

EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR

1º semestre 2018/2019

Curso: MEEC

16 de Janeiro de 2019

Nome: _____

Número: _____

Curso: _____

Sala: _____

Identifique todas as folhas que anexar

O Exame tem a duração de **3 horas** e consiste de 14 problemas. Os Problemas 1 a 5 e 8 a 12 são de escolha múltipla; cada resposta certa vale 1 valor, cada resposta em branco vale 0, e cada resposta errada vale $-1/3$ da cotação dessa pergunta. Os outros quatro problemas não são de escolha múltipla e a sua cotação figura nas últimas tabelas desta página; Nesses deve justificar as suas respostas e apresentar todos os cálculos que efectuar.

O exame está dividido em duas partes. Pode optar por melhorar a classificação dos dois primeiros testes, nesse caso faz a **Parte 1** (Problemas 1 a 7), ou a do terceiro teste, nesse caso faz a **Parte 2** (Problemas 8 a 14). Se optar por fazer apenas uma das partes (a cotação de cada um dos problemas é a dobrar), deve entregar a prova ao fim de **90 minutos**. Assinale com \times na tabela anexa a sua opção.

Para os problemas de escolha múltipla marque com \times as suas escolhas na tabela anexa.

Prova	
Parte 1 (1ºT+2ºT)	
Parte 2 (3ºT)	
Exame	

	- Parte 1 -					- Parte 2 -				
	1	2	3	4	5	8	9	10	11	12
A)										
B)										
C)										
D)										

Os quadros abaixo destinam-se à correcção da prova. Por favor não escreva nada.

Escolha Múltipla		Parte 1 - Prob. 6 e 7		Parte 2 - Prob. 13 e 14	
Parte 1		Prob. 6 a) 0.7 Val	,	Prob. 13 a) 0.6 Val	,
Nº certas		Prob. 6 b) 0.6 Val	,	Prob. 13 b) 0.6 Val	,
Nº erradas		Prob. 6 c) 0.6 Val	,	Prob. 13 c) 0.7 Val	,
		Prob. 6 d) 0.6 Val	,	Prob. 13 d) 0.6 Val	
Parte 2		Prob. 7 a) 0.6 Val	,	Prob. 14 a) 0.7 Val	,
Nº certas		Prob. 7 b) 0.6 Val	,	Prob. 14 b) 0.6 Val	,
Nº erradas		Prob. 7 c) 0.7 Val	,	Prob. 14 c) 0.6 Val	,
		Prob. 7 d) 0.6 Val	,	Prob. 14 d) 0.6 Val	,
Subtotal	,	Subtotal	,	Subtotal	,

TOTAL	,
--------------	---

PARTE 1

Problema 1 (1 valor) Sejam A, B e C matrizes de $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ tais que

$$ABC = -I, \quad A^3 = I,$$

em que I é a matriz identidade de ordem 3, e considere as seguintes afirmações: I - As matrizes A e C são invertíveis; II - A equação $Au = 0$ tem soluções não nulas; III - A característica de A é igual a 2; IV - As matrizes A^2 e BC são invertíveis. Qual é a lista completa de afirmações verdadeiras:

- A)** I e II; **B)** II e IV; **C)** I e IV; **D)** III e IV.

Problema 2 (1 valor) Considere em \mathbb{R}^3 o sistema de equações lineares

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Designando por \mathcal{S} o subconjunto de \mathbb{R}^3 formado por todas as soluções do sistema anterior, qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- A)** \mathcal{S} é o conjunto vazio; **B)** \mathcal{S} é um conjunto singular; **C)** \mathcal{S} é uma recta; **D)** \mathcal{S} é um plano.

Problema 3 (1 valor) Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Qual é o valor do determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 + \alpha & 2 + 2\alpha & -1 + \alpha \\ 1 & 3 & 1 + \alpha \end{vmatrix}$?

