Álgebra Linear

Exercícios de escolha múltipla

(cerca de metade com resolução)

Setembro 2012

[Exercícios baseados em provas de avaliação a cursos leccionados por Amarino Lebre.]

Sistemas de Equações Lineares, Matrizes e Determinantes

Exercício 1 *[2000/1 - 1° Teste - LEC]*

V1. Considere o sistema de equações lineares nas variáveis u , v e w representado pela matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & \lambda & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & \mu \end{array}\right].$$

Faça a discussão do sistema em função dos parâmetros λ e μ . A resposta correcta é:

A) O sistema é determinado sse $\lambda \neq 3$; é impossível sse $\lambda = 3$ e $\mu \neq -\frac{5}{3}$; e é indeterminado sse $\lambda = 3$ e $\mu = -\frac{5}{3}$.

B) O sistema é determinado sse $\lambda \neq 3$; e é indeterminado sse $\lambda = 3$.

C) O sistema é possível sse $\lambda \neq 3$; e é impossível sse $\lambda = 3$.

D) O sistema é determinado sse $\lambda \neq 3$; é impossível sse $\lambda = 3$ e $\mu = -\frac{5}{3}$; e é indeterminado sse $\lambda = 3$ e $\mu \neq -\frac{5}{3}$.

....

Resolução:

O método de eliminação de Gauss permite responder à questão colocada. Usando a habitual convenção de notação: $X \xrightarrow{E} Y$ significa que $Y = EX$, tem-se:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & \lambda & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & \mu \end{array}\right] \xrightarrow{E_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & \lambda & 0 \\ 0 & 6/5 & -2\lambda/5 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & \mu \end{array}\right] \xrightarrow{E_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & \lambda & 0 \\ 0 & 6/5 & -2\lambda/5 & -2 \\ 0 & 0 & -1+\lambda/3 & \mu+5/3 \end{array}\right],$$

em que

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5/6 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uma vez que o método de eliminação de Gauss não altera o conjunto das soluções de um sistema de equações lineares, daqui se conclui que:

– O sistema é impossível sse $\lambda = 3$ ($\Leftrightarrow -1 + \lambda/3 = 0$) e $\mu \neq -5/3$ ($\Leftrightarrow \mu + 5/3 \neq 0$);

– O sistema é possível e indeterminado sse $\lambda = 3$ ($\Leftrightarrow -1 + \lambda/3 = 0$) e $\mu = -5/3$ ($\Leftrightarrow \mu + 5/3 = 0$);

– O sistema é possível e determinado sse $\lambda \neq 3$ ($\Leftrightarrow -1 + \lambda/3 \neq 0$), independentemente do valor de μ.

Assim, a resposta correcta é **A**.

Exercício 2 *[2000/1 - 1°Exame - LEC]*

V1. Considere o sistema de equações lineares nas variáveis x , y e z representado pela matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & -1 & \mu \\ 2 & -5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \end{array}\right].$$

Faça a discussão do sistema em função dos parâmetros λ e μ . A resposta correcta é:

A) O sistema é determinado sse $\lambda \neq 0$; e é indeterminado sse $\mu = \frac{5}{2}$.

B) O sistema é determinado sse $\lambda \neq 0$; e é impossível sse $\lambda = 0$.

C) O sistema é determinado sse $\lambda \neq 0$; e é indeterminado sse $\lambda = 0$.

D) O sistema é possível sse $\lambda \neq 0$; e é impossível sse $\lambda = 0$.

....

Resolução:

O método de eliminação de Gauss permite responder à questão colocada. Usando a habitual convenção de notação: $X \xrightarrow{E} Y$ significa que $Y = EX$, tem-se:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & -1 & \mu \\ 2 & -5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & -1 & \mu \\ 0 & -5 & -13/5 & 1-2\mu/5 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \end{array}\right],$$

em que

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Uma vez que o método de eliminação de Gauss não altera o conjunto das soluções de um sistema de equações lineares, daqui se conclui que:

– O sistema é sempre possível;

– O sistema é (possível e) indeterminado sse $\lambda = 0$;

– O sistema é (possível e) determinado sse $\lambda \neq 0$, independentemente do valor de μ.

Assim, a resposta correcta é **C**.

Exercício 3 *[2000/1 - 1°Exame - LEC]*

V1. Qual o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -5 & \beta \end{bmatrix}$?

A) $12\,\beta + 5\,\alpha\,\beta$ **B)** $60 + 20\,\alpha\,\beta$ **C)** $20\,\alpha + 15\,\beta$ **D)** $60\,\alpha - 3\,\alpha\,\beta$

....

Resolução:

Podemos facilmente calcular o determinante usando repetidamente a regra de Laplace, uma vez que a matriz tem muitos elementos nulos. Escolhendo inicialmente a coluna 4 (a que tem mais elementos nulos) e posteriormente a coluna 2 (a que tem mais elementos nulos na matriz de ordem 3), vem

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -5 & \beta \end{vmatrix} = \beta \begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & \alpha \end{vmatrix} = \beta \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -3 & \alpha \end{vmatrix} = \beta(5\alpha + 12) = 5\alpha\beta + 12\beta.$$

Considera-se aqui, e em tudo o que se segue, que é bem conhecido de todos o determinante de uma matriz de ordem 2:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

sem ser necessário invocar nenhum resultado para o justificar.

Assim, a resposta correcta é **A**.

Exercício 4 *[2000/1 - 2º Exame - LEC]*

V1. Considere o seguinte sistema de equações lineares em variáveis complexas

$$\begin{cases} 2\,\mathbf{i}\,z_1 + a\,z_2 &= b \\ -\mathbf{i}\,z_1 + z_2 &= 2\,\mathbf{i} \end{cases}.$$

Faça a sua discussão em função dos parâmetros a e b em $\mathbb{C}$. A resposta correcta é:

A) O sistema é determinado sse $a \neq -2$; é impossível sse $a = -2$ e $b \neq -4\,\mathbf{i}$; e é indeterminado sse $a = -2$ e $b = -4\,\mathbf{i}$

B) O sistema é determinado sse $a \neq -2 + \mathbf{i}$; e é indeterminado sse $a = -2 + \mathbf{i}$

C) O sistema é determinado sse $a \neq -2$; e é indeterminado sse $a = -2$

D) O sistema é determinado sse $a \neq -2 + \mathbf{i}$; é impossível sse $a = -2 + \mathbf{i}$ e $b \neq -2 - 4\,\mathbf{i}$; e é indeterminado sse $a = -2 + \mathbf{i}$ e $b = -2 - 4\,\mathbf{i}$

....

Resolução:

O facto de se tratar de um sistema de equações com coeficientes complexos, sendo naturalmente também as soluções vectores de componentes complexas, não coloca nenhum problema especial em relação ao caso real, uma vez que podemos usar na mesma o método de eliminação de Gauss. Implementando-o em relação à matriz aumentada do sistema e usando a habitual convenção de notação: $X \xrightarrow{E} Y$ significa que $Y = EX$, obtém-se:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2\,\mathbf{i} & a & b \\ -\,\mathbf{i} & 1 & 2\,\mathbf{i} \end{array}\right] \xrightarrow{E} \left[\begin{array}{cc|c} 2\,\mathbf{i} & a & b \\ 0 & 1 + a/2 & 2\,\mathbf{i} + b/2 \end{array}\right],$$

em que

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Daqui se conclui que:

– O sistema é impossível sse $a = -2$ ($\Leftrightarrow 1 + a/2 = 0$) e $b \neq -4\,\mathbf{i}$ ($\Leftrightarrow 2\,\mathbf{i} + b/2 \neq 0$);

– O sistema é possível e indeterminado sse $a = -2$ ($\Leftrightarrow 1 + a/2 = 0$) e $b = -4$ ($\Leftrightarrow 2\,\mathbf{i} + b/2 = 0$);

– O sistema é possível e determinado sse $a \neq -2$ ($\Leftrightarrow 1 + a/2 \neq 0$), independentemente do valor de b.

Assim, a resposta correcta é **A**.

Exercício 5

V1. Sejam A uma matriz 3×4, B uma matriz invertível 4×4 e C uma matriz 4×3. Considere ainda uma matriz múltipla da matriz identidade I, $E_\lambda = \lambda I$ com $\lambda \neq 0$, e uma matriz elementar de permutação, P, ambas com dimensão 4×4. Considere a lista de afirmações:

I. $(E_\lambda + B)^2 = (E_\lambda)^2 + 2E_\lambda B + B^2$

II. $(AP + AB)^T = PA^T + B^T A^T$, onde X^T representa a transposta da matriz X

III. $(PE_\lambda B)^{-1} = E_\lambda^{-1} B^{-1} P$

IV. $(PCA)^2 = P^2 (CA)^2$

A lista completa de afirmações correctas é:

A) Todas **B)** II e IV **C)** I, II e III **D)** III

. . . .

Resolução:

Usaremos os seguintes resultados, válidos para quaisquer matrizes desde que façam sentido as operações indicadas:

P0. A matriz identidade I (de uma dada ordem) é o elemento neutro da multiplicação de matrizes (dessa ordem):

$$XI = IX = X.$$

Daqui resulta que, para qualquer escalar α, se tem: $X\alpha I = \alpha X = (\alpha I)X$.

P1. Distributividade do produto em relação à adição:

$$X(Y+Z) = XY + XZ; \quad (Y+Z)X = YX + ZX.$$

P2. A transposta da soma é a soma das transpostas:

$$(X+Y)^T = X^T + Y^T.$$

P3. A transposta do produto de duas matrizes é o produto das transpostas pela ordem inversa (em relação à qual elas figuram no produto inicial):

$$(XY)^T = Y^T X^T.$$

Efectivamente, se $X = [x_{ik}]$ e $Y = [y_k]$ então $XY = [z_{ij}]$ com $z_{ij} = \sum_{k=1}^{N} x_{ik}y_{kj}$, em que N é o número de colunas de X (= número de linhas de Y). Então $(XY)^T = [z_{ji}]$. Por outro lado, sendo $W = Y^T X^T = [w_{ij}]$, tem-se $w_{ij} = \sum_{k=1}^{N} y_{ki}x_{jk} = \sum_{k=1}^{N} x_{jk}y_{ki} = z_{ji}$. Consequentemente, $(XY)^T = Y^T X^T$.

P4. Sendo X e Y matrizes invertíveis (da mesma ordem), o produto XY é invertível e a sua inversa é o produto da inversa de Y pela inversa de X:

$$(XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1}.$$

Esta relação é uma consequência directa da associatividade do produto de matrizes, uma vez que, nas condições indicadas, se tem

$$(XY)(Y^{-1}X^{-1}) = X(YY^{-1})X^{-1} = XIX^{-1} = XX^{-1} = I$$

e

$$(Y^{-1}X^{-1})(XY) = Y^{-1}(X^{-1}X)Y = Y^{-1}IY = Y^{-1}Y = I.$$

Consequentemente, XY é invertível, sendo $Y^{-1}X^{-1}$ a sua inversa.

P5. Sendo P uma matriz elementar de permutação, i.e. difere da identidade em duas das suas linhas ou colunas (tem como efeito quando multiplicada à esquerda por uma matriz trocar duas das linhas dessa matriz), então P é simétrica, ou seja, $P^T = P$, uma vez que se $P = [p_{ij}]$ difere da identidade na linhas k e ℓ, então os únicos elementos iguais a 1 não pertencentes à diagonal principal são $p_{k\ell}$ e $p_{\ell,k}$, sendo os restantes nulos, pelo que

$$P^T = P \text{ e } P^{-1} = P,$$

sendo a última igualdade consequência directa de $P^2 = I$.

Note-se que estes resultados não são verdadeiros para uma matriz de permutação qualquer. Por exemplo,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P^T$$

Consideremos separadamente cada uma das afirmações no enunciado:

I. É verdadeira.

Tem-se $(E_\lambda + B)^2 = (E_\lambda + B)(E_\lambda + B) = (E_\lambda)^2 + E_\lambda B + BE_\lambda + B^2 = (E_\lambda)^2 + 2E_\lambda B + B^2$, onde se usaram P1 e P2 (E_λ comuta com qualquer matriz, por ser um múltiplo da matriz identidade);

II. É verdadeira.

Tem-se $(AP + AB)^T = (AP)^T + (AB)^T = P^T A^T + B^T A^T = PA^T + B^T A^T$, onde se usaram P2, P3 e P5;

III. É verdadeira.

Tem-se $(PE_\lambda B)^{-1} = B^{-1}(PE_\lambda)^{-1} = B^{-1}E_\lambda^{-1}P^{-1} = E_\lambda^{-1}B^{-1}P$, uma vez que $P^{-1} = P$ e que, para $\lambda \neq 0$, $E_\lambda^{-1} = E_{\lambda^{-1}}$ comuta com qualquer matriz;

IV. Não é verdadeira com generalidade.

Tem-se $(PCA)^2 = PCAPCA \neq P^2(CA)^2$, uma vez que o produto de matrizes não é comutativo, em geral.

Assim, as afirmações verdadeiras são I, II e III, e a resposta correcta é **C**.

Exercício 6 *[2000/1 - 2º Exame - LEC]*

V1. Considere a seguinte lista de igualdades entre determinantes.

I. $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ d & 0 & c \\ 2 & 2 & -5 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 0 & c \\ 2 & -5 \end{vmatrix} + d \begin{vmatrix} b & 0 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix}$

II. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & b \\ d & -3 & c \\ 2 & a & -3 \end{vmatrix} = d \begin{vmatrix} 0 & b \\ a & -3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & b \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$

III. $\begin{vmatrix} 0 & a & -5 \\ b & c & d \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} b & c \\ -4 & 0 \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} 0 & a \\ -4 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a \\ b & c \end{vmatrix}$

Diga quais as que são verdadeiras para quaisquer valores dos escalares a, b, c, d:

A) III **B)** II **C)** I **D)** I e II

. . . .

Resolução:

Analisemos cada uma das afirmações separadamente:

I. Não é verdadeira com generalidade, uma vez que a aplicação da regra de Laplace, por expansão segundo a coluna 1, conduz a

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ d & 0 & c \\ 2 & 2 & -5 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 0 & c \\ 2 & -5 \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} b & 0 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix}$$

e, portanto, para que a igualdade indicada fosse verdadeira teria de ser:

$$\pm d\begin{vmatrix} b & 0 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 0,$$

o que é falso se $db \neq 0$.

II. Não é verdadeira com generalidade, uma vez que a aplicação da regra de Laplace, por expansão segundo a linha 2, conduz a

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & b \\ d & -3 & c \\ 2 & a & -3 \end{vmatrix} = -d\begin{vmatrix} 0 & b \\ a & -3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & b \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & a \end{vmatrix} = -d\begin{vmatrix} 0 & b \\ a & -3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & b \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$$

e, portanto, para que a igualdade indicada fosse verdadeira teria de ser:

$$\pm d\begin{vmatrix} 0 & b \\ a & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

o que é falso se $abd \neq 0$.

III. É verdadeira, por ser o resultado da aplicação da regra de Laplace, por expansão segundo a coluna 3.

Assim, a resposta correcta é **A**.

Exercício 7 *[2005/6 - 1° Teste - LEEC]*

V1. Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -4 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ -12 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sendo (x, y, z) solução do sistema, qual o valor da soma $x + y + z$?

A) 7 **B)** 6 **C)** 5 **D)** 4

....

