Exame - Versão A150 - 16/01/2019

Problema 6 (2,5 valores)

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & -b \\ 1 & -2a & b(b+2) \end{bmatrix}$.

(a) Calcule a característica e o determinante de A, em função dos parâmetros a e b;

(b) Indique um par (a, b) tal que o sistema $Au = v$ é possível e determinado, independentemente de $v \in \mathbb{R}^3$.

(c) Tomando $a = b = 1$ resolva a equação $Au = v$ com $v = (2, -1, 4)$. Mostre que todas as soluções pertencem ao plano $x + 2y - z = 0$.

(d) Tomando $a = 1$ e $b = 2$, mostre que a colunas de A constituem uma base de $\mathbb{R}^3$ e represente o vector $u = (1, 1, 1)$ nessa base.

. . . .

Resolução: a) A característica de uma matriz A foi defininda como sendo igual ao número de pivôs da matriz U que se obtém da original por eliminação de Gauss. Por outro lado o determinante de A no se altera pelo método de eliminação de Gauss, excepção feita no caso de haver trocas de linha em número ímpar ao longo da implemetação desse método. Tendo em conta o que se pretende nas alíneas seguintes, implementemos a eliminação de Gauss para a matriz aumentada $[A|c]$ em que $c = (x, y, z)$ é um vector genérico de $\mathbb{R}^3$; obtém-se $[A|c] \mapsto [U|\tilde{c}]$ por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & x \\ 0 & a & -b & \vdots & y \\ 1 & -2a & b(b+2) & \vdots & z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & x \\ 0 & a & -b & \vdots & y \\ 0 & -2a & b(b+2)-1 & \vdots & z-x \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & x \\ 0 & a & -b & \vdots & y \\ 0 & 0 & b^2-1 & \vdots & z-x+2y \end{bmatrix}$$

Daqui se conclui que

$$\operatorname{car} A = \begin{cases} 2 & \text{se } a = 0 \text{ ou } b = \pm 1 \\ 3 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad ; \quad \det A = \det U = a(b^2 - 1).$$

b) Sendo A quadrada, SEL $Au = v$ é possível e determinado se tiver tantos pivôs quantas as colunas, neste caso 3. Assim, pela alínea anterior, o SEL é possível e determinado se $a \neq 0$ e $b \neq \pm 1$, por exemplo, se $a = 1$ e $b = 0$.

c) Tomando $a = b = 1$ e $v = c = (2, -1, 4)$ na alínea a), o resultado da eliminação de Gauss obtido em a) é

$$[A|c] = [A|v] \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Daqui se conclui que o SEL é possível e indeterminado com grau de indeterminação igual a 1, correspondente há existência de uma incógnita livre (que podemos tomar a terceira). Escrevendo a incógnita na forma $u = (x, y, z)$ com z incógnita livre ($z \in \mathbb{R}$), tem-se usando a matriz reduzida

$$y = -1 + z, \quad x = 2 - z,$$

ou seja $u = (2, -1, 0) + z(-1, 1, 1)$. Tem-se ainda $x + 2y - z = (2 - z) + 2(-1 + z) - z = 0$, pelo que todas as soluções de $Au = v$ pertencem ao plano indicado.

d) Tomando $a=1$ e $b=2$, a matriz que se obtém de A por eliminacão de Gauss tem três pivôs, pelo que todas as colunas de U são linearmente independentes, o que implica que são linearmente independentes as 3 colunas de A, constituindo assim uma base de $\mathbb{R}^3$. O vector (α,β,γ) das componentes de $(1,1,1)$ na base formada pelas colunas de A (na ordem que est definida) são as que figuram na solução de $Au=c$ com $c=(1,1,1)$, ou seja $u=(\alpha,\beta,\gamma)$. De acordo com os resultados de a), tem-se no final da eliminação de Gauss

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 3 & \vdots & 2 \end{array}\right],$$

pelo que $\gamma=2/3$, $\beta=1+2\gamma=7/3$, $\alpha=1-\gamma=1-2/3=1/3$, ou seja

$$(1,1,1)=(1/3,7/3,2/3)_{B_{col}}$$

em que B_{col} é a base de $\mathbb{R}^3$ formada pelas colunas de A.

