Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Versão A141
rubrica do aluno:

EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR

1º semestre 2018/2019

Curso: MEEC
16 de Janeiro de 2019

Nome:____
Número:____________
Curso:____________
Sala:____________

Identifique todas as folhas que anexar

O Exame tem a duração de **3 horas** e consiste de 14 problemas. Os Problemas 1 a 5 e 8 a 12 são de escolha múltipla; cada resposta certa vale 1 valor, cada resposta em branco vale 0, e cada resposta errada vale -1/3 da cotação dessa pergunta. Os outros quatro problemas não são de escolha múltipla e a sua cotação figura nas últimas tabelas desta página; Nesses deve justificar as suas respostas e apresentar todos os cálculos que efectuar.

O exame está dividido em duas partes. Pode optar por melhorar a classificação dos dois primeiros testes, nesse caso faz a **Parte 1** (Problemas 1 a 7), ou a do terceiro teste, nesse caso faz a **Parte 2** (Problemas 8 a 14). Se optar por fazer apenas uma das partes (a cotação de cada um dos problemas é a dobrar), deve entregar a prova ao fim de **90 minutos**. Assinale com $\times$ na tabela anexa a sua opção.

Para os problemas de escolha múltipla marque com $\times$ as suas escolhas na tabela anexa.

Prova	
Parte 1 (1°T+2°T)	
Parte 2 (3°T)	
Exame	

	- Parte 1 -					**- Parte 2 -**				
	1	2	3	4	5	8	9	10	11	12
A)										
B)										
C)										
D)										

Os quadros abaixo destinam-se à correcção da prova. Por favor não escreva nada.

Escolha Múltipla	
Parte 1	
N° certas	
N° erradas	
Parte 2	
N° certas	
N° erradas	
Subtotal	,

Parte 1 - Prob. 6 e 7		
Prob. 6 a)	0.7 Val	,
Prob. 6 b)	0.6 Val	,
Prob. 6 c)	0.6 Val	,
Prob. 6 d)	0.6 Val	,
Prob. 7 a)	0.6 Val	,
Prob. 7 b)	0.6 Val	,
Prob. 7 c)	0.7 Val	,
Prob. 7 d)	0.6 Val	,
Subtotal		,

Parte 2 - Prob. 13 e 14		
Prob. 13 a)	0.6 Val	,
Prob. 13 b)	0.6 Val	,
Prob. 13 c)	0.7 Val	,
Prob. 13 d)	0.6 Val	
Prob. 14 a)	0.7 Val	,
Prob. 14 b)	0.6 Val	,
Prob. 14 c)	0.6 Val	,
Prob. 14 d)	0.6 Val	,
Subtotal		,

TOTAL	,

PARTE 1

Problema 1 (1 valor) Sejam A, B e C matrizes de $\mathbb{R}^{3\times 3}$ tais que

$$ABC = -I, \quad A^3 = I,$$

em que I é a matriz identidade de ordem 3, e considere as seguintes afirmações: I - A equação $Au = 0$ tem soluções não nulas; II - A característica de A é igual a 2; III - As matrizes A e C são invertíveis; IV - As matrizes A^2 e BC são invertíveis. Qual é a lista completa de afirmações verdadeiras:

A) I e II; **B)** II e IV; **C)** I e III; **D)** III e IV.

....

Problema 2 (1 valor) Considere em $\mathbb{R}^3$ o sistema de equações lineares

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Designando por $\mathcal{S}$ o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ formado por todas as soluções do sistema anterior, qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A) $\mathcal{S}$ é o conjunto vazio; **B)** $\mathcal{S}$ é um conjunto singular; **C)** $\mathcal{S}$ é uma recta; **D)** $\mathcal{S}$ é um plano.

....

Problema 3 (1 valor) Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Qual é o valor do determinante: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1+\alpha & -1+\alpha & 1+\alpha \\ 1 & 1+\alpha & 2 \end{vmatrix}$?

A) 2α, **B)** -2α, **C)** $2\alpha + 1$, **D)** -2.

....

Problema 4 (1 valor) Considere o subespaço de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ gerado pelas 4 matrizes seguintes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Qual é a dimensão de S?

A)1, **B)** 2, **C)** 3, **D)** 4.

....

Problema 5 (1 valor) Considere em $\mathbb{R}^3$ a base ordenada $\mathcal{B} = ((1,-1,0),(1,2,-1),(0,1,1))$. Sendo $x = (5,4,1)$, qual é a representação deste vector na base $\mathcal{B}$: $x = (x_1, x_2, x_3)_{\mathcal{B}}$?

A) $(-3,2,4)_{\mathcal{B}}$ **B)** $(3,2,3)_{\mathcal{B}}$ **C)** $(4,-2,3)_{\mathcal{B}}$ **D)** $(4,-3,-1)_{\mathcal{B}}$

....

Nesta parte justifique todas as respostas e apresente os cálculos que efectuar.

Problema 6 (2,5 valores) Sejam $\mu, \eta \in \mathbb{R}$ e considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & \mu+1 & 2 \\ -1 & -\mu & \eta^2 - 2 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule a característica e o determinante de A, em função dos parâmetros μ e η;

(b) Indique um par (μ, η) tal que o sistema $Au = v$ é possível e determinado, independentemente de $v \in \mathbb{R}^3$.

(c) Tomando $\mu = 2, \eta = 1$ resolva a equação $Au = v$ com $v = (1,2,-1)$. Mostre que todas as soluções pertencem ao plano $x + y + z = 1$

(d) Tomando $\mu = 2$ e $\eta = 0$, mostre que a colunas de A constituem uma base de $\mathbb{R}^3$ e represente o vector $u = (1,1,1)$ nessa base.