Resolução:

É claro que podemos resolver o sistemas de equações dado e no final somar os valores das incógnitas. Em alternativa, podemos considerar o sistema com mais uma equação que o original: $x + y + z = w$ e ver qual a condição sobre w para que o novo sistema de equações (4 equações e 3 incógnitas, x, y, z) seja possível. Este processo, embora tenha mais um passo da eliminação de Gauss dispensa a determinação recursiva das incógnitas. Implementemos então o método de eliminação de Gauss para a matriz aumentada do novo sistema de equações:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 8 \\ -4 & -1 & -3 & -12 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & w \end{array}\right] \xrightarrow{E_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & w-4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & w \end{array}\right] \xrightarrow{E_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & w-5 \end{array}\right]$$

em que

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Conclui-se então que $w = 5$ é a condição para que o novo sistema de equações seja possível, sendo pois $w = 5$ o valor de $x + y + z$.

Assim, a resposta correcta é **C**.

Exercício 8 *[2005/6 - 1° Teste - LEEC]*

V2. Considere o sistema de equações lineares nas variáveis x_1 , x_2 e x_3 representado pela matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & c & d \end{array}\right].$$

Faça a discussão do sistema em função dos parâmetros c e d . A resposta correcta é:

A) O sistema é possível sse $c \neq -\frac{5}{12}$; e é impossível sse $c = -\frac{5}{12}$.

B) O sistema é determinado sse $c \neq -\frac{5}{12}$; e é indeterminado sse $c = -\frac{5}{12}$.

C) O sistema é determinado sse $c \neq -\frac{5}{12}$; é impossível sse $c = -\frac{5}{12}$ e $d = \frac{5}{4}$; e é indeterminado sse $c = -\frac{5}{12}$ e $d \neq \frac{5}{4}$.

D) O sistema é possível sse $c \neq -\frac{5}{12}$ ou $c = -\frac{5}{12}$ e $d = \frac{5}{4}$; e é impossível sse $c = -\frac{5}{12}$ e $d \neq \frac{5}{4}$.

....

Resolução:

O método de eliminação de Gauss permite responder à questão colocada. Usando a habitual convenção de notação, tem-se:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & c & d \end{array}\right] \xrightarrow{E_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & -12/5 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & c & d \end{array}\right] \xrightarrow{E_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & -12/5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & c+5/12 & d-5/4 \end{array}\right],$$

em que

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5/12 & 1 \end{bmatrix} .$$

Uma vez que o método de eliminação de Gauss não altera o conjunto das soluções de um sistema de equações lineares, daqui se conclui que:

– O sistema é impossível sse $c = -5/12$ ($\Leftrightarrow c + 5/12 = 0$) e $d \neq 5/4$ ($\Leftrightarrow d - 5/4 \neq 0$);

– O sistema é possível e indeterminado sse $c = -5/12$ ($\Leftrightarrow c + 5/12 = 0$) e $d = 5/4$ ($\Leftrightarrow d - 5/4 = 0$);

– O sistema é possível e determinado sse $c \neq -5/12$ ($\Leftrightarrow c + 5/12 \neq 0$, independentemente do valor de d.

Assim, a resposta correcta é **D**.

Exercício 9 *[2005/6 - 1° Teste - LEEC]*

V1. Sejam λ um número real e $\Lambda = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda+1 & \lambda+2 & \lambda+3 \\ 2\lambda+1 & 2\lambda+2 & 2\lambda \end{vmatrix}$.

Qual o valor de Λ?

A) $-\lambda(10\lambda+9)$ **B)** -3λ **C)** $-\lambda(\lambda+2)$ **D)** $-\lambda^3$

....

Resolução:

É claro que podemos calcular o determinante por vários métodos. Neste caso sugiro o seguinte: Observando que o vector na linha 2 é o resultado de somar ao vector na linha 1 o vector (1,2,3) e que a linha 3 é o resultado de multiplicar por 2 o vector na linha 1 e somar o vector (1,2,0), usando as propriedades da função determinante, em particular que esta é uma função linear de cada uma das suas linhas e que se duas linhas figuram repetidas numa matriz o seu determinante é nulo, obtém-se:

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda \\ 2\lambda & 2\lambda & 2\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Usando agora a regra de Laplace, por expansão segundo a linha 3, vem

$$\Lambda = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & \lambda \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} \lambda & \lambda \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\lambda - 2\lambda - 2(3\lambda - \lambda) = -3\lambda.$$

Assim, a resposta correcta é **B**.

Exercício 10 *[2005/6 - 1° Exame - LEEC]*

V1. Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & -4 & -6 \\ 3 & 8 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Sabendo que (x, y, z) com $x = 2$ é solução do sistema anterior, qual o valor do par (y, z) ?

A) (-3,2) **B)** (3,-1) **C)** (2,-1/2) **D)** (-1,1)

....

Resolução:

Podemos evidentemente resolver o sistema de equações dado e posteriormente ver qual das suas soluções é tal que $x = 2$. Em alternativa, podemos resolver o sistema resultante da substituição de x por 2, i.e.

$$\begin{cases} 3y + 5z &= 2 \quad (= 4 - x) \\ -4y - 6z &= -2 \quad (= -6 + 2x) \\ 8y + 13z &= 5 \quad (= 11 - 3x) \end{cases}.$$

Usando o método de eliminação de Gauss para o resolver:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 2 \\ -4 & -6 & -2 \\ 8 & 13 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{E_1} \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & -1/3 & -1/3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_2} \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

com

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4/3 & 1 & 0 \\ -8/3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Da segunda equação do sistema simplificado, obtém-se $2/3z = 2/3$, pelo que $z = 1$. Substituindo este resulta na primeira equação, vem $3y = 2 - 5z = -3$, donde se obtém $y = -1$.

Assim, a resposta correcta é **D**.

Exercício 11 *[2005/6 - 1° Exame - LEEC]*

V2. Considere a seguinte lista de igualdades entre determinantes.

I. $\begin{vmatrix} b & a & 0 \\ -5 & c & 2 \\ d & 4 & 0 \end{vmatrix} = -b \begin{vmatrix} c & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 2 \end{vmatrix}$

II. $\begin{vmatrix} -5 & -2 & 0 \\ b & -3 & a \\ d & c & 0 \end{vmatrix} = d \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -3 & a \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ b & a \end{vmatrix}$

III. $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 3 & d & b \\ 3 & c & -4 \end{vmatrix} = d \begin{vmatrix} a & 0 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a & 0 \\ 3 & b \end{vmatrix}$

Diga quais as que são verdadeiras para quaisquer valores dos escalares a, b, c, d:

A) I , II e III **B)** II **C)** I e III **D)** Nenhuma

. . . .

Resolução:

Analisemos cada uma das afirmações separadamente:

I. Não é verdadeira com generalidade, uma vez que a aplicação da regra de Laplace, por expansão segundo a coluna 1, conduz a

$$\begin{vmatrix} b & a & 0 \\ -5 & c & 2 \\ d & 4 & 0 \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} c & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} a & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + d \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 2 \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} c & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + d \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 2 \end{vmatrix} = -8b + 2ad$$

e, portanto, para que a igualdade indicada fosse verdadeira teria de ser:

$$-8b + 2ad = 0,$$

o que, em geral, é falso.

II. Não é verdadeira com generalidade, uma vez que a aplicação da regra de Laplace, por expansão segundo a linha 3, conduz a

$$\begin{vmatrix} -5 & -2 & 0 \\ b & -3 & a \\ d & c & 0 \end{vmatrix} = d \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -3 & a \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ b & a \end{vmatrix}$$

e, portanto, para que a igualdade indicada fosse verdadeira teria de ser:

$$\pm c \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ b & a \end{vmatrix} = 0,$$

o que é falso se $ac \neq 0$.

III. Não é verdadeira com generalidade, uma vez que a aplicação da regra de Laplace, por expansão segundo a coluna 2, conduz a

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 3 & d & b \\ 3 & c & -4 \end{vmatrix} = d\begin{vmatrix} a & 0 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} a & 0 \\ 3 & b \end{vmatrix}$$

e, portanto, para que a igualdade indicada fosse verdadeira teria de ser:

$$\pm c\begin{vmatrix} a & 0 \\ 3 & b \end{vmatrix} = 0,$$

o que é falso se $abc \neq 0$.

Assim, a resposta correcta é **D**.

Exercício 12 *[2005/6 - 2º Exame - LEEC]*

V1. Considere em $\mathbb{R}^3$ um sistema de equações lineares $Au = b$ em que $b \in \mathbb{R}^3$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix},$$

e as seguintes afirmações:

I. Existe pelo menos um vector b para o qual o sistema $Au = b$ não tem soluções;

II. A equação $Au = 0$ tem como única solução $u = 0$;

III. Existindo soluções de $Au = b$, o conjunto das soluções é uma recta em $\mathbb{R}^3$;

IV. Existindo soluções de $Au = b$, o conjunto das soluções é um plano em $\mathbb{R}^3$.

Qual é a afirmação verdadeira?

A) I **B)** II **C)** III **D)** IV

. . . .

Resolução:

Vejamos em primeiro lugar como podem ser formuladas de forma equivalente as afirmação dadas como alternativas. Consideremos a matriz aumentada do sistema de equações, $[A \mid b]$, e seja $[U \mid c]$ o resultado da eliminação de Gauss aplicado àquela matriz. Então:

I. Existe pelo menos um vector b para o qual o sistema $Au = b$ não tem soluções
$\Leftrightarrow$ Existe pelo menos um vector c para o qual o sistema $Uu = c$ não tem soluções
$\Leftrightarrow$ U tem uma linha nula e a componente da mesma ordem do vector c é diferente de zero;

II. A equação $Au = 0$ tem como única solução $u = 0$
$\Leftrightarrow$ A equação $Uu = 0$ tem como única solução $u = 0$
$\Leftrightarrow$ A matriz U tem tantos pivôs quantas as suas colunas
$\Leftrightarrow$ A matriz U não tem colunas sem pivô;

III. Existindo soluções de $Au = b$, o conjunto das soluções é uma recta em $\mathbb{R}^3$
$\Leftrightarrow$ Existindo soluções de $Uu = c$, o conjunto das soluções é uma recta em $\mathbb{R}^3$

$\Leftrightarrow U$ tem uma e uma só linha nula e a componente do vector c da mesma ordem da linha nula é igual a zero;

IV. Existindo soluções de $Au = b$, o conjunto das soluções é um plano em $\mathbb{R}^3$
$\Leftrightarrow$ Existindo soluções de $Uu = c$, o conjunto das soluções é um plano em $\mathbb{R}^3$
$\Leftrightarrow U$ tem duas linhas nulas e as componentes do vector c das mesmas ordems das linhas nulas são iguais a zero.

Agora resta apenas proceder à eliminação de Gauss e extrair a conclusão. Pondo $b = (b_1, b_2, b_3)$ com a convenção habitual de escrita, temos:

$$[A \mid b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 1 & -1 & 2 & b_2 \\ 0 & 6 & 3 & b_3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & -3 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 6 & 3 & b_3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & -3 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 + 2b_2 - 2b_1 \end{array}\right]$$

Uma vez que a matriz U não tem linhas nulas e tem tantos pivôs quantas as colunas, de acordo com as equivalências anteriores, a afirmação verdadeira é II.
Assim, a resposta correcta é **B**.

Exercício 13 *[2005/6 - 2º Exame - LEEC]*

V1. Qual é o valor do determinante da matriz $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$?

A) 78 **B)** -78 **C)** 102 **D)** -102

. . . .
Resolução:

Uma vez que a matriz dada tem muitos elementos nulos e, em particular, a coluna 1 só tem um elemento não nulo, estamos numa situação muito favorável para aplicar a regra de Laplace, por expansão segundo a coluna 1, obtendo-se

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

Podemos continuar a aplicar a regra de Laplace, agora por expansão segundo a coluna 3 (por ser a que tem mais zeros, sendo a mais favorável do ponto de vista dos cálculos), vindo:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3(-2) \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -6(15+2) = -102.$$

Assim, a resposta correcta é **D**.

Exercício 14 *[2005/6 - 2º Exame - LEEC]*

V1. Seja α um escalar e

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 3 & 0 & \alpha \\ 0 & 2 & 0 \\ \alpha & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix}.$$

Considere a relação

$$\det(A_\alpha + B_\alpha) = \det A_\alpha + \det B_\alpha \tag{1}$$

e as seguintes afirmações:

I. Não existem valores de $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tais que (1) é satisfeita;

II. Existem valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que (1) é satisfeita;

III. Existem valores de $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tais que (1) é satisfeita

IV. (1) é satisfeita para qualquer $\alpha \in \mathbb{C}$.

Então a afirmação verdadeira é:

A) I **B)** II **C)** III **D)** IV

. . . .

Resolução:

Convém começar por salientar que, embora o determinante seja uma função linear de cada um dos seus argumentos (as linhas de uma matriz), não é uma função linear das matrizes a que se aplica. Em particular, o determinante da soma de duas matrizes não é, em geral, a soma dos determinantes dessas matrizes. No entanto, em casos particulares, tal pode ocorrer. É de um desses casos que se trata neste exercício.

Dada a dependência das matrizes A_α e B_α do parâmetro α, qualquer dos membros da igualdade

$$\det(A_\alpha + B_\alpha) = \det A_\alpha + \det B_\alpha$$

é um polinómio na variável α. Sendo assim, do que se trata é de saber quais são as raízes de um polinómio. De facto, facilmente se obtém

$$\det A_\alpha = 2(9 - \alpha^2), \quad \det B_\alpha = 0,$$

por exemplo, se recordarmos que contribuem para o determinante de ordem 3 todos os possíveis produtos de 3 elementos da matriz, cada um deles contendo um elemento de cada uma das linhas e de cada um das colunas, sem lugar a repetições, e sendo afectados de sinal positivo ou negativo consoante a permutação correspondente. Já para o cálculo de $\det(A_\alpha + B_\alpha)$ podemos recorrer, por exemplo, à regra de Laplace por expansão segundo a linha 1, vindo:

$$\det(A_\alpha + B_\alpha) = 3(6 - \alpha^2) - (3 - \alpha^2) - \alpha^2 = 15 - 3\alpha^2.$$

Consequentemente, a igualdade inicial acontece se e só se α for tal que

$$15 - 3\alpha^2 = 2(9 - \alpha^2)$$

ou, equivalentemente,

$$\alpha^2 = -3.$$

Como se sabe esta equação não tem raíes reais, mas tem raízes complexas dadas por:

$$\alpha = \pm i\sqrt{3}.$$

Consequentemente, a afirmação verdadeira é III e, portanto, a resposta correcta é **C**.

Exercício 15 *[2006/7 - 1° Teste - LEC/MEC]*

V1. Considere em $\mathbb{R}^3$ um sistema de equações lineares, dependente de um parâmetro real α, escrito na forma $A_\alpha u = b_\alpha$ em que

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 3\alpha \end{bmatrix}, \quad b_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \end{bmatrix},$$

e as seguintes afirmações:

I. O sistema $A_\alpha u = b_\alpha$ é impossível qualquer que seja o valor de α;

II. O sistema $A_\alpha u = b_\alpha$ é impossível pelo menos para um valor de α;

III. O sistema $A_\alpha u = b_\alpha$ é possível qualquer que seja o valor de α;

IV. Para todos os valores de α para os quais o sistema $A_\alpha u = b_\alpha$ é possível existe uma única solução.

Qual é a lista completa de afirmações verdadeiras?

A) II **B)** I e II **C)** III **D)** III e IV

. . . .

Resolução:

Consideremos a matriz aumentada do sistema de equações, $[A_\alpha \mid b_\alpha]$, e seja $[U_\alpha \mid c_\alpha]$ o resultado da eliminação de Gauss aplicada àquela matriz. Com a convenção habitual de escrita, temos:

$$[A_\alpha \mid b_\alpha] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 7 & 8 & 3\alpha & \alpha \end{array}\right] \xrightarrow{E_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -2 \\ 0 & -6 & 3(\alpha-7) & \alpha-7 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{E_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 3(\alpha-3) & \alpha-3 \end{array}\right] = [U_\alpha \mid c_\alpha]$$

com

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Recordando que o método de eliminação de Gauss não altera o conjunto das soluções de um sistema de equações lineraes, temos:

I. É falsa,
uma vez que, por exemplo, para $\alpha \neq 3$ o sistema é possível.

II. É falsa,
uma vez que para que o sistema seja impossível é necessário que haja na matriz U_α uma linha de zeros - o que só acontece na 3^{a} linha para $\alpha = 3$ - e que a correspondente componente do vector c_α seja diferente de zero - para $\alpha = 3$ a 3^{a} componente do vector c_α é nula.

