

**EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR**

1º semestre 2018/2019

Curso: MEEC

16 de Janeiro de 2019

Nome: \_\_\_\_\_

Número: \_\_\_\_\_

Curso: \_\_\_\_\_

Sala: \_\_\_\_\_

**Identifique todas as folhas que anexar**

O Exame tem a duração de **3 horas** e consiste de 14 problemas. Os Problemas 1 a 5 e 8 a 12 são de escolha múltipla; cada resposta certa vale 1 valor, cada resposta em branco vale 0, e cada resposta errada vale  $-1/3$  da cotação dessa pergunta. Os outros quatro problemas não são de escolha múltipla e a sua cotação figura nas últimas tabelas desta página; Nesses deve justificar as suas respostas e apresentar todos os cálculos que efectuar.

O exame está dividido em duas partes. Pode optar por melhorar a classificação dos dois primeiros testes, nesse caso faz a **Parte 1** (Problemas 1 a 7), ou a do terceiro teste, nesse caso faz a **Parte 2** (Problemas 8 a 14). Se optar por fazer apenas uma das partes (a cotação de cada um dos problemas é a dobrar), deve entregar a prova ao fim de **90 minutos**. Assinale com  $\times$  na tabela anexa a sua opção.

Para os problemas de escolha múltipla marque com  $\times$  as suas escolhas na tabela anexa.

Prova	
Parte 1 (1ºT+2ºT)	
Parte 2 (3ºT)	
Exame	

	- Parte 1 -					- Parte 2 -				
	1	2	3	4	5	8	9	10	11	12
A)										
B)										
C)										
D)										

Os quadros abaixo destinam-se à correcção da prova. Por favor não escreva nada.

Escolha Múltipla		Parte 1 - Prob. 6 e 7		Parte 2 - Prob. 13 e 14	
<b>Parte 1</b>		Prob. 6 a) 0.7 Val	,	Prob. 13 a) 0.6 Val	,
Nº certas		Prob. 6 b) 0.6 Val	,	Prob. 13 b) 0.6 Val	,
Nº erradas		Prob. 6 c) 0.6 Val	,	Prob. 13 c) 0.7 Val	,
		Prob. 6 d) 0.6 Val	,	Prob. 13 d) 0.6 Val	
<b>Parte 2</b>		Prob. 7 a) 0.6 Val	,	Prob. 14 a) 0.7 Val	,
Nº certas		Prob. 7 b) 0.6 Val	,	Prob. 14 b) 0.6 Val	,
Nº erradas		Prob. 7 c) 0.7 Val	,	Prob. 14 c) 0.6 Val	,
		Prob. 7 d) 0.6 Val	,	Prob. 14 d) 0.6 Val	,
<b>Subtotal</b>	,	<b>Subtotal</b>	,	<b>Subtotal</b>	,

<b>TOTAL</b>	,
--------------	---

**PARTE 1**

**Problema 1 (1 valor)** Sejam  $A, B$  e  $C$  matrizes de  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$  tais que

$$ABC = -I, \quad A^3 = I,$$

em que  $I$  é a matriz identidade de ordem 3, e considere as seguintes afirmações: I - A equação  $Au = 0$  tem soluções não nulas; II - A característica de  $A$  é igual a 2; III - As matrizes  $A$  e  $C$  são invertíveis; IV - As matrizes  $A^2$  e  $BC$  são invertíveis. Qual é a lista completa de afirmações verdadeiras:

- A) I e II;    B) III e IV;    C) I e III;    D) II e IV.

**Problema 2 (1 valor)** Considere em  $\mathbb{R}^3$  o sistema de equações lineares

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Designando por  $\mathcal{S}$  o subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  formado por todas as soluções do sistema anterior, qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- A)  $\mathcal{S}$  é o conjunto vazio; B)  $\mathcal{S}$  é um conjunto singular; C)  $\mathcal{S}$  é uma recta; D)  $\mathcal{S}$  é um plano.

**Problema 3 (1 valor)** Seja  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Qual é o valor do determinante:  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 + \alpha & 1 + \alpha & -1 + \alpha \\ 1 & 2 & 1 + \alpha \end{vmatrix}$ ?

- A)  $2\alpha$ ,    B)  $-2\alpha$ ,    C)  $2\alpha + 1$ ,    D)  $-2$ .