- A)** 2α , **B)** -2 , **C)** $2\alpha + 1$, **D)** -2α .

Problema 4 (1 valor) Considere o subespaço de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ gerado pelas 4 matrizes seguintes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Qual é a dimensão de S ?

- A)** 1, **B)** 2, **C)** 3, **D)** 4.

Problema 5 (1 valor) Considere em \mathbb{R}^3 a base ordenada $\mathcal{B} = ((1, 3, 0), (3, 5, -1), (0, 1, 1))$. Sendo $x = (-2, 5, 5)$, qual é a representação deste vector na base \mathcal{B} : $x = (x_1, x_2, x_3)_{\mathcal{B}}$?

- A)** $(-5, 2, 8)_{\mathcal{B}}$ **B)** $(4, -2, 3)_{\mathcal{B}}$ **C)** $(3, 2, -3)_{\mathcal{B}}$ **D)** $(-2, 1, -3)_{\mathcal{B}}$

Nesta parte justifique todas as respostas e apresente os cálculos que efectuar.

Problema 6 (2,5 valores) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & -2a \\ 1 & -b & b(b+2) \end{bmatrix}$.

- (a) Calcule a característica e o determinante de A , em função dos parâmetros a e b ;
(b) Indique um par (a, b) tal que o sistema $Au = v$ é possível e determinado, independentemente de $v \in \mathbb{R}^3$.
(c) Tomando $a = b = 1$ resolva a equação $Au = v$ com $v = (1, 1, 0)$. Mostre que todas as soluções pertencem ao plano $x + y - z = 2$.
(d) Tomando $a = 1$ e $b = 2$, mostre que a colunas de A constituem uma base de \mathbb{R}^3 e represente o vector $u = (1, 1, 1)$ nessa base.

Nesta parte justifique todas as respostas e apresente os cálculos que efectuar.

Problema 7 (2,5 valores) Considere a transformação $T \in L(\mathbb{R}^{2 \times 2}, \mathcal{P}_2)$ definida por:

$$T(E_{11}) = 3 + t + 4t^2; \quad T(E_{12}) = -t - t^2; \quad T(E_{21}) = 1 + t^2; \quad T(E_{22}) = -3 - 2t - 5t^2, \quad t \in \mathbb{R},$$

onde $B_c(\mathbb{R}^{2 \times 2}) = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ é a base canónica de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

a) Qual a matriz que representa T em relação às bases canónicas de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ e de \mathcal{P}_2 ;

b) Determine bases para o núcleo de T e para a imagem de T .

c) Como se representa T em relação às bases: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ e $\{1 + t^2, t + t^2, t\}$ de \mathcal{P}_2 ? Resolva a equação linear $T(M) = w$, em que $w(t) = 1 - t, t \in \mathbb{R}$.

d) Sendo V um espaço linear, uma transformação $Q \in L(V)$ tal que $Q^2 = Q$ designa-se por projecção. Mostre que se $S \in L(V)$ é tal que $S^2 = I$, então as transformações definidas por $P_+ = (I + S)/2$ e $P_- = (I - S)/2$ são projecções. O que pode afirmar acerca das igualdades: (A) $P_+ + P_- = I + P_+P_-$, (B) $P_+P_- = P_-P_+ = 0$?

PARTE 2

Problema 8 (1 valor) Seja \mathcal{P}_3 o espaço linear real dos polinómios de grau menor ou igual a 3 em considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_3$ definida por $Tp = q$, em que para $p(t) = a + bt + ct^2 + dt^3, t \in \mathbb{R}$ se tem $q(t) = (a - b) + (b - c)t + (c - d)t^2 + (d + a)t^3, t \in \mathbb{R}$.

A) T é injectiva mas não sobrejectiva **B)** T não é injectiva nem sobrejectiva

C) T é injectiva e sobrejectiva **D)** T não é injectiva mas é sobrejectiva.