III. É verdadeira,
uma vez que, como vimos, o sistema é possível para qualquer valor de α.

IV. É falsa,
uma vez que para $\alpha = 3$ há infinitas soluções: podemos determinar a 1^{a} e a 2^{a} das incógnitas em função da 3^{a}, que é livre, uma vez que a 3^{a} coluna de U_α não tem pivô.

Assim, a resposta correcta é **C**.

Exercício 16 *[2006/7 - 1° Teste - LEC/MEC]*

V1. Sendo $\lambda \in \mathbb{R}$, pretende-se determinar o vector $u \in \mathbb{R}^3$, representado como vector coluna, que é solução da equação

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \end{bmatrix} u = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Qual é a solução?

A) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ **B)** $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ **C)** $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ **D)** $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

....

Resolução:

A igualdade no enunciado não é mais do que uma igualdade entre polinómios. De facto, sendo $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \end{bmatrix} u = a + b\lambda + c\lambda^2$$

e

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1+(\lambda-1) \\ 1 & 1+(\lambda-1) & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda-1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -(\lambda-1)^2 = -1 + 2\lambda - \lambda^2, \end{aligned}$$

onde se usou a regra de Laplace, por expansão segundo a linha 3, para o cálculo do último determinante.

Como dois polinómios são iguais quando forem iguais os respectivos coeficientes, resulta que

$$a = -1, \quad b = 2, \quad c = -1.$$

Assim, a resposta correcta é **B**.

Exercício 17 *[2006/7 - 1° Exame - LEC/MEC]*

V1. Sejam A e B matrizes quadradas e invertíveis de ordem $n \in \mathbb{N}$, represente por I a matriz identidade de ordem n e seja α um escalar não nulo. Considere as seguintes igualdades:

I. $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$,
II. $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$,
III. $(AB^{-1})^{-1} = BA^{-1}$,
IV. $\det(A + \alpha B) = \det A + \alpha^n \det B$.

Qual a lista completa de igualdades que são verdadeiras para quaisquer matrizes e qualquer escalar nas condições indicadas?

A) Todas **B)** I e II **C)** II e III **D)** III

....

Resolução:

Analisemos cada uma das igualdades:

I. Não é verdadeira com generalidade.

Usando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, tem-se

$$(A - B)(A + B) = A(A + B) - B(A + B) = A^2 + AB - BA + B^2,$$

pelo que será $A^2 + B^2 = (A - B)(A + B)$ se e só se

$$AB = BA,$$

o que não é verdadeiro com generalidade, pois o produto de matrizes não é comutativo.

II. É verdadeira.

Efectivamente, o determinante de uma matriz de ordem n é uma função linear de cada uma das suas linhas e como multiplicar uma matriz por um escalar corresponde a multiplicar cada uma da suas linhas por esse escalar, o resultado é imediato. Em termos analíticos, considerando a matriz A representada em termos das suas linhas

$$A = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \vdots \\ \ell_n \end{bmatrix},$$

tem-se

$$\det(\alpha A) = \begin{vmatrix} \alpha\ell_1 \\ \alpha\ell_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha\ell_k \\ \vdots \\ \alpha\ell_n \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \ell_1 \\ \alpha\ell_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha\ell_k \\ \vdots \\ \alpha\ell_n \end{vmatrix} = \alpha^2 \begin{vmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \alpha\ell_3 \\ \vdots \\ \alpha\ell_k \\ \vdots \\ \alpha\ell_n \end{vmatrix} = \cdots = \alpha^k \begin{vmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \vdots \\ \ell_k \\ \alpha\ell_{k+1} \\ \vdots \\ \alpha\ell_n \end{vmatrix} = \cdots = \alpha^n \begin{vmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \vdots \\ \ell_k \\ \vdots \\ \vdots \\ \ell_n \end{vmatrix} = \alpha^n \det A$$

III. É verdadeira.

Para qualquer matriz B invertível, pela definição da inversa, tem-se $(B^{-1})^{-1} = B$ e, como a inversa do produto de duas matrizes invertíveis - A e B - é o produto das inversas pela ordem inversa em relação à qual elas figuram no produto original - $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ - (ver o Exercício 5 para uma demostração), obtém-se

$$(AB^{-1})^{-1} = (B^{-1})^{-1}A^{-1} = BA^{-1}.$$

IV. Não é verdadeira com generalidade.

Efectivamente, esta igualdade seria verdadeira se o determinante de uma soma de duas matrizes fosse a soma dos determinantes:

$$\det(X + Y) = \det X + \det Y, \tag{2}$$

pois, nesse caso, usando II (que já vimos ser verdadeira) obter-se-ia a igualdade no enunciado. No entanto, (2) não é verdadeira com generalidade, pois, por exemplo,

$$\det\left(2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 4, \quad \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1.$$

Assim, a resposta correcta é **C**.

Exercício 18 *[2006/7 - 1° Exame - LEC/MEC]*

V1. A solução geral do sistema de equações $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ é da forma

$$u = u_1 + \alpha u_0, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

em que o par de vectores $(u_0, u_1))$ é dado por:

A) ((1,1,-1),(1,0,1)) **B)** ((1,1,-1),(1,1,1)) **C)** ((1,-1,-1),(1,1,1)) **D)** ((1,-1,-1),(1,0,1))

....

Resolução:

Para determinar a solução geral do sistema em causa usamos o método de eliminação de Gauss, que não altera o conjunto das soluções do sistema. Considerando a matriz aumentada, temos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{E_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = [U_\alpha \mid c_\alpha]$$

com

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Havendo uma linha nula, a terceira, na matriz aumentada após a eliminação de Gauss o sistema é indeterminado, com grau de indeterminação 1. Escrevendo as soluções na forma $u = (x, y, z)$, podemos determinar x e y em função de z (a incógnita que corresponde à coluna sem pivô). Da segunda equação, $y + z = 1$, vem

$$y = 1 - z$$

e substituindo este resultado na primeira das equações, $x + 2y + 3z = 4$, obtém-se

$$x = 4 - 2(1 - z) - 3z = 2 - z.$$

Consequentemente, a solução geral do sistema de equações pode ser escrita na forma

$$u = (2 - z, 1 - z, z) = (2, 1, 0) - z(1, 1, -1), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Agora trata-se de comparar este resultado com as alternativas dadas. Imediatamente se conclui que o vector u_0 é $u_0 = (1, 1, -1)$, ou um seu múltiplo não nulo, pelo que podemos eliminar C e D do conjunto de respostas certas. Para determinar o vector u_1, convém escever a solução geral na forma mais conveniente, introduzindo o novo parâmetro $\alpha = 1 - z \in \mathbb{R}$, por forma a que, por exemplo, a primeira componente do vector solução para $\alpha = 0$ seja igual a 1 (que aparece em qualquer das alternativas de resposta restantes (A e B)):

$$u = (2, 1, 0) + (1 - z - 1)(1, 1, -1) = (1, 0, 1) + (1 - z)(1, 1, -1) = (1, 0, 1) + \alpha(1, 1, -1), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Obtém-se assim a representação desejada com

$$u_1 = (1, 0, 1), \quad u_0 = (1, 1, -1).$$

Assim, a resposta correcta é **A**

Exercício 19 *[2006/7 - 2º Exame - LEC/MEC]*

V1. Considere o sistema de equações em $\mathbb{R}^3$, dependente dos parâmetros α e β,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 1 & \beta & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Qual dos seguintes é o valor do par (α, β) tal que o sistema anterior tem uma única solução?

A) (2,3) **B)** (3,2) **C)** (1,4) **D)** (2,4)

....

Resolução:

Trata-se de mais um problema que pode ser facilmente resolvido usando o método de eliminação de Gauss. Implementando-o para a matriz aumentada do sistema com a habitual convenção de notação, obtém-se no primeiro passo da eliminação de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \alpha & 1 \\ 1 & \beta & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \alpha & 1 \\ 0 & \beta-2 & 3-\alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \quad \text{com } E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

O segundo passo da eliminação de Gauss depende do valor de $\beta - 2$:

- $\beta = 2$

  Neste caso, a forma final obtém-se trocando as linhas 2 e 3:

  $$\xrightarrow{P} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3-\alpha & 1 \end{array}\right] \quad \text{com } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

  O sistema de equações terá uma única solução se for $\alpha \neq 3$ (caso em que a matriz dos coeficientes tem 3 pivôs). Ora a única alternativa de resposta com $\beta = 2$ é B, mas tendo $\alpha = 3$, podemos eliminá-la do conjunto das eventuais respostas certas.

- $\beta \neq 2$

  Neste caso, a forma final resulta de

  $$\xrightarrow{E_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \alpha & 1 \\ 0 & \beta-2 & 3-\alpha & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\beta+\alpha-5}{\beta-2} & \frac{3\beta-7}{\beta-2} \end{array}\right] \quad \text{com } E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\beta-2} & 1 \end{bmatrix}.$$

  O sistema de equações terá uma única solução se for $\beta + \alpha \neq 5$ (caso em que a matriz dos coeficientes tem 3 pivôs). Podemos pois também eliminar A e C do conjunto das eventuais respostas certas, uma vez que para qualquer delas se tem $\beta + \alpha = 5$. No caso da alternativa D, tem-se $\beta = 4 \neq 2$ e $\beta + \alpha = 6 \neq 5$, pelo que o sistema de equações tem uma única solução.

Assim, a resposta correcta é **D**.

Exercício 20 *[2006/7 - 2º Exame - LEC/MEC]*

V1. Seja $\mathcal{S}$ o conjunto das soluções do sistema de equações lineares em $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Então $\mathcal{S}$ é

A) o conjunto vazio **B)** um conjunto singular **C)** uma recta **D)** um plano

. . . .

Resolução:

Comecemos por formular de forma equivalente as alternativas de resposta apresentadas no enunciado. Desigando por $Au = b$ o sistema considerado, por $[A \mid b]$ a sua matriz aumentada e por $[U \mid c]$ a mtriz aumentada que se obtém por eliminação de Gauss da anterior, tem-se:

I. $\mathcal{S}$ é o conjunto vazio
$\Leftrightarrow$ o sistema de equações não tem soluções
$\Leftrightarrow$ o sistema de equações é impossível
$\Leftrightarrow$ existe uma linha nula em U e a componente correspondente (da mesma ordem) do vector c é não nula.

II. $\mathcal{S}$ é um ponto
$\Leftrightarrow$ o sistema de equações tem uma única solução
$\Leftrightarrow$ a matriz U não tem nenhuma linha nula.

III. $\mathcal{S}$ é uma recta
$\Leftrightarrow$ o sistema de equações é indeterminado com grau de indeterminação 1
$\Leftrightarrow$ existe uma e uma só linha nula na matriz U e a componente correspondente do vector c é nula (condição de existência de soluções).

IV. $\mathcal{S}$ é um plano
$\Leftrightarrow$ o sistema de equações é indeterminado com grau de indeterminação 2
$\Leftrightarrow$ U tem duas linhas nulas (que serão necessariamente a segunda e terceira uma vez que a primeira é não nula e permanece inalterada pela eliminação de Gauss) e as componentes do vector c correspondentes são não nula (nesse caso, a segunda e terceira componentes de c).

Agora resta proceder à eliminação de Gauss e escolher adequadamente. Com a habitual convenção de notação, obtém-se:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \overset{E_1}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \overset{E_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

em que

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Resulta do que atrás dissemos que a afirmação verdadeira é a III e, portanto, a resposta correcta é **C**.

Exercício 21 *[2006/7 - 2º Exame - LEC/MEC]*

V1. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ e considere o determinante seguinte

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 5 & 0 \\ 1 & \lambda + 1 & 2 \\ 1 & 2 & \lambda + 1 \end{vmatrix}.$$

A expressão correcta para o valor do determinante é:

A) $(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+4)$ **B)** $(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4)$ **C)** $(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda+4)$ **D)** $(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda-4)$

....

Resolução:

Uma vez que a matriz de que se pretende calcular o determinante tem uma entrada nula (na posição 13), podemos facilmente obtê-lo usando a regra de Laplace por expansão segundo a linha 1 (em alternativa podia ser usada a coluna 3), vindo:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \lambda-1 & 5 & 0 \\ 1 & \lambda+1 & 2 \\ 1 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} &= (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 \\ 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & \lambda+1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1)\big((\lambda+1)^2-4\big) - 5\big((\lambda+1)-2\big) \\
&= (\lambda-1)\big((\lambda+1)^2-9\big) = (\lambda+1-3)(\lambda+1-3) \\
&= (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+4)
\end{aligned}$$

Assim, a resposta correcta é **A**.

Exercício 22 *[2007/8 - 1° Teste - MEC]*

V1. Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $A_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 2 & \lambda & \lambda^2 \\ 2 & \lambda+1 & \lambda^2+1 \end{bmatrix}$.

Então o conjunto dos valores de λ para os quais A_λ é invertível é

A) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, **B)** $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, **C)** $\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$, **D)** $]0,+\infty[$.

....

Resolução:

Tendo em conta que

Uma matriz quadrada é invertível se e só se o seu determinante é diferente de zero

(ver [LTM, Teoremas 5.7 e 5.12]) basta calcular o determinante de A_λ e ver para que valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ este se anula. Podemos facilmente calcular o determinante de A_λ usando as propiedades básicas dos determinantes, como a seguir se exemplifica:

$$\begin{aligned}
\det A_\lambda &= \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 2 & \lambda+1 & \lambda^2+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & \lambda+1 & \lambda^2+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & \lambda+1 & \lambda^2+1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} \lambda & \lambda^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda-1),
\end{aligned}$$

em que no último passo se usou o conhecimento de um determinante de ordem 2.

Conclui-se então que A_λ não é invertível se $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.

Assim, a resposta correcta é **B**.

Exercício 23 *[2007/8 - 1° Teste - MEC]*

V1. O subconjunto de $\mathbb{R}^3$ formado pelas soluções da equação

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

é

A) um plano, **B)** uma recta, **C)** um conjunto singular, **D)** o conjunto vazio.

....

Resolução:

Trata-se de uma questão do mesmo tipo da colocada no Exercício 20. Tal como naquele caso, desigando por $Au = b$ o sistema considerado, por $[A \mid b]$ a sua matriz aumentada e por $[U \mid c]$ a matriz aumentada que se obtém por eliminação de Gauss da anterior e por $\mathcal{S}$ o conjunto das soluções de $Au = b$, tem-se:

I. $\mathcal{S}$ é o conjunto vazio
$\Leftrightarrow$ o sistema de equações não tem soluções
$\Leftrightarrow$ o sistema de equações é impossível
$\Leftrightarrow$ existe uma linha nula em U e a componente correspondente (da mesma ordem) do vector c é não nula.

II. $\mathcal{S}$ é um ponto
$\Leftrightarrow$ o sistema de equações tem uma única solução
$\Leftrightarrow$ a matriz U não tem nenhuma linha nula.

III. $\mathcal{S}$ é uma recta
$\Leftrightarrow$ o sistema de equações é indeterminado com grau de indeterminação 1 $\Leftrightarrow$ existe uma e uma só linha nula na matriz U e a componente correspondente do vector c é nula (condição de existência de soluções).

