2° **Teste: 1-Versão J451 - 14/11/2018**

Problema 4 (10 valores)

(a) Seja $S \subset \mathbb{R}^{3\times 3}$ o subespaço formado por todas as matrizes que são simétricas em relação à diagonal secundária e têm traço nulo. Explicite bases para os subespaços S e para $S^t = \{M \in \mathbb{R}^{3\times 3} : M^t \in S\}$; (b) Calcule a dimensão e indique uma base de $S \cap T_s$, T_s é o subespaço das matrizes triangulares superiores; (c) Seja $T : S \to S^t$ a transformação linear definida por $T(A) = A^t$, $A \in S$. Represente-a em relação às bases de S e S^t acima consideradas. (d) Para $n \in \mathbb{N}$ defina-se $F_n = \{f_1, \ldots, f_n\} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R})$ - o espaço das funções reais de variável real com as operações usuais. Mostre que se existe $\{t_1, \ldots, t_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que a matriz $A = [f_j(t_i)] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é invertível, então F_n é linearmente independente.

. . . .

Resolução: **(a)** As matrizes de $\mathbb{R}^{3\times 3}$ que exibem simetria em relação à diagonal secundária têm a forma geral ($a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$): $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & f & b \\ e & d & a \end{bmatrix}$. Impondo a estas matrizes que tenham traço nulo ($f + 2a = 0 \Leftrightarrow f = -2a$), obtemos a forma geral dos elemento do subespaço S: $M \in S$ se e só se

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & -2a & b \\ e & d & a \end{bmatrix} = aX_1 + bX_2 + cX_3 + dX_2^t + eX_3^t \quad (1)$$

em que o super-índice ^{t} significa transposição, com

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; X_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A expressão (1) mostra que o conjunto ordenado $B = (X_1, X_2, X_3, X_2^t, X_3^t)$ gera S e dessa igualdade também decorre facilmente que B é linearmente independente (efectivamente, se admitirmos que é nula a combinação linear no segundo membro de (1), então da igualdade decorre que $a = b = c = d = 0$) , ou seja, B é uma base de S. A dimensão de S é pois 5. Tendo em conta que $X \in B \Leftrightarrow X^t \in B$ (pois $X_1 = X_1^t$) então o subrespaço S^t coincide com o subespaço S, podendo nós optar por colocar a mesma base que em S. Alternativamente, podemos alterar a ordem dos elementos, por exemplo, considerando $B_t = (X_1, X_2^t, X_3^t, X_2, X_3)$.

(b) Os elementos pertencentes a $S \cap T_s$ são os que exibem a forma (1) com todos os elementos nulos abaixo da diagonal principal, ou seja, as matrizes que podem ser escritas como:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & -2a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} = aX_1 + bX_2 + cX_3.$$

Tal como anteriormente (ver alínea anterior), daqui resulta que a dimensão de $S \cap T_s$ é 3, sendo uma base dada por $B_\cap = (X_1, X_2, X_3)$.

(c) Sendo $T : S \to S^t$ a transformação linear definida por $T(A) = A^t$, $A \in S$, a matriz que a representa, fixando a base B quer em S quer em S^t, é aquela que tem nas suas colunas as componentes da imagem por T dos vectores da base B: Tem-se

$$T(X_1) = X_1;\ T(X_2) = X_2^t;\ T(X_3) = X_3^t;\ T(X_2^t) = X_2;\ T(X_3^t) = X_3,$$

pelo que a matriz que representa T é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se, porventura, tivéssemos optado por colocar em S^t a base antes designada por B_t, continuando a colocar em S a base B, a representação matricial nestas bases seria a matriz identidade de ordem 5.

(d) Sendo $n \in \mathbb{N}$, $T_n = \{t_1, \ldots, t_n\} \subset \mathbb{R}$ e $F_n = \{f_1, \ldots, f_n\} \subset$ tal que a matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, com $a_{ij} = f_j(t_i)$, $i, j = 1, \ldots, n$ é invertível, provemos que o conjunto de funções $F_n = \{f_1, \ldots, f_n\} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R})$ é linearmente independente.

Consideremos uma combinação linear das funções de F_n que representa a a função nula

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j = 0,$$

pelo que em particular em qualquer ponto $t \in \mathbb{R}$, se tem

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j(t) = 0,$$

e, bem assim, para qualquer ponto de T_n. Logo

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j(t_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Definindo a matriz $A = [a_{ij}] = [f_j(t_i)] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e o vector $u = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]^t$, as n equações anteriores podem ser escritas na forma matricial $Au = 0$. Como, por hipótese, A é invertível, a única solução de $Au = 0$ é $u = 0$, ou seja $\alpha_j = 0, j = 1, \ldots, n$. Consequentemente, os escalares na combinação linear inicial são todos nulos, sendo F_n é linearmente independente.