Problema 7 (2,5 valores) Considere a transformação $T\in L(\mathbb{R}^{2\times 2},\mathcal{P}_2)$ definida por:

$T(E_{11})=3+t+4\,t^2;\quad T(E_{12})=-t-t^2;\quad T(E_{21})=1+t^2;\quad T(E_{22})=-3-2\,t-5\,t^2,\quad t\in\mathbb{R},$

onde $B_c(\mathbb{R}^{2\times 2})=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})$ é a base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

a) Qual a matriz que repressenta T em relação às bases canónicas de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ e de $\mathcal{P}_2$;

b) Determine bases para o núcleo de T e para a imagem de T.

c) Como se representa T em relação às bases: $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$ de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ e $\{1+t^2,t+t^2,t\}$ de $\mathcal{P}_2$? Resolva a equação linear $T(M)=w$, em que $w(t)=1-t,t\in\mathbb{R}$.

d) Sendo V um espaço linear, uma transformação $Q\in L(V)$ tal que $Q^2=Q$ designa-se por projecção. Mostre que se $S\in L(V)$ é tal que $S^2=I$, então as transformações definidas por $P_+=(I+S)/2$ e $P_-=(I-S)/2$ são projecções. O que pode afirmar acerca das igualdades: (A) $P_++P_-=I+P_+P_-$, (B) $P_+P_-=P_-P_+=0$?

. . . .

Resolução: a) Por definição, a matriz que representa em relação às bases canónicas de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ e de $\mathcal{P}_2$, $A=M(T;B_c(\mathbb{R}^{2\times 2}),B_c(\mathcal{P}_2))$ é aquelas cujas colunas são formadas pelas componentes, na base canónica de $\mathcal{P}_2$, das imagens por T dos elementos da base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Assim, temos

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

b) Bases para o núcleo e para o espaço imagem (ou contadomínio) de T podem ser obtidos pelo método de eliminação de Gauss, pois aqueles subespaços de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ e de $\mathcal{P}_2$ são isomorfos ao núcleo e ao espaço das colunas da matriz A, respectivamente. Implementamos eliminação de Gauss para este caso:

$$A\mapsto\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1/3 & -1 \\ 0 & -1 & -1/3 & -1 \end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1/3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=U.$$

Daqui resulta que o núcleo de A tem dimensão 2, tantas quantas as colunas sem pivô, e que o espaço das colunas de A também tem dimensão 2 (a soma dos dois números citado é o número de colunas de A). Uma base para o espaço das colunas de A é formada pelas suas 2 primeiras colunas (as da mesma ordem daquelas que têm pivô após eliminação de Gauss): $C_A = L(\{(3,1,4),(0,-1,-1)\})$. Por sua vez $N_A = N_U = L(\{(-1/3,-1/3,1,0),(1,-1,0,1)\})$, pois $N_U = \{u = (x,y,z,w) : Uu = 0\}$ e, tomando z e w como incógnitas livres, das matrizes acima resulta que $y = -1/3z - w$ e $x = -1/3z + w$ e, portanto os elementos do núcleo são da forma $u = (-1/3z+w, -1/3z-w, z, w)$, $z, w \in \mathbb{R}$. Finalmente, usando o isomorfismo habitual, conclui-se que: - Uma base para o núcleo de T é

$$\{-\frac{1}{3}(E_{11}+E_{12})+E_{21}, E_{11}-E_{12}+E_{22}\} = \{-\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\};$$

e uma base para a imagem de T é

$$\{3 + t + 4\,t^2, -t - t^2\}.$$

c) Para determinar a matriz que representa T em relação às novas bases do domínio e do espaço de chegada há vários caminhos. Neste caso particular talvez não seja de aplicar o método geral, que relaciona quaisquer duas representações da mesma transformação linear por via das matrizes de mudança de bases no domínio e no espaço de chegada, por haver dois elementos na nova base do domínio que pertencem ao núcleo de T, precisamente os terceiro e quarto elementos. Assim a matriz pretendida terá as terceira e quarta colunas nulas. Para as outras, calculemos as imagens dos dois primeiros elementos do domínio, exprimindo o resultado na nova base do espaço de chegada:

$$T(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}) = T(E_{11}+E_{12}) = T(E_{11}+T(E_{12}) = 3+3t^2 = 3(1+t^2)$$

$$T(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}) = T(E_{11}-E_{12}) = T(E_{11}-T(E_{12}) = 3+2t+5t^2 = 3(1+t^2)+2(t+t^2).$$

Consequentemente, a matriz B que representa em relação às novas bases é dada por

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pretende-se agora resolver a equação $T(M) = 1-t$. Podemos desde já adiantar que a equação é possível, pois podemos facilmente indicar uma sua solução particular. Efectivamente, da definição de T resulta que $T(E_{12}+E_{21}) = T(E_{12})+T(E_{21}) = -t-t^2+(1+t^2) = 1-t$. Como sabemos a solução geral de uma equação linear obtém-se adicionando a uma solução particular os elementos do núcleo da transformação. Assim, tendo em conta a alínea anterior, as soluções de $T(M) = 1-t$ são dadas por

$$M = E_{12}+E_{21}+M_h \text{ com } M_h \in N(T) = L(\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\}).$$

d) Nas condições do enunciado seja $S \in L(V)$ tal que $S^2 = I$ e definam-se as transformações $P_+ = (I+S)/2$ e $P_- = (I-S)/2$. Tem-se

$$P_+^2 = (I+S)^2/4 = (I+2S+S^2)/4 = (2I+2S)/4 = (I+S)/2 = P_+$$

e
$$P_-^2 = (I-S)^2/4 = (I-2S+S^2)/4 = (2I-2S)/4 = (I-S)/2 = P_-,$$
pelo que P_+ e P_- são projecções.