**Problema 4 (1 valor)** Considere o subespaço de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  gerado pelas 4 matrizes seguintes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Qual é a dimensão de  $S$ ?

- A) 1,    B) 2,    C) 3,    D) 4.

**Problema 5 (1 valor)** Considere em  $\mathbb{R}^3$  a base ordenada  $\mathcal{B} = ((1, 2, 0), (3, 4, -1), (0, 1, 1))$ . Sendo  $x = (1, 1, 1)$ , qual é a representação deste vector na base  $\mathcal{B}$ :  $x = (x_1, x_2, x_3)_{\mathcal{B}}$ ?

- A)  $(-5, 2, 3)_{\mathcal{B}}$     B)  $(-4, 2, 3)_{\mathcal{B}}$     C)  $(4, -2, 2)_{\mathcal{B}}$     D)  $(-1, 3, -5)_{\mathcal{B}}$

**Nesta parte justifique todas as respostas e apresente os cálculos que efectuar.**

**Problema 6 (2,5 valores)** Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  e considere a matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & -b \\ 1 & -2a & b(b+2) \end{bmatrix}$ .

- (a) Calcule a característica e o determinante de  $A$ , em função dos parâmetros  $a$  e  $b$ ;
- (b) Indique um par  $(a, b)$  tal que o sistema  $Au = v$  é possível e determinado, independentemente de  $v \in \mathbb{R}^3$ .
- (c) Tomando  $a = b = 1$  resolva a equação  $Au = v$  com  $v = (2, -1, 4)$ . Mostre que todas as soluções pertencem ao plano  $x + 2y - z = 0$ .
- (d) Tomando  $a = 1$  e  $b = 2$ , mostre que a colunas de  $A$  constituem uma base de  $\mathbb{R}^3$  e represente o vector  $u = (1, 1, 1)$  nessa base.

**Nesta parte justifique todas as respostas e apresente os cálculos que efectuar.**

**Problema 7 (2,5 valores)** Considere a transformação  $T \in L(\mathbb{R}^{2 \times 2}, \mathcal{P}_2)$  definida por:

$$T(E_{11}) = 3 + t + 4t^2; \quad T(E_{12}) = -t - t^2; \quad T(E_{21}) = 1 + t^2; \quad T(E_{22}) = -3 - 2t - 5t^2, \quad t \in \mathbb{R},$$

onde  $B_c(\mathbb{R}^{2 \times 2}) = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$  é a base canónica de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ .

a) Qual a matriz que representa  $T$  em relação às bases canónicas de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  e de  $\mathcal{P}_2$ ;

b) Determine bases para o núcleo de  $T$  e para a imagem de  $T$ .

c) Como se representa  $T$  em relação às bases:  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$  de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  e  $\{1 + t^2, t + t^2, t\}$  de  $\mathcal{P}_2$ ? Resolva a equação linear  $T(M) = w$ , em que  $w(t) = 1 - t, t \in \mathbb{R}$ .

d) Sendo  $V$  um espaço linear, uma transformação  $Q \in L(V)$  tal que  $Q^2 = Q$  designa-se por projecção. Mostre que se  $S \in L(V)$  é tal que  $S^2 = I$ , então as transformações definidas por  $P_+ = (I + S)/2$  e  $P_- = (I - S)/2$  são projecções. O que pode afirmar acerca das igualdades:

(A)  $P_+ + P_- = I + P_+P_-$ , (B)  $P_+P_- = P_-P_+ = 0$ ?

---

## PARTE 2

---

**Problema 8 (1 valor)** Seja  $\mathcal{P}_3$  o espaço linear real dos polinómios de grau menor ou igual a 3 em considere a transformação linear  $T : \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_3$  definida por  $Tp = q$ , em que para  $p(t) = a + bt + ct^2 + dt^3, t \in \mathbb{R}$  se tem  $q(t) = (a + b) + (b + c)t + (c + d)t^2 + (d + a)t^3, t \in \mathbb{R}$ .

**A)**  $T$  é injectiva e sobrejectiva    **B)**  $T$  é injectiva mas não sobrejectiva

**C)**  $T$  não é injectiva mas é sobrejectiva    **D)**  $T$  não é injectiva nem sobrejectiva.

.....  
**Problema 9 (1 valor)** Considere em  $\mathbb{R}^3$  o produto interno usual e o subespaço  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\}$ . Qual dos seguintes conjuntos é uma base ortogonal de  $S$ ?