IV. $\mathcal{S}$ é um plano
$\Leftrightarrow$ o sistema de equações é indeterminado com grau de indeterminação 2
$\Leftrightarrow$ U tem duas linhas nulas (que serão necessariamente a segunda e terceira uma vez que a primeira é não nula e permanece inalterada pela eliminação de Gauss) e as componentes do vector c correspondentes são nulas (nesse caso, a segunda e terceira componentes de c, que é a condição de existência de soluções).

Neste caso particular obtém-se:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 4 \\ 7 & 8 & 9 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{E_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right],$$

em que

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Conclui-se então que o sistema de equações considerado é impossível e, portanto, $\mathcal{S}$ é o conjunto vazio.

Assim a resposta correcta é **D**.

Exercício 24 *[2007/8 - 1° Exame - MEC]*

V1. Considere a matriz dependente do parâmetro real α,

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix}.$$

Qual das seguintes afirmações relativamente ao sistema de equações $A_\alpha u = b$ é verdadeira?

A) Existe (pelo menos) um valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que o sistema é possível e determinado, qualquer que seja $b \in \mathbb{R}^4$,

B) Existem valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ e de $b \in \mathbb{R}^4$ tais que o sistema é possível e determinado,

C) Para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^4$ o sistema é indeterminado,

D) Existe (pelo menos) um valor de $b \in \mathbb{R}^4$ tal que o sistema é impossível, qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{R}$.

....

Resolução:

Por facilidade de exposição ponhamos $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$, seja $[A_\alpha \mid b]$ a matriz aumentada do sistema de equações dado e $[U_\alpha \mid c]$ a que se obtém da anterior por aplicação do método de eliminação de Gauss. Neste caso, obtém-se:

$$[A_\alpha \mid b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & b_2 \\ 3 & 3 & 6 & 5 & b_3 \\ 1 & 0 & \alpha & 1 & b_4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & b_3 - 3b_1 \\ 0 & -2 & \alpha - 2 & -1 & b_4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & \alpha - 2 & -1/3 & b_4 - 2/3b_2 + 2/3b_1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{P} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & \alpha - 2 & -1/3 & b_4 - 2/3b_2 + 2/3b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - 2b_1 \end{array}\right] = [U_\alpha \mid c],$$

em que

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Daqui se conclui o seguinte:

- I e II são falsas,

uma vez que, tratando-se de um sistema com tantas equações quantas as incógnitas, a existência de uma linha nula na matriz U_α implica que o sistema é impossível ou indeterminado (não podendo, pois, ser possível e determinando).

- III é falsa e IV é verdadeira,

uma vez que o sistema é impossível no caso do vector b ser tal que a quarta componente do vector c é diferente de zero, $b_3 - b_2 - 2b_1 \neq 0$, independentemente do valor de α.

Assim, a resposta correcta é **D**.

Exercício 25 *[2007/8 - 1º Exame - MEC]*

V2. Qual o determinante da matriz $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -4 & \beta \end{bmatrix}$?

A) $8\,\alpha\,\beta + 3\,\beta$ **B)** $8\,\alpha\,\beta - 3\,\beta$ **C)** $3\,\alpha\,\beta - 8\,\beta$ **D)** $3\,\alpha\,\beta + 8\,\beta$

Resolução:

Podemos facilmente calcular o determinante usando repetidamente a regra de Laplace, uma vez que a matriz tem muitos elementos nulos. Escolhendo inicialmente a coluna 4 (a que tem mais elementos nulos) e posteriormente a coluna 2 (a que tem mais elementos nulos na matriz de ordem 3), vem

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -4 & \beta \end{vmatrix} = \beta \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -4 & 0 & \alpha \end{vmatrix} = \beta \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & \alpha \end{vmatrix} = \beta(3\alpha + 8) = 3\alpha\beta + 8\beta.$$

Assim, a resposta correcta é **D**.

Exercício 26 *[2007/8 - 2º Exame - MEC]*

V1. Identifique o único valor de α real para o qual o sistema de equações

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

é possível.

A) 11, **B)** 3, **C)** 0, **D)** -4.

Resolução:

Procedendo à eliminação de Gauss da matriz aumentada do sistema, obtém-se

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 7 & 8 & 9 & \alpha \end{array}\right] \xrightarrow{E_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -2 \\ 0 & -6 & -12 & \alpha - 7 \end{array}\right] \xrightarrow{E_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 3 \end{array}\right],$$

em que

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Daqui se conclui imediatamente que a condição de existência de soluções é que

$$\alpha = 3,$$

sendo o sistema impossível no caso contrário.

Assim, a resposta correcta é **B**.

Exercício 27 *[2007/8 - 2º Exame - MEC]*

V1. Para $\alpha \in \mathbb{R}$ seja $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \alpha & 1 & 2\alpha+1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Qual o valor do determinante da matriz $2A_1^{-1}A_2A_3^{-1}$?

A) 3/4, **B)** -3/4, **C)** -3, **D)** 3.

Exercício 28 *[2008/9 - 1º Teste - LEIC]*

V1. Qual dos seguintes é o vector (x, y, z), solução do sistema de equações lineares

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix},$$

cuja componente z tem o valor 3.

A) $(2, 3, 3)$, **B)** $(-1, -2, 3)$, **C)** $(-2, -1, 3)$, **D)** $(3, 4, 3)$.

Exercício 29 *[2008/9 - 1º Teste - LEIC]*

V1. Considere o sistema de equações lineares dependente do parâmetro $\beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & \beta+3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \beta^2 - 2 \end{bmatrix},$$

e as seguintes afirmações relativamente a este sistema:

I. Existe uma única solução, qualquer que seja β,
II. Para $\beta = 1$ existe uma única solução,
III. Para $\beta = 2$ existe uma única solução,
IV. Para $\beta = 2$ não existem soluções.

Qual é a lista completa de afirmações verdadeiras?

A) I,II e III, **B)** II e IV, **C)** II e III, **D)** II.

Exercício 30 *[2008/9 - 1º Teste - LEIC]*

V1. Seja

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1-\alpha \\ 2 & \alpha^2 & 1 \\ 1 & \alpha & 1+\alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Qual o valor do determinante da matriz $A_1A_3^{-1}A_{-1}$?

A) 0, **B)** 2/3, **C)** -2/3, **D)** 3/2.

Exercício 31 *[2008/9 - 1º Exame - LEIC]*

V1. Qual dos vectores seguintes é solução da equação

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}?$$

A) $(1, 2, 3)$, **B)** $(1, -2, 3)$, **C)** $(1, 2, 1)$, **D)** $(1, -1, 1)$.

Exercício 32 *[2008/9 - 1º Exame - LEIC]*

V1. Qual é o valor de

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}?$$

A) 0 , **B)** 4, **C)** -4, **D)** 2.

Exercício 33 *[2008/9 - 1º Exame - LEIC]*

V1. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \alpha - 1 \\ \alpha + 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Qual dos seguintes é o conjunto dos valores de α para os quais a função $f(\lambda) = \det(A_\alpha - \lambda I)$ não se anula em $\mathbb{R}$?

A) $]-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{2}[\cup]\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty[$, **B)** $]-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}[$, **C)** $]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[$, **D)** $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

Exercício 34 *[2008/9 - 2º Exame - LEIC]*

V1. Qual dos seguintes vectores (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ é solução do sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

e pertence ao plano $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z = 4\}$?

A) $(22, -12, -3)$ **B)** $(30, -12, 5)$, **C)** $(-6, 4, 1)$, **D)** $(1, 1, 1)$.

Exercício 35 *[2008/9 - 2º Exame - LEIC]*

V1. Considere o sistema de equações lineares (SEL), dependente do parâmetro $\beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & \beta + 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ \beta^2 - 5 \end{bmatrix}$$

e as seguintes afirmações:

I. Se $\beta \neq 1$ e $\beta \neq -1$, o SEL tem uma única solução;
II. Se $\beta = -1$, o conjunto das soluções do SEL é uma recta em $\mathbb{R}^3$;
III. Se $\beta = 1$, o conjunto das soluções do SEL é uma recta em $\mathbb{R}^3$;
IV. Se $\beta = -1$, o SEL é impossível.

Qual é a lista completa de afirmações verdadeiras?

A) I e II, **B)** I e III, **C)** I, III e IV, **D)** III e IV.

Exercício 36 *[2008/9 - 2º Exame - LEIC]*

V1. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$. Considere as seguintes igualdades entre determinantes:

I. $|A| = 0$, II. $|A + 2B| = 2|B + 2A|$, III. $|B| = 0$, IV. $|B + 2A| = |A + 2B|$.

Qual é a lista completa de igualdades verdadeiras?

A) I e III, **B)** I, II e III, **C)** I, III e IV, **D)** I, II, III e IV.

Exercício 37 *[2009/10 - 1º Teste - MEC]*

V1. Para $\lambda \in \mathbb{R}$ seja

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & \lambda & \lambda + 1 \\ -5 & 2 & -\lambda - 1 \end{bmatrix}.$$

Qual é o valor de $\det A_\lambda$?

A) $1 + \lambda^2$, **B)** $1 - \lambda^2$, **C)** $(1 - \lambda)^2$, **D)** $(1 + \lambda)^2$.

Exercício 38 *[2009/10 - 1º Teste - MEC]*

V1. Considere novamente a matriz A_λ (com $\lambda \in \mathbb{R}$) definida no problema anterior. Qual dos seguintes valores de λ é tal que o sistema de equações lineares

$$A_\lambda u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tem como única solução o vector $u = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$?

A) -1, **B)** 1, **C)** -2, **D)** 2.

Exercício 39 *[2009/10 - 1º Exame - MEC]*

V1. Qual o valor do determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}?$$

A) -16, **B)** -12, **C)** 12, **D)** 16.

Exercício 40 *[2009/10 - 1º Exame - MEC]*

V1. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Designando por $\mathcal{S}$ o subconjunto de $\mathbb{R}^4$ formado pelas soluções da equação $Au = b$, qual é a afirmação verdadeira?

A) $\mathcal{S}$ é um plano (ou plano-2),
B) $\mathcal{S}$ é uma recta (ou plano-1),
C) $\mathcal{S}$ é um conjunto singular,
D) $\mathcal{S}$ é o conjunto vazio.

Exercício 41 *[2009/10 - 2º Exame - MEC]*

V1. Qual o valor do determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}?$$

A) -1, **B)** 0, **C)** 1, **D)** 16.

Exercício 42 *[2009/10 - 2º Exame - MEC]*

V1. Sejam α um número real, A e B duas matrizes quadradas da mesma ordem $n \geq 2$, e A^t e B^t as respectivas transpostas. Considere as seguintes afirmações:
I. $\det(\alpha A) = \alpha \det A$, II. $\det(A + B) = \det A + \det B$,
III. $\det(AB) = (\det A)(\det B)$, IV. $\det(A^t B) = (\det A)(\det B)$.
Qual é a lista completa das que são verdadeiras para qualquer escalar α e quaisquer matrizes A e B nas condições acima indicadas?

A) III e IV, **B)** II e III, **C)** I e II, **D)** I, III e IV.

Exercício 43 *[2009/10 - 2º Exame - MEC]*

V1. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & x \\ 1 & y & 2 & 3 \\ 1 & 2 & z & w \end{bmatrix},$$

em que x, y, z e w são números reais que se pretendem escolher por forma que o núcleo da matriz A seja gerado pelo vector $(1, 1, -1, -1)$.

Qual das seguintes é a escolha acertada para o vector (x, y, z, w)?

A) $(0, 3, 3, 0)$, **B)** $(0, 4, 3, 0)$, **C)** $(0, 4, 1, 2)$, **D)** $(0, 4, 3, 1)$.

Exercício 44 *[2010/11 - 1º Teste - MEEC]*

V1. Das quatro matrizes seguintes duas são invertíveis. Quais?

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

A) A_1 e A_4, **B)** A_2 e A_3, **C)** A_2 e A_4, **D)** A_3 e A_4.

Exercício 45 *[2010/11 - 1º Teste - MEEC]*

V1. Pretende-se calcular em função do parâmetro real α o determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1+\alpha & 1-\alpha^2 \\ -1 & 2 & 1-\alpha \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Qual é a resposta certa?

A) $1+\alpha$, **B)** $(1+\alpha)^2$, **C)** $1+\alpha^2$, **D)** $(1-\alpha)^2$.

Exercício 46 *[2010/11 - Exame - MEEC]*

V1. Determine o único valor de $a \in \mathbb{R}$ tal que a equação

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & a & -1 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

tem como conjunto de soluções uma recta em $\mathbb{R}^3$.

A) $a = 12$, **B)** $a = 8$, **C)** $a = 4$, **D)** $a = 2$.

Exercício 47 *[2010/11 - Exame - MEEC]*

V1. Sejam $b = (1, -1, 2)$ e $\mathcal{S} = \{(1, 1, 1)\} + L(\{(1, 2, 1)\})$. Qual das matrizes seguintes é a matriz dos coeficientes de um SEL escrito na forma $Au = b$ que tem $\mathcal{S}$ como conjunto de soluções?

A) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 6 & -4 & 2 \end{bmatrix}$, **B)** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix}$, **C)** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 6 & -2 & -2 \end{bmatrix}$, **D)** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -7 \\ 6 & -2 & -2 \end{bmatrix}$.

Exercício 48 *[2010/11 - Exame - MEEC]*

V1. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$. Qual é o valor do determinante $\det(A - \alpha I)$?

A) $(\alpha-3)^3$, **B)** $-(\alpha-1)^2(\alpha-3)$, **C)** $(\alpha-3)^2(\alpha-1)$, **D)** $-(\alpha-3)^2(\alpha-1)$.

Exercício 49 *[2000/1 - 1° Teste - LEC]*

V1. Sejam v_1 , v_2 , v_3 , v_4 e v_5 vectores não nulos de um espaço vectorial V e $W = L\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ o subespaço por eles gerado. Admitindo que:

(i) $v_2 \notin L\{v_1\}$, (ii) $v_3 \notin L\{v_1, v_2\}$, (iii) $2\,v_1 - 3\,v_2 + 3\,v_3 - 2\,v_4 = 0$, (iv) $v_5 \notin L\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$,

indique a dimensão de W .

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5

. . . .

Resolução:

Vejamos o que decorre de cada uma das condições dadas:

(i) Se $v_2 \notin L\{v_1\}$, então $\{v_1, v_2\}$ é um conjunto linearmente independente. Um conjunto de dois elementos não nulos (v_1 e v_2) só é linearmente dependente se um deles for um múltiplo não nulo do outro ou, o que é equivalente, $v_2 \in L\{v_1\}$.

(ii) Se $v_3 \notin L\{v_1, v_2\}$, então $\{v_1, v_2, v_3\}$ é linearmente independente. Considerando uma combinação linear dos três vectores que representa o vector zero:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0,$$

tem-se necessariamente $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Efectivamente, vejamos primeiro que $\alpha_3 = 0$. Se, por absurdo, fosse $\alpha_3 \neq 0$, ter-se-ia:

$$v_3 = \frac{1}{\alpha_3}(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) \in L\{v_1, v_2\},$$

o que é falso. Logo $\alpha_3 = 0$. Mas, nesse caso, a combinação linear inicial reduz-se a $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$, cuja única solução é $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Conclui-se então que $\{v_1, v_2, v_3\}$ é linearmente independente.

(iii) Se $2\,v_1 - 3\,v_2 + 3\,v_3 - 2\,v_4 = 0$, então $v_4 = (2v_1 - 3\,v_2 + 3\,v_3)/2 \in L\{v_1, v_2, v_3\}$. Consequentemente, $L\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = L\{v_1, v_2, v_3\}$.

(iv) Se $v_5 \notin L\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, então $v_5 \notin L\{v_1, v_2, v_3\}$, pela condição anterior. Usando um argumento semelhante ao usado em (ii), conclui-se que $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ é um conjunto linearmente independente.