Relativamente às igualdades (A) e (B) são ambas verdadeiras. De facto, começando pela segunda, temos
$$P_+P_- = (I+S)(I-S)/4 = (I-S^2)/4 = 0 \text{ e } P_-P_+ = (I-S)(I+S)/4 = (I-S^2)/4 = 0,$$
já que $S^2 = I$. Assim a relação (A) é equivalente a (A$'$) $P_+ + P_- = I$, que é obviamente verdadeira: $P_+ + P_- = (I+S)/2 + (I-S)/2 = 2I/2 = I$.

Problema 13 (2,5 valores) Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno usual e sejam $v_1 = (1,-1,1)$, $v_2 = (3,1,1)$ e $v_3 = (2,6,-2)$.
a) Indique uma base ortogonal para o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores v_1, v_2 e v_3.
b) Indique uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que contém o vector v_1.
c) Determine uma equação cartesiana para o plano $P = \{v_3\} + L(\{v_1, v_2\})$. Qual a distância da origem (o ponto (0,0,0)) ao plano P?
d) Mostre que em qualquer espaço euclideano V é válida a desigualdade:
$$|\langle x+u, y+z\rangle| \leq (||x|| + ||u||)(||y|| + ||z||), \quad \forall x,y,z,u \in V.$$

. . . .

Resolução: a) O método de ortogonalização de Gram Schmidt permite obter um conjunto ortogonal O a partir de um qualquer conjunto de vectores A, sendo o mesmo o espaço gerado pelo mesmo número (finito) consecutivo de vectores de cada um dos conjuntos. Se o conjunto A for linearmente independente, então O é também linearmente independente e se A for linearmente dependente então O também o é, contendo nesse caso o vector nulo. Implementando o método de ortogonalização de Gram-Schmidt para $A = \{v_1, v_2, v_3\}$ e designando $O = \{u_1, u_2, u_3\}$, temos:

$u_1 = v_1 = (1,-1,1) \quad (||u_1||^2 = 3)$
$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1\rangle}{||u_1||^2}u_1 = (3,1,1) - (1,-1,1) = (2,2,0) \quad (||u_2||^2 = 8)$
$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1\rangle}{||u_1||^2}u_1 - \frac{\langle v_3, u_2\rangle}{||u_1||^2}u_2 = v_3 + 2u_1 - u_2 = (2,6,-2) + 2(1,-1,1) - 2(2,2,0) = (0,0,0)$

Concluímos então que o conjunto A é linearmente dependente, que gera um espaço com dimensão 2 e que uma sua base ortogonal é $\{u_1, u_2\}$

b) Para obter uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que contém o vector $v_1 = u_1$ basta juntar a $\{u_1, u_2\}$ um vector que seja ortogonal quer a u_1 quer a u_2, o que pode ser conseguidos dispondo estes 2 vectores nas linhas de uma matriz e calculando o seu núcleo. Pocedendo deste modo obtemos a base desejada: $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ com $u_3 = (-1,1,2)$ (sendo $u_3 \perp u_1$ e $u_3 \perp u_2$).

c) Do que fizémos em a) conclui-se que $v_3 \in L(\{v_1, v_2\})$, pois $v_3 + 2v_1 - 2(v_2 - v_1) = 0$ ou $v_3 = -4v_1 + 2v_2$. Assim o plano P contém a origem e $P = L(\{v_1, v_2\})$. Uma vez que P contém a origem a distância da origem a P é zero.

d) A desigualdade que se pretende estabelecer é consequência de duas desigualdades bem conhecidas, válidas para qualquer espaço euclideano V em que a norma se define a partir do produto interno por $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$: São elas:
- A desigualdade de Cauchy-Schwarz: $|\langle x, y\rangle \leq ||x||\,||y|| \quad \forall x, y \in V$
- A desigualdade triangular: $||x+y|| \leq ||x|| + ||y|| \quad \forall x, y \in V$

Aplicando-as sucessivamente, para quaisquer $x, y, z, u \in V$, tem-se
$$|\langle x+u, y+z\rangle| \leq ||x+u||\,||y+z|| \leq (||x|| + ||u||)(||y|| + ||z||)$$

que é o resultado pretendido.

