbf{z})_B = (-1, -4, 1)$. Determine os vectores $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.

b) Mostre que os os vectores $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ da alínea anterior constituem uma base de $\mathbb{R}^3$.

c) Para os vectores $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ da alínea anterior, calcule $\|\mathbf{y}\|$, $d(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ e $\langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle$.

$$\text{Solução: } (a) \mathbf{x} = (\sqrt{2}, 0, 0), \mathbf{y} = (-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}), \mathbf{z} = (\sqrt{2}, -4, 0); (c) \|\mathbf{y}\| = 2; d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 4; \langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle = -2$$

18. Considere em $\mathbb{R}^4$ o produto interno usual e seja $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ uma base ortogonal, em que $\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3, -4)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 1, -4, -3)$, $\mathbf{v}_3 = (-3, 4, 1, -2)$ e $\mathbf{v}_4 = (4, 3, 2, 1)$.

a) Considere os seguintes vectores de coordenadas na base B : $(\mathbf{x})_B = (-1, 2, 1, 3)$, $(\mathbf{y})_B = (0, -3, 1, 5)$, $(\mathbf{z})_B = (-2, -4, 3, 1)$. Determine os vectores $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.

b) Para os vectores $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ da alínea anterior, calcule $\|\mathbf{x}\|$, $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ e $\langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle$.

$$\text{Solução: } (c) \|\mathbf{x}\| = \sqrt{15}; d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{30}; \langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle = 20$$

19. Seja $\mathbb{R}^2$ com o produto interno usual. Utilize o algoritmo de Gram-Schmidt e a normalização para transformar $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ numa base ortonormal.

$$(a) \mathbf{u}_1 = (1, -3), \mathbf{u}_2 = (2, 2) \quad (b) \mathbf{u}_1 = (1, 0), \mathbf{u}_2 = (3, -5)$$

$$\text{Solução: } (a) \{(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}), (\frac{6}{\sqrt{37}}, \frac{2}{\sqrt{37}})\}; (b) \{(1, 0), (0, -1)\}$$

20. Seja $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Utilize o algoritmo de Gram-Schmidt e a normalização para transformar $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ numa base ortonormal.

$$(a) \mathbf{u}_1 = (1, 1, 1), \mathbf{u}_2 = (-1, 1, 0), \mathbf{u}_3 = (1, 2, 1) \quad (b) \mathbf{u}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{u}_2 = (3, 7, -2), \mathbf{u}_3 = (0, 4, 1)$$

$$\text{Solução: } (a) \{(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})\}$$

21. Seja $\mathbb{R}^3$ com o produto interno $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3$. Utilize o algoritmo de Gram-Schmidt e a normalização para transformar $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ numa base ortonormal.

$$\text{Solução: } \{(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}), (\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}), (\frac{1}{6\sqrt{3}}, \frac{-5}{6\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}})\}$$

22. Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores $\mathbf{u}_1 = (0, 1, 0)$ e $\mathbf{u}_2 = (\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5})$. Exprima $\mathbf{w} = (1, 2, 3)$ na forma $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, em que $\mathbf{w}_1 \in W$ e $\mathbf{w}_2 \in W^\perp$.

Solução: $(1, 2, 3) = (-\frac{4}{5}, 2, \frac{3}{5}) + (\frac{9}{5}, 0, \frac{12}{5})$

23. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

- (a) Encontre bases para os subespaços gerados pelas linhas da matriz, pelas colunas da matriz e para o espaço nulo (ou núcleo) da matriz A .
 (b) Verifique que qualquer vector do espaço gerado pelas linhas de A é ortogonal a qualquer vector do espaço nulo da matriz A .
 (c) Encontre uma base para o espaço nulo da matriz A^T . Verifique que qualquer vector do espaço gerado pelas colunas de A é ortogonal a qualquer vector do espaço nulo da matriz A^T .

Solução: (a) $\text{Lin}A = \mathcal{L}\{(1, 2, -1, 2), (0, -1, 3, -2)\}$, $\text{Col}A = \mathcal{L}\{(1, 3, 1), (2, 5, 1)\}$ e $\text{Nucl}A = \mathcal{L}\{(2, -2, 0, 1), (-5, 3, 1, 0)\}$; (c) $\text{Nucl}A^T = \mathcal{L}\{(2, -1, 1)\}$

24. Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^2$ dado pela equação $y = 2x$. Determine $W^\perp$. Qual a distância do vector $(1, -1)$ aos subespaços W e $W^\perp$, respectivamente?

Solução: $W^\perp = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -\frac{x}{2}\}$; $d((1, -1), W) = \frac{3\sqrt{5}}{5}$; $d((1, -1), W^\perp) = \frac{\sqrt{5}}{5}$

25. a) Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^3$ dado pela equação $x - 2y - 3z = 0$. Determine $W^\perp$. Qual a distância do vector $(1, 0, -1)$ aos subespaços W e $W^\perp$, respectivamente?
 b) Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^3$ dado pelas equações paramétricas $x = 2t$, $y = -t$ e $z = 3t$, sendo $t \in \mathbb{R}$. Determine $W^\perp$. Qual a distância do vector $(1, 0, -1)$ aos subespaços W e $W^\perp$, respectivamente?

Solução: (a) $W^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y = 0, 3x + z = 0\}$; $d((1, 0, -1), W) = 2\sqrt{\frac{2}{7}}$; $d((1, 0, -1), W^\perp) = \sqrt{\frac{6}{7}}$; (b) $W^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - 5y + 4z = 0\}$; $d((1, 0, -1), W) = \frac{\sqrt{67}}{7}$; $d((1, 0, -1), W^\perp) = \frac{1}{\sqrt{14}}$

26. Determine as equações cartesianas da recta que passa no ponto P e é paralela a $\mathbf{n}$.

(a) $P(3, -1, 2)$, $\mathbf{n} = (2, 1, 3)$

(b) $P(-2, 3, -3)$, $\mathbf{n} = (6, -6, -2)$

(c) $P(2, 2, 6)$, $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$

(d) $P(0, 0, 0)$, $\mathbf{n} = (1, -2, 3)$

Solução: (a) $-2x + 2y = -5$ e $-3x + 2z = -7$; (b) $x + y = 1$ e $x + 3z = -11$;
 (c) $x = 2$ e $z = 6$; (d) $2x + y = 0$ e $-3y + z = 0$

27. Determine a equação cartesiana do plano que contém o ponto $(1, -1, 2)$ e a recta

$$x = t, y = t + 1, z = -3 + 2t, t \in \mathbb{R}.$$

28. Determine a distância do ponto P ao plano:

(a) $P(3, -1, 2, 1)$; $x + 2y - 2z - w = 4$

(b) $P(-1, 2, 0, 1)$; $2x + 3y + w = 1$

(c) $P(2, 0, 2, 0)$; $x - y - z + w = 3$

Solução: (a) $d(P, W + (0, 1, -1, 0)) = 4\sqrt{\frac{2}{5}}$; (b) $d(P, W + (1, 0, 0, -1)) = 2\sqrt{\frac{2}{7}}$; (c) $d(P, W + (1, -1, -1, 0)) = \frac{3}{\sqrt{4}}$