Assim, o espaço W gerado por $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ coincide com o espaço gerado por $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e, sendo este linearmente independente, constitue uma base desse espaço. Consequentemente, a dimensão de W é 4, o número de elementos de uma sua base, pelo que a resposta correcta é **C**.

Exercício 50 *[2000/1 - 1° Teste - LEC]*

V1. A expressão "SEL" significa "sistema de equações lineares". Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Considere as seguintes afirmações:

I. O SEL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é possível e indeterminado para cada $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ sse A é invertível.

II. A tem característica igual a n sse o espaço gerado pelas linhas de A é $\mathbb{R}^n$.

III. A dimensão do núcleo de A é igual a zero sse as colunas de A são linearmente independentes.

IV. A é invertível sse o SEL $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem solução trivial.

A lista completa de afirmações verdadeiras é:

A) I , II e IV **B)** II e III **C)** I e IV **D)** II , III e IV

. . . .

Resolução:

Averiguemos da veracidade ou falsidade de cada uma das afirmações:

I. É falsa.
Se A é invertível, então o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem uma única solução, podendo esta obter-se por aplicação da inversa de A, A^{-1}, a ambos os membros da equação anterior, vindo $x = A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

II. É verdadeira.
A característica de uma matriz foi inicialmente definida como o número de pivôs da matriz que se obtém da original por eliminação de Gauss. Posteriormente concluiu-se que esse número era igual quer ao número de colunas linearmente independentes quer ao número de linhas linearmente independentes (ver [LTM, Teorema 2.27]).

III. É verdadeira.
A dimensão do núcleo de uma matriz é o número de colunas sem pivô da matriz que se obtém da original por eliminação de Gauss. Esse número é zero sse essa matriz não tem colunas sem pivô, ou seja, sse as colunas de A são linearmente independentes (ver [LTM, Teorema 2.27]).

IV. É verdadeira.
Uma matriz quadrada A de ordem n é invertível se e só se é não singular ou, o que é equivalente, tem n pivôs, ou ainda, a sua característica é igual a n, $\operatorname{car} A = n$. Por outro lado, o SEL $Ax = 0$ tem solução trivial se e só se o núcleo de A é constituído apenas pelo vector zero, $N_A = \{0\}$. Como $\operatorname{car} A = n - \dim N_A$, segue-se que A é invertível se e só se o SEL $Ax = 0$ tem solução trivial.

Assim, a resposta correcta é **D**.

Exercício 51 *[2000/1 - 1° Teste - LEC]*

V1. Seja $\mathcal{P}_3$ o espaço linear real dos polinómios de variável real com grau menor ou igual a 3, e $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, $x \in \mathbb{R}$, um elemento genérico de $\mathcal{P}_3$. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathcal{P}_3$ e identifique os que são subespaços vectoriais de $\mathcal{P}_3$.

I O conjunto dos polinómios p com grau igual a 3 tais que $a_0 + 4a_1 - a_3 = 0$.

II O conjunto dos polinómios p com grau menor ou igual a 2 tais que $-a_0 + a_2 + 4a_3 = 1$.

III O conjunto dos polinómios p com grau menor ou igual a 3 tais que $-2a_0 + a_1 + 3a_3 = 0$.

IV O conjunto dos polinómios p com grau menor ou igual a 2 tais que $a_1 - 7a_2 + 4a_3 = 0$.

A lista completa de subespaços vectoriais é:

A) III e IV **B)** III **C)** II e III **D)** I

. . . .

Resolução:

Quais as condições para que um subconjunto Λ de $\mathcal{P}_3$, caracterizado por os coeficientes $a_0 \dots a_3$ dos seus elementos satisfazerem uma relação da forma:

$$\lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = \beta, \quad \lambda_0 \dots \lambda_3, \beta \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

seja um subespaço de $\mathcal{P}_3$?

A resposta a esta questão é a seguinte: Λ é um subespaço de $\mathcal{P}_3$, se e só se $\beta = 0$, independentemente dos valores de $\lambda_0 \dots \lambda_3, \beta \in \mathbb{R}$. Para ver que assim é temos apenas que verificar que as operações de adicão e de multiplicação por escalares são fechadas. Sejam então $p, \tilde{p}$ elementos de Λ, em que portanto

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3, \quad \tilde{p}(x) = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 x + \tilde{a}_2 x^2 + \tilde{a}_3 x^3, \quad x \in \mathbb{R}$$

e

$$\lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = \beta, \quad \lambda_0 \tilde{a}_0 + \lambda_1 \tilde{a}_1 + \lambda_2 \tilde{a}_2 + \lambda_3 \tilde{a}_3 = \beta.$$

Para quaiquer $\alpha, x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$(p+\tilde{p})(x) = (a_0+\tilde{a}_0)+(a_1+\tilde{a}_1)x+(a_2+\tilde{a}_2)x^2+(a_3+\tilde{a}_3)x^3, \quad (\alpha p)(x) = (\alpha a_0)+(\alpha a_1)x+(\alpha a_2)x^2+(\alpha a_3)x^3$$

e

$$\lambda_0(a_0+\tilde{a}_0)+\lambda_1(a_1+\tilde{a}_1)+\lambda_2(a_2+\tilde{a}_2)+\lambda_3(a_3+\tilde{a}_3) = 2\beta, \quad \lambda_0(\alpha a_0)+\lambda_1(\alpha a_1)+\lambda_2(\alpha a_2)+\lambda_3(\alpha a_3) = \alpha\beta.$$

Daqui resulta que (3) é satisfeita se e só se $\beta = 0$, quaisquer que sejam $\lambda_0, \dots, \lambda_3$.

Relativamente às alternativas dadas podemos concluir imediatamente que:

II é falsa, III e IV são verdadeiras.

Falta apenas ver que I é falsa. Basta ver que, por exemplo, sendo $p(x) = 5+5x^3$ e $\tilde{p}(x) = 5/4x+5x^3$, ambos satisfazem a relação dada e $(p - \tilde{p})(x) = 5 - 5/4x$ é um polinómio de grau 1 e não de grau 3.

Assim, a resposta correcta é **A**.

Exercício 52 *[2000/1 - 1° Teste - LEC]*

V1. Considere o subespaço $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ constituído pelas matrizes da forma $\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$. Uma base para o subespaço $\mathcal{S}$ é o conjunto:

A) $\left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

B) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$

C) $\left\{ \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}$

D) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$

....

Resolução:

Comecemos por ver qual a dimensão do subespaço $\mathcal{S}$. Consideremos a base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ formada pelas matrizes

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ora,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} = a(E_{11} - E_{22}) + bE_{12} + cE_{21},$$

o que significa que $\mathcal{S}$ é gerado pelas matrizes $E_{11} - E_{22}$, E_{12} e E_{21}, pelo que $\dim \mathcal{S} \leq 3$. É fácil ver que o conjunto destas 3 matrizes é linearmente independente e, portanto, $\dim \mathcal{S} = 3$. Podemos pois eliminar B (com 1 elemento) e C (com 4 elementos) dos conjunto de respostas certas.

Agora podemos também eliminar a resposta D, uma vez que o espaço gerado pelas matrizes aí indicadas é formado por matrizes cujo elemento da linha 2 e coluna 1 é nulo e, portanto não pode gerar as matrizes de S com $c \neq 0$. Por exclusão de partes a resposta certa é **A**. Vejamos que assim é:

- Já sabemos que $\dim \mathcal{S} = 3$, pelo que o conjunto dado em A, tendo 3 elementos, será uma base de $\mathcal{S}$ se gerar $\mathcal{S}$. Mas isso é fácil de verificar, uma vez que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} = \frac{a}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} - b\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{b+c}{3}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercício 53 *[2000/1 - 1° Teste - LEC]*

V1. Seja $A \in \mathbb{R}^{p\times q}$ e A^T a sua transposta. Suponha que:

I O núcleo de A^T tem dimensão 3,

II Existe um vector v em $\mathbb{R}^p$ formando uma base do espaço das linhas de A^T,

III O núcleo de A tem dimensão 4.

Então os valores de p e q são :

A) $p=5$ **e** $q=5$ **B)** $p=5$ **e** $q=4$ **C)** $p=4$ **e** $q=4$ **D)** $p=4$ **e** $q=5$

....

Resolução:

Para obter a resposta basta ter em conta os seguintes resultados, o primeiro dos quais é óbvio e os outros podem ser vistos em [LTM, Teoremas 2.27 e 2.32]: Sendo $X \in \mathbb{K}^{m\times n}$ e designando por N_X, C_X e L_X o núcleo, o espaço das colunas e o espaço das linhas de X, respectivamente, tem-se:

1. $\dim C_X = \dim L_{X^T}$; 2. $\dim C_X = \dim L_X$; 3. $\dim N_X + \dim C_X = n$.

Eefectivamente, as afirmações dadas podem ser escritas de forma equivalente como se segue:

I $\Leftrightarrow \dim N_{A^T} = 3$;

II $\Leftrightarrow \dim L_{A^T} = 1$;

III $\Leftrightarrow \dim N_A = 4$.

Então, tendo em conta os resultados acima mencionados, vem:

$$p - 3 = p - \dim N_{A^T} = \dim C_{A^T} = \dim L_{A^T} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad p = 4$$

e

$$q - 4 = q - \dim N_A = \dim C_A = \dim L_{A^T} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad q = 5.$$

Assim, a resposta correcta é **D**.

Exercício 54 *[2000/1 - 1°Exame - LEC]*

V1. Seja $A \in \mathbb{R}^{p\times q}$ e A^T a sua transposta. Suponha que:

I O espaço das linhas de A^T tem dimensão 1.

II núcleo de A tem dimensão 4.

III O núcleo de A^T tem dimensão 2.

Então os valores de p e q são:

A) $p = 5$ **e** $q = 3$ **B)** $p = 2$ **e** $q = 5$ **C)** $p = 3$ **e** $q = 5$ **D)** $p = 5$ **e** $q = 4$

. . . .

Resolução:

Este exercícíio pode ser resolvido usando um método em tudo semelhante ao usado no Exercício 53. Procedendo por analogia, tem-se
I $\Leftrightarrow \dim L_{A^T} = 1$;
II $\Leftrightarrow \dim N_A = 4$;
III $\Leftrightarrow \dim N_{A^T} = 2$.
Então, tendo em conta os resultados mencionados na resolução do Exercício **53**, vem:

$$p - 2 = p - \dim N_{A^T} = \dim L_{A^T} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad p = 3$$

e

$$q - 4 = q - \dim N_A = \dim C_A = \dim L_{A^T} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad q = 5.$$

Assim, a resposta correcta é **C**.

Exercício 55 *[2000/1 - 1°Exame - LEC]*

V1. Sejam v_1, v_2, v_3, v_4 e v_5 vectores não nulos de um espaço linear V e $W = L\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ o subespaço por eles gerado. Admitindo que:

i. $v_2 \notin L\{v_1\}$,

ii. $2v_1 - 3v_2 + 2v_3 = 0$,

iii. $v_4 \notin L\{v_1, v_2, v_3\}$,

iv. $v_5 \notin L\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$,

qual a dimensão de W?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 2

. . . .

Resolução:

Este exercícíio pode ser resolvido usando um método em tudo semelhante ao usado no Exercício 49. Procedendo por analogia, tem-se
i $\Leftrightarrow$ $\{v_1, v_2\}$ é linearmente independente;
ii $\Leftrightarrow$ $\{v_1, v_2, v_3\}$ é linearmente dependente $\stackrel{i}{\Rightarrow}$ $L\{v_1, v_2, v_3\} = L\{v_1, v_2\}$;
iii $\stackrel{ii}{\Rightarrow}$ $v_4 \notin L\{v_1, v_2\}$ $\Leftrightarrow$ $\{v_1, v_2, v_4\}$ é linearmente independente;
iv $\stackrel{iii}{\Rightarrow}$ $v_5 \notin L\{v_1, v_2, v_4\}$ $\Leftrightarrow$ $\{v_1, v_2, v_4, v_5\}$ é linearmente independente.
Conclui-se então que $W = L\{v_1, v_2, v_4, v_5\}$ e, sendo $\{v_1, v_2, v_4, v_5\}$ linearmente independente, tem-se $\dim W = 4$.

Assim a resposta correcta é **B**.

Exercício 56 *[2000/1 - 1°Exame - LEC]*

V1. Chama-se traço de uma matriz quadrada A, representando-se por $\operatorname{tr} A$, à soma dos elementos da diagonal principal. Uma base para o espaço linear real das matrizes de ordem 2 com traço igual a zero ($\operatorname{tr} A = 0$) é o conjunto:

A) $\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

B) $\left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

C) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$

D) $\left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \right\}$

....

Resolução:

Embora formulado de maneira diferente o subespaço $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aqui considerado é o mesmo que o assim designado no Exercício 52. Efectivamente, as matrizes de ordem 2 com traço nulo, são as que pode ser escritas na forma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}.$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Usando o mesmo tipo de argumentação, concluimos primeiro que $\dim \mathcal{S} = 3$, pelo que qualquer base de $\mathcal{S}$ tem 3 elementos. Podemos agora eliminar sucessivamente três das alternativas de resposta:

- A - por ter 4 elementos ; - D - por ter apenas 1 elemento; - C - por não pertencerem ao espaço gerado por este conjunto as matrizes de $\mathcal{S}$ com $c \neq 0$ (qualquer combinação linear dos elementos do conjunto dado terá o valor zero na posição 21).

Assim, a resposta correcta só pode ser **B**. Um argumento semelhante ao usado no Exercício 52 permite mostrar que assim é.

Exercício 57 *[2000/1 - 2°Exame - LEC]*

V1. Seja A uma matriz real $n\times n$ invertível e B uma matriz real $n\times n$ arbitrária. Considere as seguintes afirmações e indique qual delas é falsa para quaisquer matrizes A, B nas condições indicadas:

A) AB é invertível sse $\operatorname{car} B = n$.

B) O núcleo de B é o conjunto $\{\mathbf{0}\}$ sse $\frac{\det B}{\det A} \neq 0$.

C) $\det(AB) \neq 0$ sse o núcleo de B é constituído pelo vector zero.

D) As colunas de B são linearmente dependentes sse a matriz B é invertível.

....

Resolução:

Antes de começarmos a averiguar da veracidade ou falsidade de cada uma das afirmações no enunciado convém ter presente que, para uma matriz quadrada X de ordem n, são equivalentes as seguintes proposições:
1) X é invertível;

2) X é não singular;
3) $N_X = \{0\}$;
4) car $X = n$;
5) $\det X \neq 0$.

Analisemos agora cada uma das afirmações no enunciado:

A é verdadeira.
Sendo A invertível, se $\operatorname{car} B = n$, então B é invertível e também AB ínvertível, pois o produto de matrizes invertíveis é invertível, e a sua inversa pode ser calculada por $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (ver o Exercício **5**). Por outro lado, sendo A invertível, se AB for invertível, então $N_B = \{0\}$ pois, caso contrário, ter-se-ia $N_{AB} \neq 0$ (qualquer elemento de N_B pertence a N_{AB}) e, portanto, AB não seria invertível. Mas, $N_B = \{0\}$ é equivalente a $\operatorname{car} B = n$.

B é verdadeira.
Tendo em conta que $\det A \neq 0$, por A ser invertível, e que o determinante de um produto é o produto dos determinantes, tem-se

$$N_B = \{0\} \;\Leftrightarrow\; \det B = \frac{\det(AB)}{\det A} \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\det B}{\det A} \neq 0.$$

C é verdadeira.
Tendo em conta que $\det A \neq 0$, por A ser invertível, e que o determinante de um produto é o produto dos determinantes, tem-se

$$\det(AB) \neq \{0\} \;\Leftrightarrow\; \det B = \frac{\det(AB)}{\det A} \neq 0 \;\Leftrightarrow\; N_B = \{0\}.$$

D é falsa. Efectivamente,

$$\text{As colunas de } B \text{ são linearmente dependentes} \;\Leftrightarrow\; \operatorname{car} B \neq n \;\Leftrightarrow\; B \text{ não é invertível.}$$

Assim, a afirmação falsa é a **D**.