Problema 14 (2,5 valores) Seja ε um número real e

$$A_\varepsilon = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1-\varepsilon \\ 0 & 5 & 0 \\ 1+\varepsilon & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Determine, em função de ε, os valores próprios de A_ε.
b) Identifique o conjunto $\mathcal{E}$ formado pelos valores de ε para os quais A_ε é diagonalizável como matriz real, i.e. existem uma matriz diagonal Λ_ε e uma matriz C_ε, ambas reais, tais que $A_\varepsilon = C_\varepsilon \Lambda_\varepsilon {C_\varepsilon}^{-1}$.
c) Verifique que $\varepsilon = 0$ pertence a $\mathcal{E}$ e indique um par de matrizes Λ_0 e C_0 nas condições da alínea anterior.
d) Seja Q_ε a forma quadrática associada com a matriz A_ε. Designando por B_ε a parte simétrica da matriz A_ε, verifique que $B_\varepsilon = A_0$, para qualquer valor de ε real. Use este resultado para mostrar que a forma quadrática Q_ε é definida positiva para qualquer $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

. . . .

Resolução: a) Os valores próprios de A_ε são as raízes do polinómio característico, definido por $p(\lambda) = \det(A_\varepsilon - \lambda I)$, em que $\lambda \in \mathbb{K}$ e I representa a matriz identidade de ordem 3. Tem-se

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1-\varepsilon \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ 1+\varepsilon & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (5-\lambda)[(\lambda-2)^2 - (1-\varepsilon^2)] = -(\lambda-5)(\lambda-(2+\sqrt{1-\varepsilon^2}))(\lambda-(2-\sqrt{1-\varepsilon^2})) \end{aligned}$$

onde se usou a regra de Laplace por expansão segundo a linha 2. Assim, A_ε tem 3 valores próprios distintos, excepto se $\varepsilon^2 = 1 \Leftrightarrow |\varepsilon| = 1$, caso em dois valores próprios coincidem, havendo apenas dois distintos que são 5 e 2; Se $|\varepsilon| \neq 1$ os valores próprios de A_ε são

$$\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = 2 + \sqrt{1-\varepsilon^2}, \quad \lambda_3 = 2 - \sqrt{1-\varepsilon^2}$$

sendo um real e os outros dois complexos conjugados se $|\varepsilon| > 1$ e os três reais se $|\varepsilon| \leq 1$.

b) Uma matriz real é diagonalizável como tal se os seus valores próprios forem números reais com multiplicidades algébrica e geométrica iguais. Note-se que a condição dos valores próprios serem reais é $|\varepsilon| \leq 1$, mas para $|\varepsilon| = 1$, $\lambda = 2$ é valor próprio com multiplicidade algébrica 2 e multiplicidade geométrica 1, como é fácil ver. Efectivamente, para $\varepsilon = 1$ (respectivamente, $\varepsilon = -1$) o espaço próprio associado ao valor próprio 2 é o núcleo da matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \left(\text{resp.} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

que tem dimensão 1 e é gerado por $(0,0,1)$ (resp. $(1,0,0)$);

Por outro lado, para $|\varepsilon| < 1$, há 3 valores próprios reais e distintos, sendo a matriz diagonalizável (pois a valores próprios distintos correspondem vectores próprios linarmente independentes), existindo uma matriz diagonal real Λ_ε e uma matriz diagonalizante C_ε também real tal que $\Lambda_\varepsilon = C_\varepsilon^{-1} A_\varepsilon C_\varepsilon \quad \Leftrightarrow A_\varepsilon = C_\varepsilon \Lambda_\varepsilon C_\varepsilon^{-1}$, sendo C_ε a matriz de mudança da base canónica para a base de $\mathbb{R}^3$ formada pelos vectores próprios.

Do que atrás dissemos resulta que $\mathcal{E} = \{\varepsilon \in \mathbb{R} : |\varepsilon| < 1\}$.

c) Obviamente que $0 \in \mathcal{E}$, sendo neste caso os valores próprios de A_0 dados por $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 1$ e, portanto $\Lambda_0 = \operatorname{diag}\{5, 3, 1\}$. Por outro lado, é fácil ver que

$$E(5) = L(\{(0, 1, 0)\}), E(3) = L(\{(1, 0, 1)\}), E(1) = L(\{(1, 0, -1)\}),$$

donde resulta que podemos tomar $C_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

d) Desigando por B_ε a parte simétrica de A_ε, tem-se

$$B_\varepsilon = \frac{1}{2}(A_\varepsilon + A_\varepsilon^t) = A_0,$$

e, portanto, a parte simétrica de A_ε não depende de ε e coincide com a matriz A_0. Esta é simétrica e tem todos os valores próprios positivos, $\Lambda_0 = \operatorname{diag}\{5, 3, 1\}$, pelo que a forma quadrática que lhe está associada é definida positiva. Finalmente, como para qualquer ε a forma quadrática Q_ε coincide com a forma quadrática Q_0, então Q_ε é também definida positiva.