

1^a LISTA DE PROBLEMAS DE ÁLGEBRA LINEAR
LEIC

1^o semestre 2001/02 - semana de 2001-10-01

1. Identifique as equações que são lineares nas respectivas variáveis:

$$\begin{array}{ll} (a) \ x_1 + 7^{-\frac{1}{3}}x_2 - \sqrt{5}x_3 = 1 & (b) \ 5x + xy - z = 0 \\ (c) \ u = -\pi v + \frac{2}{3}w - \sqrt{3}z & (d) \ x^{\frac{2}{5}} + 8y - 5z = 7^{\frac{1}{3}} \end{array}$$

Resposta: as equações das alíneas (a) e (c)

2. Utilizando o Método de Eliminação de Gauss, resolva cada um dos seguintes sistemas de equações lineares homogêneos.

$$\begin{array}{ll} (a) \ \begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ 2x + 3y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} & (b) \ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \\ (c) \ \begin{cases} 2x + 2y + 4z = 0 \\ w - y - 3z = 0 \\ 2w + 3x + y + z = 0 \\ -2w + x + 3y - 2z = 0 \end{cases} & \end{array}$$

Solução: (a) $x = 0, y = 0, z = 0$; (b) $x_1 = -\frac{1}{3}s, x_2 = -\frac{2}{3}s - t, x_3 = s, x_4 = t, s, t \in \mathbf{R}$; (c) $w = t, x = -t, y = t, t \in \mathbf{R}, z = 0$

3. Sem efectuar cálculos, determine quais dos seguintes sistemas de equações lineares homogêneos têm solução não-trivial. Justifique.

$$\begin{array}{ll} (a) \ \begin{cases} 2x - 3y + 4z - w = 0 \\ 7x + y - 8z + 9w = 0 \\ 2x + 8y + z - w = 0 \end{cases} & (b) \ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \end{cases} \\ (c) \ \begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ y - 8z = 0 \\ 4z = 0 \end{cases} & (d) \ \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ 6x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases} \end{array}$$

Resposta: os SEL das alíneas (a), (b) e (d)

4. Resolva cada um dos sistemas de equações lineares, utilizando o Método de Eliminação de Gauss.

$$\begin{array}{ll} (a) \ \begin{cases} x + y + 2z = 8 \\ -x - 2y + 3z = 1 \\ 3x - 7y + 4z = 10 \end{cases} & (b) \ \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases} \\ (c) \ \begin{cases} -2v + 3w = 1 \\ 3u + 6v - 3w = -2 \\ 6u + 6v + 3w = 5 \end{cases} & (d) \ \begin{cases} w + 2x - y = 4 \\ x - y = 3 \\ w + 3x - 2y = 7 \\ 2u + 4v + w + 7x = 7 \end{cases} \end{array}$$

Solução: (a) $x = 3, y = 1, z = 2$; (b) $x_1 = -\frac{1}{7} - \frac{3}{7}x_3, x_2 = \frac{1}{7} - \frac{4}{7}x_3, x_3 \in \mathbf{R}$; (c) Não tem solução; (d) $u = -6 - 2v - 3y, w = -2 - y, x = 3 + y, v, y \in \mathbf{R}$

5. Faça a discussão de cada um dos seguintes sistemas de equações lineares nas variáveis x, y, z em função dos respectivos parâmetros.

$$(a) \begin{cases} \alpha x + & \beta z = 2 \\ \alpha x + \alpha y + 4z = 4 \\ & \alpha y + 2z = \beta \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} & - 2z = 0 \\ & cy + 4z = d \\ 4x + 5y - 2z = -2 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x + y + z = 4 \\ & z = 2 \\ & (a^2 - 4)z = a - 2 \end{cases}$$

Resposta: (a) O SEL é possível e determinado sse $\beta \neq 2$ e $\alpha \neq 0$, é impossível sse $\beta \neq 2$ e $\alpha = 0$, é possível e indeterminado sse $\beta = 2 (\alpha \in \mathbf{R})$;
 (b) O SEL é possível e determinado sse $c \neq 0$ e $d \neq 0$, é possível e indeterminado sse $c = 0$ e $d = 0$, é impossível sse $c = 0$ e $d \neq 0$;
 (c) O SEL é possível e indeterminado sse $a = 2$ ou $a = -\frac{3}{2}$ e é impossível em todos os outros casos (i.e., se $a \in \mathbf{R} \setminus \{2, -\frac{3}{2}\}$)