Exercício 58 *[2000/1 - 2º Exame - LEC]*

V1. Seja A uma matriz $3{\times}4$ cujo núcleo admite uma base formada pelo vector $(2,0,0,6)$. Considere a seguinte lista de afirmações :

I. $\dim(\text{Espaço das linhas de } A) = 3$

II. $\dim(\text{Núcleo de } A) = 1$

III. $\dim\left(\text{Núcleo de } A^T\right) = 2$

IV. $\dim\left(\text{Espaço das colunas de } A^T\right) = 2$

Indique todas as conclusões que pode inferir.

A) I , III e IV **B)** I e II **C)** II e IV **D)** I e III

. . . .

Resolução:

Trata-se aqui de relacionar as quantidades resultantes das dimensões do núcleo, dos espaços das linhas e das colunas de uma matriz e da sua transposta. Convém para tal ter em conta que (X é uma matriz arbitrária):

1. O espaço das linhas (respectivamente, colunas) de uma matriz coincide com os espaço das colunas (linhas) da sua transposta, pelo que:

$$\dim C_X = \dim L_{X^T}, \quad \dim L_X = \dim C_{X^T}.$$

2. As dimensões dos espaços das linhas e das colunas de uma matriz coincidem e são iguais ao número de pivôs da matriz que se obtém da original por eliminação de Gauss, pelo que:

$$\dim C_X = \dim L_X = \dim C_{X^T} = \dim L_{X^T}.$$

3. A soma das dimensões do núcleo e do espaço das linhas (ou colunas) de uma matriz é igual ao número de colunas dessa matriz:

$$\dim N_X + \dim C_X = n \quad (n \text{ representa o número de colunas de } X)$$

De acordo com os dados do problema, para a matriz A temos:

$$\dim N_A = 1, \dim C_A = \dim L_A = 4 - 1 = 3,$$

uma vez que A tem 4 colunas e o núcleo é gerado por um vector não nulo. Para a transposta de A, A^T, temos:

$$\dim C_{A^T} = \dim L_{A^T} = \dim C_A = \dim L_A = 3, \dim N_{A^T} = 3 - 3 = 0,$$

uma vez que A^T tem 3 colunas.

Assim, I e II são verdadeiras enquanto que III e IV são falsas, pelo que a resposta correcta é **B**.

Exercício 59 *[2005/6 - 1° Teste - LEEC]*

V1. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Considere o subespaço $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^{3\times 3}$ formado por todas as matrizes M tais que

$$M = M^t \quad \text{e} \quad PM = (PM)^t \quad \text{com } P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Qual das matrizes não pertence ao subespaço $\mathcal{S}$?

A) A **B)** B **C)** C **D)** D

....

Resolução:

É muito fácil escrever as matrizes $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que satisfazem a condicão $M = M^t$, por serem as matrizes que exibem simetria relativamente à diagonal principal: são as da forma

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}.$$

em que $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.

Exigindo que uma matriz simétrica M satisfaça também a condição $PM = (PM)^T$, obtém-se a igualdade seguinte:

$$PM = \begin{bmatrix} c & e & f \\ b & d & e \\ a & b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & b & a \\ e & d & b \\ f & e & c \end{bmatrix} = (PM)^T,$$

pelo que necessariamente $a = f$ e $b = e$.

Conclui-se então que as matrizes $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que satisfazem as duas condições, $M = M^t$ e $PM = (PM)^T$, são as que exibem simetria relativamente s diagonais principal e secundária, ou seja, as que podem ser escritas na forma

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & b \\ c & b & a \end{bmatrix}$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Das matrizes dadas apenas D não pertence a esta classe, por ter valores diferentes nas posições 11 e 33.

Assim, a resposta correcta é **D**.

Exercício 60 *[2005/6 - 1° Teste - LEEC]*

V1. Sejam $A \in \mathbb{R}^{p\times q}$ e A^t a sua transposta. Suponha que:

(i) $p > q$, (ii) $\dim L_A = 3$, (iii) $N_A = \{0\}$, (iv) $\dim N_{A^t} = 2$.

(L_A e N_A representam o espaço gerado pelas linhas de A e o núcleo (ou espaço nulo) de A, repectivamente).

Então os valores de p e q são :

A) $p = 6$ **e** $q = 5$ **B)** $p = 5$ **e** $q = 4$ **C)** $p = 5$ **e** $q = 3$ **D)** $p = 4$ **e** $q = 3$

. . . .

Resolução:

Tal como no Exercício 53, para obter a resposta basta ter em conta os seguintes resultados válidos para qualquer matriz $X \in \mathbb{K}^{m\times n}$:

1. $\dim C_X = \dim L_{X^T}$; 2. $\dim C_X = \dim L_X$; 3. $\dim N_X + \dim C_X = n$,

em que N_X, C_X e L_X representam o núcleo, o espaço das colunas e o espaço das linhas de X, respectivamente.

Efectivamente, neste caso, tem-se:

$$\begin{aligned} q &= \text{número de colunas de } A \\ &= \dim N_A + \dim C_A \\ &= \dim N_A + \dim L_A = 0 + 3 = 3 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} p &= \text{número de colunas de } A^T \\ &= \dim N_{A^T} + \dim C_{A^T} \\ &= \dim N_{A^T} + \dim L_A = 2 + 3 = 5. \end{aligned}$$

Assim, a resposta correcta é **C**.

Exercício 61 *[2005/6 - 1° Exame - LEEC]*

V2. Sejam v_1, v_2, v_3, v_4 e v_5 vectores não nulos de um espaço linear V e $W = L\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ o subespaço por eles gerado. Admitindo que:

i. $v_1 + 2\,v_2 = 0$,

ii. $v_3 \notin L\{v_1, v_2\}$,

iii. $v_1 + v_2 - 2\,v_3 - 2\,v_4 = 0$,

iv. $v_5 \notin L\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$,

qual a dimensão de W?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5

. . . .

Resolução:

Este exercício pode ser resolvido usando um método em tudo semelhante ao usado no Exercício 49. Procedendo por analogia, tem-se:

- De (i) conclui-se que $L\{v_1, v_2\} = L\{v_1\}$;
- Tendo em conta (i), de (ii) conclui-se que $L\{v_1, v_2, v_3\} = L\{v_1, v_3\}$ e que $\{v_1, v_3\}$ é linearmente independente;
- Tendo em conta os resultados anteriores, de (iii) conclui-se que $L\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = L\{v_1, v_3\}$;
- Tendo em conta os resultados anteriores, de (iv) conclui-se que $L\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} = L\{v_1, v_3, v_5\}$ e que $\{v_1, v_3, v_5\}$ é linearmente independente.

Assim, o espaço W gerado por $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ coincide com o espaço gerado por $\{v_1, v_3, v_5\}$ e, sendo este linearmente independente, constitui uma base desse espaço. Consequentemente, a dimensão de W é 3, pelo que a resposta correcta é **B**.

Exercício 62 *[2005/6 - 1° Exame - LEEC]*

V1. Considere o subespaço $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ constituído pelas matrizes de forma $\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$. Uma base do subespaço $\mathcal{S}$ é o conjunto:

A) $\left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

B) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$

C) $\left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

D) $\left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \right\}$

. . . .

Resolução:

O subespaço de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aqui considerado é o mesmo do Exercício 53, pelo que $\dim \mathcal{S} = 3$. Como qualquer base de $\mathcal{S}$ tem 3 elementos, podemos desde já eliminar A e B do conjunto de respostas certas. O conjunto dado em D também não é uma base de $\mathcal{S}$, uma vez que o espaço gerado por esse conjunto é o das matrizes da forma:

$$\begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix}$$

com $x, y, z \in \mathbb{R}$, não sendo possível, por exemplo, por combinação linear dos seus elementos obter os elemento de $\mathcal{S}$ com $b \neq c$.

Falta apenas confirmar que o conjunto em C é uma base de $\mathcal{S}$, para o que é suficiente mostrar que esse conjunto gera $\mathcal{S}$ (ou que é linearmente independente), o que decorre de:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} = \frac{a}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{b-c}{3}\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, a resposta correcta é **C**.

Exercício 63 *[2005/6 - 1° Exame - LEEC]*

V1. Dado um sistema de equações lineares escrito na forma $Au = b$, em que se supõe que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ não é invertível e $b \in \mathbb{R}^n$, seja B a matriz aumentada do sistema de equações, $B = [\, A \vdots b\,]$. Considere as seguintes afirmações:

I. O sistema $Au = b$ é impossível ou indeterminado, dependendo de $b \in \mathbb{R}^n$.

II. $\operatorname{car} A < n$.

III. $\operatorname{car} A < \operatorname{car} B$ para qualquer $b \in \mathbb{R}^n$.

IV. Existe $b \in \mathbb{R}^n$ tal que $Au = b$ tem uma única solução.

A lista completa de afirmações verdadeiras é

A) I e II **B)** I, II e III **C)** IV **D)** II e IV

. . . .

Resolução:

Analisemos cada uma das afirmações. Por facilidade de exposição introduzamos a seguinte notação: Seja U (respectivamente, V) a matriz que se obtém por eliminação de Gauss a aplicada à matriz A (B). As primeiras n colunas de V constituem a matriz U.

I é verdadeira.

Sendo A quadrada e não invertível, a matriz U tem (pelo menos) uma linha nula. Então só há duas possibilidades: (i) são nulos os elementos na útima coluna de V nas posições correspondentes (das mesmas ordens) às linha nulas de U e, nesse caso, o sistema é possível e indeterminado; (ii) é não nulo pelo menos um dos na útima coluna de V nas posições correspondentes (das mesmas ordens) às linha nulas de U e, nesse caso, o sistema é impossível.

II é verdadeira.

A matriz U tem (pelo menos) uma linha nula e, portanto, menos de n pivôs, pelo que a sua característa (que, por definição, é também a característica de A) é inferior a n.

III é falsa.

De acordo com o explicado a propósito de I, só há duas possibilidades: (i) são nulos os elementos na útima coluna de V nas posições correspondentes (das mesmas ordens) às linha nulas de U e, nesse caso, $\operatorname{car} A = \operatorname{car} U = \operatorname{car} V = \operatorname{car} B$; (ii) é não nulo pelo menos um dos na útima coluna de V nas posições correspondentes (das mesmas ordens) às linha nulas de U e, nesse caso, $\operatorname{car} A = \operatorname{car} U < \operatorname{car} V = \operatorname{car} B$ (pois V tem mais um pivô que U).

IVé falsa.

Sendo I verdadeira, IV só pode ser falsa.

Assim, a resposta correcta é **A**.

Exercício 64 *[2005/6 - 2º Exame - LEEC]*

V1. Considere o subespaço de $\mathbb{R}^3$:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\}$$

Uma base de S é o conjunto:

A) {(3,0,1), (0,3,2)} **B)** {(3,0,-1), (0,3,2)} **C)** {(3,0,-1), (0,3,-2)} **D)** {(3,0,1), (0,-3,2)}

....

Resolução:

Comecemos por notar que cada um dos conjuntos dados é linearmente independente, pois qualquer deles é tal que cada um dos dois vectores que o constituem tem uma componente nula em posições diferentes. Assim, potencialmente qualquer deles poder ser uma base de S. Para saber qual é base podemos proceder do seguinte modo: fixamos uma (qualquer) base em S e analisamos qual dos conjuntos é tal que cada um dos seus elementos pode ser escrito como combinação linear dos elementos dessa base.

Ober uma base de S é facil, já que:

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\} \\ &= \{(-2y - 3z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(-2, 1, 0) + z(-3, 0, 1) : y, z \in \mathbb{R}\} = L\{(-2, 1, 0), (-3, 0, 1)\}. \end{aligned}$$

Pela mesma razão já antes invocada, o conjunto formado por $s_1 = (-2, 1, 0)$ e $s_2 = (-3, 0, 1)$ é linearmente independente e, portanto, é uma base de S.

Sendo A a matriz cujas colunas contêm as componentes dos vectores s_1 e s_2, $A = [s_1\ s_2]$, um vector $b \in \mathbb{R}^3$ (escrito como vector coluna) pertence ao espaço gerado por s_1 e s_2 se o sistema de equações $Au = b$ for possível. Em vez de anlisar para cada um dos vectores dados, podemos fazê -lo de uma só vez considerando a matriz aumentada

$$\left[A \vdots A_1 A_2 B_1 B_2 C_1 C_2 D_1 D_2\right]$$

e procedendo à eliminação de Gauss:

$$\left[\begin{array}{cc|cccccccc} -2 & -3 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 2 & -1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cccccccc} -2 & -3 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3/2 & 3/2 & 3 & 3/2 & 3 & 3/2 & 3 & 3/2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 2 & -1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cc|cccccccc} -2 & -3 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3/2 & 3/2 & 3 & 3/2 & 3 & 3/2 & 3 & 3/2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

Daqui se conclui que apenas o conjunto dado em **C** é tal que qualquer dos seus elementos é uma combinação linear de s_1 e s_2, pelo que apenas o conjunto dado em **C** é uma base de S.

Assim, a resposta correcta é **C**.

Exercício 65 *[2005/6 - 2º Exame - LEEC]*

V1. Sejam S e U os subespaços de $\mathbb{R}^3$ definidos como se segue:

$$S = L(\{(1, 2, 3), (-3, 7, 1), (19, 10, -13)\}), \quad U = L(\{(1, -11, -7), (4, -5, 2)\}).$$

Designando por a, b as dimensões de $S \cap U$ e $S + U$, respectivamente, indique qual o valor do par (a, b):

A) (1,3) **B)** (1,4) **C)** (2,2) **D)** (2,3)

....

Resolução:

Convém começar por notar que as dimensões dos 4 subespaços: $S, U, S \cap U$ e $S + U$ não são independentes, encontrando-se relacionadas por:

$$\dim(S+U) + \dim(S \cap U) = \dim S + \dim U$$

(ver [LTM, Teorema 3.19]). Basta pois saber calcular 3 destas dimensões. Uma delas é muito fácil: $\dim U = 2$, pois os vectores que geram U não são um múltiplo um do outro. Tendo em conta que $S+U$ é o espaço por cinco vectores (os 3 que geram S e os dois que geram U) podemos saber de uma só vez as dimensões de S e de $S+U$, considerando uma matriz que tem como 3 primeiras colunas as componentes do vectores que geram S e nas restantes duas colunas as componentes do vectores que geram U, e usando o método de Gauss para saber quais as colunas linearmente independentes. Note-se ainda que $\dim(S+U) \leq 3$, pois $S+U$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$. Tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 19 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 10 & -11 & -5 \\ 3 & 1 & -13 & -7 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 19 & 1 & 4 \\ 0 & 13 & -28 & -13 & -13 \\ 0 & 10 & -70 & -10 & -10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 19 & 1 & 4 \\ 0 & 13 & -28 & -13 & -13 \\ 0 & 0 & -371/13 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donde se conclui que as 3 primeiras colunas são linearmente independentes, pelo que $b = \dim S = \dim(S+U) = 3$.

Tendo em conta a relação invocada no início, vem $a = \dim(S \cap U) = 2$, pelo que a resposta correcta é **D**.

Exercício 66 *[2006/7 - 1° Teste - LEC/MEC]*

V1. Considere o subespaço $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^{3\times 3}$ formado por todas as matrizes que são triangulares superiores e que têm traço nulo.

