INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

1ª LISTA DE PROBLEMAS DE ÁLGEBRA LINEAR
LEIC
1º semestre 2001/02 - semana de 2001-10-01

1. Identifique as equações que são lineares nas respectivas variáveis:

   $(a)\ x_1 + 7^{-\frac{1}{3}}x_2 - \sqrt{5}x_3 = 1$ $\quad$ $(b)\ 5x + xy - z = 0$
   $(c)\ u = -\pi v + \frac{2}{3}w - \sqrt{3}z$ $\quad$ $(d)\ x^{\frac{2}{5}} + 8y - 5z = 7^{\frac{1}{3}}$

   Resposta: as equações das alíneas (a) e (c)

2. Utilizando o Método de Eliminação de Gauss, resolva cada um dos seguintes sistemas de equações lineares homogéneos.

   $(a)\ \begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ 2x + 3y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ $\quad$ $(b)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

   $(c)\ \begin{cases} 2x + 2y + 4z = 0 \\ w - y - 3z = 0 \\ 2w + 3x + y + z = 0 \\ -2w + x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$

   Solução: (a) $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; (b) $x_1 = -\frac{1}{3}s$, $x_2 = -\frac{2}{3}s - t$, $x_3 = s$, $x_4 = t$, $s, t \in \mathbb{R}$; (c) $w = t$, $x = -t$, $y = t$, $t \in \mathbb{R}$, $z = 0$

3. Sem efectuar cálculos, determine quais dos seguintes sistemas de equações lineares homogéneos têm solução não-trivial. Justifique.

   $(a)\ \begin{cases} 2x - 3y + 4z - w = 0 \\ 7x + y - 8z + 9w = 0 \\ 2x + 8y + z - w = 0 \end{cases}$ $\quad$ $(b)\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \end{cases}$

   $(c)\ \begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ y - 8z = 0 \\ 4z = 0 \end{cases}$ $\quad$ $(d)\ \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ 6x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$

   Resposta: os SEL das alíneas (a), (b) e (d)

4. Resolva cada um dos sistemas de equações lineares, utilizando o Método de Eliminação de Gauss.

   $(a)\ \begin{cases} x + y + 2z = 8 \\ -x - 2y + 3z = 1 \\ 3x - 7y + 4z = 10 \end{cases}$ $\quad$ $(b)\ \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases}$

   $(c)\ \begin{cases} -2v + 3w = 1 \\ 3u + 6v - 3w = -2 \\ 6u + 6v + 3w = 5 \end{cases}$ $\quad$ $(d)\ \begin{cases} w + 2x - y = 4 \\ x - y = 3 \\ w + 3x - 2y = 7 \\ 2u + 4v + w + 7x = 7 \end{cases}$

Solução: (a) $x = 3$, $y = 1$, $z = 2$; (b) $x_1 = -\frac{1}{7} - \frac{3}{7}x_3$, $x_2 = \frac{1}{7} - \frac{4}{7}x_3$, $x_3 \in \mathbb{R}$; (c) *Não tem solução*; (d) $u = -6 - 2v - 3y$, $w = -2 - y$, $x = 3 + y$, v, $y \in \mathbb{R}$

5. Faça a discussão de cada um dos seguintes sistemas de equações lineares nas variáveis x, y, z em função dos respectivos parâmetros.

$$(a)\ \begin{cases} \alpha x + \beta z = 2 \\ \alpha x + \alpha y + 4z = 4 \\ \alpha y + 2z = \beta \end{cases}$$

$$(b)\ \begin{cases} -2z = 0 \\ cy + 4z = d \\ 4x + 5y - 2z = -2 \end{cases}$$

$$(c)\ \begin{cases} x + y + z = 4 \\ z = 2 \\ (a^2 - 4)z = a - 2 \end{cases}$$

Resposta: (a) O SEL é possível e determinado sse $\beta \neq 2$ e $\alpha \neq 0$, é impossível sse $\beta \neq 2$ e $\alpha = 0$, é possível e indeterminado sse $\beta = 2\,(\alpha \in \mathbb{R})$;
(b) O SEL é possível e determinado sse $c \neq 0$ e $d \neq 0$, é possível e indeterminado sse $c = 0$ e $d = 0$, é impossível sse $c = 0$ e $d \neq 0$;
(c) O SEL é possível e indeterminado sse $a = 2$ ou $a = -\frac{3}{2}$ e é impossível em todos os outros casos (i.e., se $a \in \mathbb{R}\backslash\{2, -\frac{3}{2}\}$)