**A)**  $\{(1, 1, -1), (1, 2, 3)\}$ ,    **B)**  $\{(5, -1, -1), (-1, 2, 3)\}$ ,

**C)**  $\{(5, -4, 1), (1, 2, 3)\}$ ,    **D)**  $\{(5, -4, 1), (1, 1, -1)\}$ .

.....  
**Problema 10 (1 valor)** Das matrizes seguintes escolha um par tal que o primeiro elemento do par é “invertível mas não diagonalizável” e o segundo é “diagonalizável mas não invertível”:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Qual é a escolha certa? **A)**  $(A, B)$ ;    **B)**  $(A, C)$ ;    **C)**  $(C, B)$ ;    **D)**  $(C, D)$ .

.....  
**Problema 11 (1 valor)** Sendo  $x, y \in \mathbb{R}^2$  defina-se  $\langle x, y \rangle = x^t Ay$ , em que  $x$  e  $y$  estão representados como vectores coluna. Tomando para  $A$  uma das matrizes seguintes, apenas num caso a função anterior é um produto interno; Qual é?

**A)**  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ;    **B)**  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ;    **C)**  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ;    **D)**  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ .

.....  
**Problema 12 (1 valor)** Seja  $A \in \mathbb{R}^3$  uma matriz que tem  $\{1, 3\}$  como conjunto de valores próprios distintos, sendo os correspondentes espaços próprios:  $E(1) = L(\{(1, 1, 1)\})$  e  $E(3) = L(\{(1, 0, 0), (1, -1, 0)\})$ . Qual é o polinómio característico de  $A$ ?

**A)**  $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 15\lambda - 9$ ,    **B)**  $-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 15\lambda + 9$ ,    **C)**  $-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 7\lambda + 3$ ,    **D)**  $-\lambda^3 - 5\lambda^2 + 7\lambda - 3$ .

Nesta parte justifique todas as respostas e apresente os cálculos que efectuar.

**Problema 13 (2,5 valores)** Considere em  $\mathbb{R}^3$  o produto interno usual e sejam  $v_1 = (1, -1, 1)$ ,  $v_2 = (3, 1, 1)$  e  $v_3 = (2, 6, -2)$ .

- a) Indique uma base ortogonal para o subespaço de  $\mathbb{R}^3$  gerado pelos vectores  $v_1, v_2$  e  $v_3$ .
- b) Indique uma base ortogonal de  $\mathbb{R}^3$  que contém o vector  $v_1$ .
- c) Determine uma equação cartesiana para o plano  $P = \{v_3\} + L(\{v_1, v_2\})$ . Qual a distância da origem (o ponto  $(0,0,0)$ ) ao plano  $P$ ?
- d) Mostre que em qualquer espaço euclídeo  $V$  é válida a desigualdade:

$$|\langle x + u, y + z \rangle| \leq (\|x\| + \|u\|)(\|y\| + \|z\|), \quad \forall x, y, z, u \in V.$$

.....

Nesta parte justifique todas as respostas e apresente os cálculos que efectuar.

**Problema 14 (2,5 valores)** Seja  $\varepsilon$  um número real e

$$A_\varepsilon = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 - \varepsilon \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 + \varepsilon & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- a) Determine, em função de  $\varepsilon$ , os valores próprios de  $A_\varepsilon$ .
  - b) Identifique o conjunto  $\mathcal{E}$  formado pelos valores de  $\varepsilon$  para os quais  $A_\varepsilon$  é diagonalizável como matriz real, i.e. existem uma matriz diagonal  $\Lambda_\varepsilon$  e uma matriz  $C_\varepsilon$ , ambas reais, tais que  $A_\varepsilon = C_\varepsilon \Lambda_\varepsilon C_\varepsilon^{-1}$ .
  - c) Verifique que  $\varepsilon = 0$  pertence a  $\mathcal{E}$  e indique um par de matrizes  $\Lambda_0$  e  $C_0$  nas condições da alínea anterior.
  - d) Seja  $Q_\varepsilon$  a forma quadrática associada com a matriz  $A_\varepsilon$ . Designando por  $B_\varepsilon$  a parte simétrica da matriz  $A_\varepsilon$ , verifique que  $B_\varepsilon = A_0$ , para qualquer valor de  $\varepsilon$  real. Use este resultado para mostrar que a forma quadrática  $Q_\varepsilon$  é definida positiva para qualquer  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ .
-