.....
Problema 9 (1 valor) Considere em \mathbb{R}^3 o produto interno usual e o subespaço $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 4y - 3z = 0\}$. Qual dos seguintes conjuntos é uma base ortogonal de S ?

A) $\{(-1, 1, 1), (1, 4, -3)\}$, **B)** $\{(1, -1, -1), (7, 2, 5)\}$,

C) $\{(-1, -1, 1), (7, 2, 5)\}$, **D)** $\{(1, 1, -1), (2, 5, 7)\}$.

.....
Problema 10 (1 valor) Das matrizes a seguir indicadas escolha um par tal que o primeiro elemento do par é “invertível mas não diagonalizável” e o segundo é “diagonalizável mas não invertível”:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Qual é a escolha certa? **A)** (B, A) ; **B)** (C, B) ; **C)** (B, C) ; **D)** (C, D) .

.....
Problema 11 (1 valor) Sendo $x, y \in \mathbb{R}^2$ defina-se $\langle x, y \rangle = x^t Ay$, em que x e y estão representados como vectores coluna. Tomando para A uma das matrizes seguintes, apenas num caso a função anterior é um produto interno; Qual é?

A) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$; **B)** $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$; **C)** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; **D)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

.....
Problema 12 (1 valor) Seja $A \in \mathbb{R}^3$ uma matriz que tem $\{1, -3\}$ como conjunto de valores próprios distintos, sendo os correspondentes espaços próprios: $E(-3) = L(\{(1, 1, 1)\})$ e $E(1) = L(\{(1, 0, 0), (1, -1, 0)\})$. Qual é o polinómio característico de A ?

A) $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 15\lambda - 9$, **B)** $-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 15\lambda + 9$, **C)** $-\lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda + 3$, **D)** $-\lambda^3 - 5\lambda^2 - 3\lambda + 9$.

Nesta parte justifique todas as respostas e apresente os cálculos que efectuar.

Problema 13 (2,5 valores) Considere em \mathbb{R}^3 o produto interno usual e sejam $v_1 = (1, 1, -1)$, $v_2 = (1, 3, 1)$ e $v_3 = (1, 7, 5)$.

- a) Indique uma base ortogonal para o subespaço de \mathbb{R}^3 gerado pelos vectores v_1, v_2 e v_3 .
- b) Indique uma base ortogonal de \mathbb{R}^3 que contém o vector v_1 .
- c) Determine uma equação cartesiana para o plano $P = \{v_3\} + L(\{v_1, v_2\})$. Qual a distância da origem (o ponto $(0,0,0)$) ao plano P ?
- d) Mostre que em qualquer espaço euclideo V é válida a desigualdade:

$$|\langle x + u, y + z \rangle| \leq (||x|| + ||u||)(||y|| + ||z||), \quad \forall x, y, z, u \in V.$$

Nesta parte justifique todas as respostas e apresente os cálculos que efectuar.

Problema 14 (2,5 valores) Seja μ um número real e

$$A_\mu = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 - \mu \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 + \mu & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- a) Determine, em função de μ , os valores próprios de A_μ .
 - b) Identifique o conjunto \mathcal{E} formado pelos valores de μ para os quais A_μ é diagonalizável como matriz real, i.e. existem uma matriz diagonal Λ_μ e uma matriz C_μ , ambas reais, tais que $A_\mu = C_\mu \Lambda_\mu C_\mu^{-1}$.
 - c) Verifique que $\mu = 0$ pertence a \mathcal{E} e indique um par de matrizes Λ_0 e C_0 nas condições da alínea anterior.
 - d) Seja Q_μ a forma quadrática associada com a matriz A_μ . Designando por B_μ a parte simétrica da matriz A_μ , verifique que $B_\mu = A_0$, para qualquer valor de μ real. Use este resultado para mostrar que a forma quadrática Q_μ é definida positiva para qualquer $\mu \in \mathbb{R}$.
-