....

Nesta parte justifique todas as respostas e apresente os cálculos que efectuar.

Problema 7 (2,5 valores) Considere a transformação $T \in L(\mathbb{R}^{2\times 2}, \mathcal{P}_2)$ definida por:

$T(E_{11}) = 3 + t + 2\,t^2$; $\quad T(E_{12}) = -t + t^2$; $\quad T(E_{21}) = 1 + t^2$; $\quad T(E_{22}) = -3 - 2\,t - t^2$, $\quad t \in \mathbb{R}$,

onde $B_c(\mathbb{R}^{2\times 2}) = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ é a base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

a) Qual a matriz que repressenta T em relação às bases canónicas de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ e de $\mathcal{P}_2$?;
b) Determine bases para o núcleo de T e para a imagem de T.
c) Como se representa T em relação às bases: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ e $\{1+t^2, 1+t, t^2\}$ de $\mathcal{P}_2$? Resolva a equação linear $T(M) = w$, em que $w(t) = 1+t, t \in \mathbb{R}$.
d) Sendo V um espaço linear, uma transformação $Q \in L(V)$ tal que $Q^2 = Q$ designa-se por projecção. Mostre que se $S \in L(V)$ é tal que $S^2 = I$, então as transformações definidas por $P_+ = (I+S)/2$ e $P_- = (I-S)/2$ são projecções. O que pode afirmar acerca das igualdades: (A) $P_+ + P_- = I + P_+P_-$, (B) $P_+P_- = P_-P_+ = 0$?

PARTE 2

Problema 8 (1 valor) Seja $\mathcal{P}_3$ o espaço linear real dos polinómios de grau menor ou igual a 3 em considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ definida por $Tp = q$, em que para $p(t) = a + bt + ct^2 + dt^3, t \in \mathbb{R}$ se tem $q(t) = (a-b) + (b+c)t + (c-d)t^2 + (d-a)t^3, t \in \mathbb{R}$.

A) T é injectiva e sobrejectiva **B)** T é injectiva mas não sobrejectiva
C) T não é injectiva mas é sobrejectiva **D)** T não é injectiva nem sobrejectiva.

....

Problema 9 (1 valor) Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno usual e o subespaço $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 3y + 2z = 0\})$. Qual dos seguintes conjuntos é uma base ortogonal de S?

A) $\{(1,-1,1), (1,3,2)\}$, **B)** $\{(5,-1,-1), (-1,3,2)\}$,
C) $\{(5,1,-4), (1,-1,1)\}$, **D)** $\{(-5,4,1), (1,-1,1)\}$.

....

Problema 10 (1 valor) Das matrizes a seguir indicadas escolha um par tal que o primeiro elemento do par é "diagonalizável mas não invertível" e o segundo é "invertível mas não diagonalizável":

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Qual é a escolha certa? **A)** (B,A); **B)** (B,C); **C)** (C,A); **D)** (D,C).

....

Problema 11 (1 valor) Sendo $x, y \in \mathbb{R}^2$ defina-se $\langle x, y \rangle = x^t A y$, em que x e y estão representados como vectores coluna. Tomando para A uma das matrizes seguintes, apenas num caso a função anterior é um produto interno; Qual é?

A) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$; **B)** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; **C)** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; **D)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

....

Problema 12 (1 valor) Seja $A \in \mathbb{R}^3$ uma matriz que tem $\{1,2\}$ como conjunto de valores próprios distintos, sendo os correspondentes espaços próprios: $E(1) = L(\{(1,1,1)\}$ e $E(2) = L(\{(1,0,0), (1,-1,0)\})$. Qual é o polinómio característico de A?

A) $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 8\lambda - 3$, **B)** $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 15\lambda + 9$, **C)** $-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4$, **D)** $-\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4$.

....

Nesta parte justifique todas as respostas e apresente os cálculos que efectuar.

Problema 13 (2,5 valores) Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno usual e sejam $v_1 = (-1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 2, 1)$ e $v_3 = (1, 5, 8)$.
a) Indique uma base ortogonal para o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores v_1, v_2 e v_3.
b) Indique uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que contém o vector v_1.
c) Determine uma equação cartesiana para o plano $P = \{v_3\} + L(\{v_1, v_2\})$. Qual a distância da origem (o ponto (0,0,0)) ao plano P?
d) Mostre que em qualquer espaço euclideano V é válida a desigualdade:

$$|\langle x + u, y + z\rangle| \leq (||x|| + ||u||)(||y|| + ||z||), \quad \forall x, y, z, u \in V.$$

. . . .

Nesta parte justifique todas as respostas e apresente os cálculos que efectuar.

Problema 14 (2,5 valores) Seja ε um número real e

$$A_\varepsilon = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1-\varepsilon \\ 0 & 1+\varepsilon & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Determine, em função de ε, os valores próprios de A_ε.
b) Identifique o conjunto $\mathcal{E}$ formado pelos valores de ε para os quais A_ε é diagonalizável como matriz real, i.e. existem uma matriz diagonal Λ_ε e uma matriz C_ε, ambas reais, tais que $A_\varepsilon = C_\varepsilon \Lambda_\varepsilon {C_\varepsilon}^{-1}$.
c) Verifique que $\varepsilon = 0$ pertence a $\mathcal{E}$ e indique um par de matrizes Λ_0 e C_0 nas condições da alínea anterior. d) Seja Q_ε a forma quadrática associada com a matriz A_ε. Designando por B_ε a parte simétrica da matriz A_ε, verifique que $B_\varepsilon = A_0$, para qualquer valor de ε real. Use este resultado para mostrar que a forma quadrática Q_ε é definida positiva para qualquer $\varepsilon \in \mathbb{R}$.