Qual a dimensão de $\mathcal{S}$?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6

NOTA: o *traço* de uma matriz quadrada é a soma dos elementos da diagonal principal.

....

Resolução:

É muito fácil escrever a forma geral de uma matriz triangular superior de ordem 3. Efectivamente, estas são da forma

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

com $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Se exigirmos que uma tal matriz tem traço nulo, o que neste caso significa que $a + d + f = 0$, então podemos escrever a forma geral das matrizes que satisfazem as duas condições, vindo

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & -(a+d) \end{bmatrix} = a(E_{11} - E_{33}) + bE_{12} + cE_{13} + d(E_{22} - E_{33}) + eE_{23}$$

com $a, b, c, d, e \in \mathbb{K}$ e em que E_{ij} é a matriz que tem todos os elementos nulos com excepção do da posição ij que tem o valor 1. Da representação anterior facilmente se conclui que o conjunto $\{E_{11} - E_{33}, E_{12}, E_{13}, E_{22} - E_{33}, E_{23}\}$ é linearmente independente e que este conjunto é uma base do subespaço de $\mathbb{R}^{3\times}$ das matrizes triangulares superiores e que têm traço nulo, pelo que a dimensão deste subespaço é 5.

Assim, a resposta correcta é **C**.

Exercício 67 *[2006/7 - 1° Teste - LEC/MEC]*

V1. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ e considere as seguintes afirmações:

I. As linhas de A formam um conjunto linearmente independente em $\mathbb{R}^3$;

II. As colunas de A formam um conjunto linearmente independente em $\mathbb{R}^3$;

III. A característica de A é igual a 3;

IV. O sistema de equações lineares $Au = b$ tem uma única solução, qualquer que seja $b \in \mathbb{R}^3$.

Qual é a lista completa de afirmações verdadeiras?

A) I e II **B)** I, II e III **C)** III **D)** Todas

....

Resolução:

A veracidade de qualquer das afirmações pode ser confirmada ou infirmada recorrendo ao método de eliminação de Gauss. Efectivamente, designando por U a matriz triangular superior que se obtém por eliminação de Gauss aplicada a A, tem-se:

– são linearmente independentes as linhas de A que dão origem às linhas de U com pivô;

– são linearmente independentes as colunas de A que correspondem (na ordem) às linhas de U com pivô;

– A característica de A é igual ao número de pivôs de U (elementos não nulos da diagonal principal;

– O SEL $Au = b$ tem uma única solução qualquer que seja $b \in \mathbb{R}^3$ se e só se a matriz U não tem zeros na diagonal principal.

Implementando-o para a matriz dada, obtém-se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = U$$

pelo que:

I é verdadeira (todas as linhas de U têm pivôs), II é verdadeira (todas as colunas de U têm pivôs), III é verdadeira (o número de pivôs é igual quer ao número de linhas quer ao número de colunas), IV é verdadeira (U não tem zeros na diagonal principal).

Assim, todas as afirmações dadas são verdadeiras, sendo a resposta correcta **D**.

Exercício 68 *[2006/7 - 1° Teste - LEC/MEC]*

V1. Sejam S e U os subespaços de $\mathbb{R}^3$ definidos como se segue:

$$S = L(\{(1,2,4), (-3,7,1), (-1,11,9)\}), \quad U = L(\{(4,-5,3), (1,1,1)\}).$$

Designando por a e b as dimensões de $S \cap U$ e $S + U$, respectivamente, indique qual o valor do par (a, b):

A) (1,3) **B)** (1,4) **C)** (2,2) **D)** (2,3)

....

Resolução:

Trata-se de uma questão em tudo semelhante à do Exercício 65. Tendo em conta que

$$\dim(S+U)+\dim(S\cap U)=\dim S+\dim U$$

(ver [LTM, Teorema 3.19]) é suficiente calcular a dimensão de três dos subespaços $S, U, S\cap U$ e $S+U$, vindo a quarta pela relação anterior. Procedendo do mesmo modo que no Exercício 65, é claro que $\dim U = 2$, sendo as dimensões de S e $S+U$ determinadas pelo método de eliminação de Gauss aplicada à matriz que tem nas primeiras três colunas as componentes dos geradores de S e nas restantes as componentes dos geradores de U:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 11 & -5 & 1 \\ 4 & 1 & 9 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 13 & 13 & -13 & -1 \\ 0 & 13 & 13 & -13 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 13 & 13 & -13 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Daqui se conclui que $\dim S = 2$, pois as três primeiras colunas formam um conjunto linearmente dependente, sendo linearmente independente o conjunto das duas primeiras, e que $b = \dim(S+U) = 3$, pois o maior subconjunto linearmente independente das colunas da matriz considerada é formado pelas colunas 1, 2 e 5. Da relação original conclui-se então que $a = \dim(S\cap U) = 1$, pelo que a resposta correcta é **A**.

Exercício 69 *[2006/7 - 1° Exame - LEC/MEC]*

V1. Considere os seguintes vectores de $\mathbb{R}^3$: $v_1 = (1,2,1)$, $v_2 = (1,2,3)$ e $v_3 = (1,2,2)$.
Qual dos vectores a seguir indicados não pertence ao subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por $\{v_1, v_2, v_3\}$?

A) (0,0,0) **B)** (0,0,1) **C)** (1,2,5) **D)** (0,1,0)

....

Resolução:

Uma vez que o vector zero pertence a qualquer subespaço de $\mathbb{R}^3$, podemos imediatamente afirmar que a alternativa A não é a resposta correcta.

Um vector $b \in \mathbb{R}^3$ pertence ao espaço gerado por $\{v_1, v_2, v_3\}$ se e só esse vector pertencer ao espaço gerado pelas colunas da matriz $A = [v_1\ v_2\ v_3]$, em que se consdera a representação dos vectores de $\mathbb{R}^3$ como vectores coluna. Ora, um vector $b \in \mathbb{R}^3$ pertence ao espaço gerado pelas colunas da matriz A se e só se o SEL $Au = b$ é possível. Podemos, pois, recorrer ao método de eliminação de Gauss para saber qual dos vectores dados é tal que o SEL $Au = b$ é impossível. Podemos até considerar todos os vectores dados de uma só vez, usando a matriz aumentada $[A \vdots b_B\ b_C\ b_D]$, em que os vectores b_B, b_C e b_D são dados nas alternativas B, C e D, respectivamente. Implementando a eliminação de Gauss para esta matriz aumentada, vem

$$[A \vdots b_B\ b_C\ b_D] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & \vdots & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & \vdots & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & \vdots & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \vdots & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Daqui se conclui que apenas o SEL $Au = b_D$ é impossível, por ser diferente de zero, após a eliminação de Gauss, a terceira componente do vector com origem em b_D.

Assim, a resposta correcta é **D**.

Exercício 70 *[2006/7 - 1° Exame - LEC/MEC]*

V1. Seja $\mathcal{P}_2$ o espaço real dos polinómios definidos em $\mathbb{R}$ de grau menor ou igual a 2, considere os elementos de $\mathcal{P}_2$ definidos por:

$$p_1(t) = 1, \quad p_2(t) = (1-t)(1+t), \quad p_3(t) = (1-t)(1+2t), \quad p_4(t) = t(1-t), \quad t \in \mathbb{R},$$

e os seguintes subconjuntos de $\mathcal{P}_2$:

$$P_1 = \{p_1, p_2\}, \quad P_2 = \{p_1, p_2, p_3\}, \quad P_3 = \{p_2, p_3, p_4\}, \quad P_4 = \{p_1, p_2, p_4\}.$$

Qual a lista completa de conjuntos que constituem bases de $\mathcal{P}_2$?

A) P_1 e P_2 **B)** P_2 e P_3 **C)** P_2 e P_4 **D)** P_3 e P_4

....

Resolução:

Podemos começar por eliminar a alternativa A, uma vez que sendo $\dim \mathcal{P}_2 = 3$ qualquer base de $\mathcal{P}_2$ tem 3 elementos.

Uma forma eficiente de resolver este exercício é recorrer à noção de isomorfismo entre espaços lineares. Como $\dim \mathcal{P}_2 = 3$, este espaço é isomorfo a $\mathbb{R}^3$, sendo um isomorfismo de $\mathcal{P}_2$ em $\mathbb{R}^3$ aquele que faz corresponder a cada polinómio de $\mathcal{P}_2$ o vector de $\mathbb{R}^3$ das suas componentes relativamente à base canónica:

$$\begin{array}{lcl} p_1(t) = 1 & \to & v_1 = (1,0,0) \\ p_2(t) = 1 - t^2 & \to & v_2 = (1,0,-1) \\ p_3(t) = 1 + t - 2t^2 & \to & v_3 = (1,1,-2) \\ p_4(t) = t - t^2 & \to & v_4 = (0,1,-1) \end{array}$$

Como um isomorfismo transforma uma base de $\mathcal{P}_2$ numa base de $\mathbb{R}^3$ e vice-versa, um subconjunto de $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ é uma base de $\mathcal{P}_2$ se e só se o correspondente subconjunto de $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ for uma base de $\mathbb{R}^3$. Ora, para tal podemos recorrer ao método de eliminação de Gauss, usando (por exemplo) a matriz cuja representação por colunas é $A = [v_1\ v_2\ v_3\ v_4]$. Implementando-o, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Daqui podemos imediatamente concluir que:

– O conjunto das 3 primeiras colunas de A é linearmente independente em $\mathbb{R}^3$; Consequentemente, o conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ (pois tem 3 elementos); Logo, $P_2 = \{p_1, p_2, p_3\}$ é uma base de $\mathcal{P}_2$.

– O conjunto formado pelas colunas 1, 2 e 4 de A é linearmente independente em $\mathbb{R}^3$; Consequentemente, o conjunto $\{v_1, v_2, v_4\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ (pois tem 3 elementos); Logo, $P_4 = \{p_1, p_2, p_4\}$ é uma base de $\mathcal{P}_2$.

A matriz A apenas não nos permite tirar conclusões àcerca de subconjuntos das colunas de A que não contenham a primeira coluna. Para sabermos se P_3 é ou não uma base de $\mathcal{P}_2$, devemos considerar a matriz cuja representação por colunas é $B = [v_2\ v_3\ v_4]$. Neste caso, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Concluimos então que o conjunto das coluna de B é linearmente dependente em $\mathbb{R}^3$; Consequentemente, o conjunto $\{v_2, v_3, v_4\}$ não é uma base de $\mathbb{R}^3$; Logo, $P_3 = \{p_2, p_3, p_4\}$ não é uma base de $\mathcal{P}_2$.

Assim, a resposta correcta é **C**.

Exercício 71 *[2006/7 - 1° Exame - LEC/MEC]*

V1. Seja $v = (4, -4, 8)$ e considere a base ordenada $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathcal{B} = ((1, 0, 1), (0, 2, 1), (1, 0, 3)).$$

Qual dos seguintes é o vector das componentes (ou coordenadas) de v na base $\mathcal{B}$?

A) (1,2,3) **B)** (1,-2,3) **C)** (-1,2,3) **D)** (1,-2,-3)

....

Resolução:

Considerando uma base ordenada $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ a representação de um vector v nesta base é da forma

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = v.$$

Pretende-se obter o vector $u = (\alpha, \beta, \gamma)$. Concretizando para a base e vector dados, se escrevermos os elementos de $\mathbb{R}^3$ como vectores coluna, a relação anterior pode ser escrita na forma matricial como se segue:

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix},$$

pelo que o método de eliminação de Gauss nos permite obter solução. Implementando-o relativamente à matriz aumentada do SEL anterior, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 2 & 0 & \vdots & -4 \\ 1 & 1 & 3 & \vdots & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 2 & 0 & \vdots & -4 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 2 & 0 & \vdots & -4 \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & 6 \end{bmatrix}.$$

Da terceira equação do sistema simplificado vem $2\gamma = 6$, ou seja $\gamma = 3$; Da segunda equação do sistema simplificado vem $2\beta = -4$, ou seja $\beta = -2$; Substituindo estes resultados na primeira equação $(\alpha + \gamma = 4)$, conclui-se que $\alpha = 4 - \gamma = 1$. Resumindo o vector das componentes de v na base $\mathcal{B}$ é $(1, -2, 3)$.

Assim, a resposta correcta é **B**.

Alternativamente, poder-se-ia obter a solução do SEL recorrendo à inversa da matriz do coeficientes:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Exercício 72 *[2006/7 - 2° Exame - LEC/MEC]*

V1. Para $\lambda \in \mathbb{R}$ seja $A_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ \lambda^2 & \lambda & 1 \end{bmatrix}$. Designe por Λ o conjunto de todos os valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que o vector $(2, 4, 3)$ pertence ao espaço das colunas de A_λ. Então Λ é o conjunto

A) $\mathbb{R}$ **B)** $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ **C)** $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ **D)** $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

....

Resolução:

Um vector b pertence ao espaço das colunas de A_λ se e só se o sistema de equações $A_\lambda u = b$ é possível. Trata-se, pois, de usar o método de eliminação de Gauss e extrair as conclusões em função do parâmetro λ. Implementando-o, relativamente à matriz aumentada do SEL, obtém-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 2 \\ 1 & 2 & 1 & \vdots & 4 \\ \lambda^2 & \lambda & 1 & \vdots & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 2 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & \lambda & 1-\lambda^2 & \vdots & 3-2\lambda^2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 2 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & \vdots & 3-\lambda-2\lambda^2 \end{bmatrix}.$$

Daqui se conclui imediatamente que:

– Se $\lambda \neq \pm 1$, então o sistema é possível e determinado; neste caso, o vector $(2,4,3)$ pertence ao espaço das colunas de A_λ.

Para $\lambda = \pm 1 (\Leftrightarrow 1 - \lambda^2 = 0)$, caso em que a matriz dos coeficientes tem apenas dois pivôs, temos de averiguar do valor de $3 - \lambda - 2\lambda^2$. Tendo em conta que:

$$3 - \lambda - 2\lambda^2 = (1-\lambda)(3+2\lambda),$$

conclui-se que:

– Se $\lambda = 1$, então também $3 - \lambda - 2\lambda^2 = 0$, pelo que o sistema é possível e indeterminanado; neste caso, o vector $(2,4,3)$ pertence ao espaçødas colunas de A_λ.

– Se $\lambda = -1$, então $3 - \lambda - 2\lambda^2 = 2 \neq 0$, pelo que o sistema é impossível; neste caso, o vector $(2,4,3)$ não pertence ao espaço das colunas de A_λ.

Assim, a resposta correcta é **B**.

Exercício 73 *[2006/7 - 2º Exame - LEC/MEC]*

V1. Seja $\mathcal{S}$ o subespaço de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ gerado pelas matrizes $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, e seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Considere as seguintes afirmações:

I. $\mathcal{S}$ tem dimensão 2, II. $\mathcal{S}$ tem dimensão 3, III. $A \in \mathcal{S}$, IV. $A \notin \mathcal{S}$.

Quais as afirmações verdadeiras?

A) I e III **B)** I e IV **C)** II e III **D)** II e IV

. . . .

Resolução:

Tal como em exercícios anteriores há toda a vantagem em usar a noção de isomorfismo entre espaços lineares para responder a esta questão. Os isomorfismos entre espaços lineares são funções muito bem "comportadas" e de entre as suas propriedades podemos destacar: transformam conjuntos linearmente independentes em conjuntos linearmente independentes, transformam conjuntos geradores do espaço de partida em cnjuntos geradores do espaço de chegada e transformam bases em bases. Como $\dim \mathbb{R}^{2\times 2} = 4$ então $\mathbb{R}^{2\times 2}$ é isomorfo a $\mathbb{R}^4$, sendo um isomorfismo aquele que faz corresponder a cada matriz de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ o vector de $\mathbb{R}^4$ das suas componentes relativamente à base canónica. Assim, estabelecendo as correspondências:

$$\begin{array}{ll} S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} & \to s_1 = (1,1,-1,0) \\ S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} & \to s_2 = (1,2,-2,1) \\ S_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \to s_3 = (1,-1,1,1) \\ S_4 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} & \to s_4 = (1,-2,2,3) \end{array},$$

temos:

– A dimensão de $\mathcal{S}$ é o número de elementos linearmente independentes de conjunto $S = \{S_1, S_2, S_3, S_4\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$, que é igual ao número de elementos linearmente independentes do conjunto $V = \{s_1, s_2, s_3, s_4\} \subset \mathbb{R}^4$, ou ainda, ao número de colunas linearmente independentes da matriz T cujas colunas contêm as componentes de $s_1, \ldots, s_4$, i.e. $T = [s_1, s_2, s_3, s_4]$, admitindo-se os vectores representados como vectores coluna;

– Uma matriz $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ pertence a $\mathcal{S}$ se e só se o vector $m = (a, b, c, d)$ pertence ao espaço gerado por V, ou ainda, se e só se o sistema de equações $Tu = m$ é possível, em que m está repesentando como vector coluna.

Estamos agora em condições de usar o método de eliminação de Gauss para analisar estas questões. Implementando-o para a matriz aumentada $[T \vdots m]$, obtém-se:

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & a \\ 1 & 2 & -1 & -2 & \vdots & b \\ -1 & -2- & 1 & 2 & \vdots & c \\ 0 & 1 & 1 & 3 & \vdots & d \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & a \\ 0 & 1 & -2 & -3 & \vdots & b-a \\ 0 & -1- & 2 & 3 & \vdots & c+a \\ 0 & 1 & 1 & 3 & \vdots & d \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & a \\ 0 & 1 & -2 & -3 & \vdots & b-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & c+b \\ 0 & 0 & 3 & 6 & \vdots & d-b+a \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & a \\ 0 & 1 & -2 & -3 & \vdots & b-a \\ 0 & 0 & 3 & 6 & \vdots & d-b+a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & c+b \end{array}\right]$$

Daqui se conclui que a matriz dos coeficientes tem 3 colunas linearmentes independentes (as 3 primeiras), pelo que a dimensão de $\mathcal{S}$ é igual a 3; e que a condição de a matriz M pertencer a $\mathcal{S}$ é a de que os seus elementos sejam tais que $b + c = 0$, que é a condição de existência de solução de $Tu = m$. Como a matriz A dada satisfaz a esta condição ($b = -2$ e $c = 2$), conclui-se que A pertence ao subespaço $\mathcal{S}$.

Assim, a resposta correcta é **C**.

Exercício 74 *[2007/8 - 1° Teste - MEC]*

V1. Seja S o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos quatro vectores seguintes:

$$v_1 = (1, 0, -1, 0), \quad v_2 = (0, 1, 0, -1), \quad v_3 = (1, 0, -2, -1), \quad v_4 = (0, 1, 1, 0).$$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A) $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y - z - w = 0\}$, **B)** $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z - w = 0\}$,

C) $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y - z - w = 0\}$, **D)** $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z - w = 0\}$.

Exercício 75 *[2007/8 - 1° Teste - MEC]*

V1. Seja $v = (1, 2, 3)$ e considere em $\mathbb{R}^3$ a base ordenada $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$, em que

$$v_1 = (1, 0, 1), \quad v_2 = (1, 1, 0), \quad v_3 = (1, 1, 1).$$

Qual dos seguintes é o vector das componentes (ou coordenadas) de v na base $\mathcal{B}$?

A) (3,-2,4), **B)** (-1,4,4), **C)** (-1,-2,4), **D)** (-1,-2,6).

Exercício 76 *[2007/8 - 1° Teste - MEC]*

V1. Seja $\mathcal{P}_2$ o espaço linear real dos polinómios definidos em $\mathbb{R}$ de grau menor ou igual a 2, considere os elementos de $\mathcal{P}_2$ definidos como se segue:

$$p_1(t) = 1 - t, \;\; p_2(t) = 1 + t, \;\; p_3(t) = 1 - t^2, \;\; p_4(t) = 1 + t^2, \quad t \in \mathbb{R},$$

e as seguintes afirmações:

I - $\{p_1, p_2, p_4\}$ é linearmente independente,

II - $\{p_1, p_2, p_3\}$ é linearmente dependente,

III - $\{p_1, p_2, p_3\}$ é uma base de $\mathcal{P}_2$,

IV - $\{p_1, p_2, p_4\}$ gera $\mathcal{P}_2$

Qual é a lista completa de afirmações verdadeiras?

A) I e IV, **B)** III e IV, **C)** I, III e IV, **D)** II, III e IV.

Exercício 77 *[2007/8 - 1° Exame - MEC]*

V1. Sejam $n \in \mathbb{N}$, P uma matriz de permutação de ordem n, I a matriz identidade de ordem n e considere os seguintes conjuntos:

$$\begin{array}{ll} S_1 = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : PA = I\}, & S_2 = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : PA = A + A^t\}, \\ S_3 = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : PA = (\det A)P\}, & S_4 = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : PA = A^t P\}, \end{array}$$

em que A^t representa a transposta de A.

Qual é a lista completa dos que são subespaços de $\mathbb{R}^{n\times n}$?

A) S_1 e S_3, **B)** S_2 e S_4, **C)** S_1, S_2 e S_4, **D)** S_1, S_3 e S_4.

Exercício 78 *[2007/8 - 1° Exame - MEC]*

V1.

Seja $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & \alpha(\alpha-2) \\ -1 & -\alpha & 2\alpha-1 \end{bmatrix}$ e considere as seguintes afirmações:

I. Existe um valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\dim N_{A_\alpha} = 0$,

II. Existe um valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\dim N_{A_\alpha} = 1$,

III. Existe um valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\dim N_{A_\alpha} = 2$,

IV. Para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, $\dim N_{A_\alpha} \in \{0, 1\}$.

Qual é a lista completa de afirmações verdadeiras?

A) I e III, **B)** I e IV, **C)** I , II e III, **D)** I , II e IV.

Exercício 79 *[2007/8 - 1° Exame - MEC]*

V1. Seja A uma matriz quadrada de ordem $n \in \mathbb{N}$ e considere as seguintes afirmações:

I. $\dim N_A = \dim N_{A^t}$, II. $\dim C_A = \dim L_A$, III. $\dim N_A + \dim L_A = n$, IV. $\dim N_{A^t} + \dim L_A = n$, em A^t representa a transposta de A, L_A e C_A representam o espaço das linhas e das colunas de A, respectivamente, e N_X representa o núcleo (ou espaço nulo) da matriz X.

Qual é a lista completa de afirmações verdadeiras?

A) II e III, **B)** I e IV, **C)** II , III e IV, **D)** Todas.

Exercício 80 *[2007/8 - 2° Exame - MEC]*

V1. Considere em $\mathbb{R}^3$ a base ordenada $((1, 0, -1), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$.

Qual é o vector das componentes de $x = (1, 2, 3)$ nesta base?

A) (-1,0,2), **B)** (-1,2,2), **C)** (1,-2,2), **D)** (1,0,-2).

Exercício 81 *[2007/8 - 2º Exame - MEC]*

V1. Sejam $\mathcal{P}$ o espaço linear real dos polinómios definidos em $\mathbb{R}$, $\mathcal{S}$ o subespaço de $\mathcal{P}$ gerado pelos polinómios seguintes:

$$p_1(t) = 1 + t - t^2, \quad p_2(t) = 1 + 2t - 2t^2 + t^3, \quad p_3(t) = 1 - t + t^2 + t^3$$

e seja $q(t) = 1 - 2t + 2t^2 + 3t^3$, $t \in \mathbb{R}$. Considere as seguintes afirmações:

I. $\mathcal{S}$ tem dimensão 2, II. $\mathcal{S}$ tem dimensão 3, III. $q \in \mathcal{S}$, IV. $q \notin \mathcal{S}$.

Quais as afirmações verdadeiras?

A) I e III **B)** I e IV **C)** II e III **D)** II e IV

Exercício 82 *[2008/9 - 1º Teste - LEIC]*

V1. Qual das matrizes seguintes é tal que o conjunto das suas linhas é linearmente independente em $\mathbb{R}^3$?

A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$, **B)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, **C)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, **D)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$.

Exercício 83 *[2008/9 - 1º Teste - LEIC]*

V1. Qual das seguintes é uma equação cartesiana do plano de $\mathbb{R}^3$ gerado pelo conjunto $\{(1,1,2),(2,1,3)\}$?

A) $x + y - z = 0$, **B)** $x - y + z = 0$, **C)** $x - y - z = 0$, **D)** $7x + 5y - z = 0$.

Exercício 84 *[2008/9 - 1º Teste - LEIC]*

V1. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Qual é a dimensão do subespaço de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ gerado pelo conjunto $\{A, B, A^2, B^2\}$?

A) 1, **B)** 2, **C)** 3, **D)** 4.

Exercício 85 *[2008/9 - 1º Exame - LEIC]*

V1. Seja $\mathcal{S}$ o subespaço das matrizes reais de ordem 2 gerado por $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Qual das matrizes seguintes **não pertence** a $\mathcal{S}$?

A) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, **B)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, **C)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, **D)** $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Exercício 86 *[2008/9 - 1° Exame - LEIC]*

V1. Qual é a dimensão do subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vectores

$$(1,1,2,1), \quad (1,-1,2,1), \quad (3,1,6,1), \quad (7,-1,14,-1)?$$

A) 1, **B)** 2, **C)** 3, **D)** 4.

Exercício 87 *[2008/9 - 1° Exame - LEIC]*

V1. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $A_a = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & a+3 \end{bmatrix}$.

Pretende-se escolher o valor do parâmetro a por forma que o conjunto das soluções da equação $A_a u = 0$ seja um plano (de dimensão 2) em $\mathbb{R}^4$. Qual é a escolha certa?

A) -2, **B)** 1, **C)** 0, **D)**- 1.

Exercício 88 *[2008/9 - 2° Exame - LEIC]*

V1. Qual das seguintes matrizes A é tal que $C_A = \mathbb{R}^3$? (C_A representa o espaço das colunas de A)

A) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, **B)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 4 \end{bmatrix}$, **C)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, **D)** $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$.

Exercício 89 *[2008/9 - 2° Exame - LEIC]*

V1. Considere em $\mathbb{R}^3$ os vectores $v_1 = (1,1,-1)$, $v_2 = (1,0,1)$ e $v_3 = (0,0,1)$. Seja S o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores $v_1 + v_2$, $v_2 + v_3$ e $v_1 + 3v_2 + 2v_3$. Qual dos seguintes conjuntos é uma base de S?

A) $\{(1,0,2),(3,1,2)\}$, **B)** $\{(1,0,2),(3,2,2)\}$,
C) $\{(1,0,2),(3,1,2),(2,1,0)\}$, **D)** $\{(1,0,2),(3,2,2),(4,1,4)\}$.

Exercício 90 *[2009/10 - 1° Teste - MEC]*

V1. Considere novamente a matriz A_λ (com $\lambda \in \mathbb{R}$) definida no problema 1. Qual das seguintes afirmações é verdadeira? (L_{A_λ} representa o espaço das linhas da matriz A_λ)
A) Se $\lambda \in \mathbb{R}$, então $\dim L_{A_\lambda} = 3$;
B) Se $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, então $\dim L_{A_\lambda} = 3$;
C) Se $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, então $\dim L_{A_\lambda} = 3$;
D) Se $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, então $\dim L_{A_\lambda} = 3$.

Exercício 91 *[2009/10 - 1° Teste - MEC]*

V1. Considere em $\mathbb{R}^3$ os vectores

$$v_1 = (1,2,1), \quad v_2 = (1,4,2), \quad v_3 = (2,4,2), \quad v_4 = (2,6,3),$$

e os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$

$$S_1 = \{v_1, v_2, v_3\}, \quad S_2 = \{v_2, v_3, v_4\}, \quad S_3 = \{v_1, v_2, v_4\}$$

Qual é a afimação verdadeira?
A) S_1 e S_2 são linearmente independentes;
B) S_1 e S_3 são linearmente independentes;
C) S_1 é linearmente independente e S_3 é linearmente dependente;
D) S_2 e S_3 são linearmente dependentes.

Exercício 92 *[2009/10 - 1º Teste - MEC]*

V1. Seja $\mathbb{R}^{2\times 2}$ o espaço das matrizes reais com duas linhas e duas colunas. Considere em $\mathbb{R}^{2\times 2}$ a base ordenada seguinte:

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right).$$

Qual dos seguintes vectores de $\mathbb{R}^4$ é o vector das componentes da matriz $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$ na base $\mathcal{B}$?
A) $(1, 2, 0, -1)$, **B)** $(1, 2, 1, 0)$, **C)** $(1, 1, -2, 0)$, **D)** $(1, 0, 1, -2)$.

Exercício 93 *[2009/10 - 1º Exame - MEC]*

V1. Sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 & -5 \end{bmatrix},$$

dos seguintes pares de vectores $(x, y) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^3$ pretende-se identificar o único que satisfaz as condições $x \in N_A$ e $y \in C_A$. Qual é?
(Aqui N_A e C_A representam, respectivamente, o núcleo e o espaço das colunas de A).

A) $((1, 1, 1, 1), (4, 5, 9))$,
B) $((-2, 1, -2, 1), (4, 5, 7))$,
C) $((1, 0, 1, 0), (1, 2, 1))$,
D) $((0, 1, 0, -1), (4, 5, 9))$.

Exercício 94 *[2009/10 - 1º Exame - MEC]*

V1. Qual é a dimensão do subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vectores

$$(1, 1, 2, 1), \quad (1, -1, 2, 1), \quad (3, 1, 6, 1), \quad (7, -1, 14, -1)?$$

A) 1, **B)** 2, **C)** 3, **D)** 4.

Exercício 95 *[2009/10 - 1º Exame - MEC]*

V1. Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ com $m > n > 1$ e considere as seguintes afirmações:
I. $\dim N_{A^t} > \dim N_A$,
II. $\dim N_{A^t} < \dim N_A$,
III. $\dim C_A > \dim C_{A^t}$,

IV. $\dim L_A > \dim L_{A^t}$.

(Aqui N_A, L_A e C_A representam, respectivamente, o núcleo, o espaço das linhas e o espaço das colunas de A; A^t é a transposta de A).

Qual é a lista completa de afirmações verdadeiras?

A) I, **B)** II, **C)** I e III, **D)** II e IV.

Exercício 96 *[2009/10 - 2º Exame - MEC]*

V1. Seja S o subespaço de $\mathcal{P}_3$ gerado pelos quatro polinómios seguintes:

$$P_1(t) = (1-t)^2, \quad P_2(t) = t(1-t)^2, \quad P_3(t) = (1-t)(1-t^2), \quad P_4(t) = (1-t)^3, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Qual é a dimensão do subespaço S?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4.

Exercício 97 *[2010/11 - 2º Teste - MEEC]*

V1. Considere o subconjunto S de $\mathbb{R}^3$ formado pelos seguintes 5 vectores:

$$s_1 = (1,2,0), \quad s_2 = (1,3,1), \quad s_3 = (1,1,-1), \quad s_4 = (1,2,1,), \quad s_5 = (1,0,-2).$$

Qual dos seguintes subconjuntos de S é uma base de $\mathbb{R}^3$?

A) $\{s_1, s_2, s_3\}$, **B)** $\{s_1, s_2, s_4\}$, **C)** $\{s_1, s_3, s_5\}$, **D)** $\{s_2, s_3, s_5\}$.

Exercício 98 *[2010/11 - 2º Teste - MEEC]*

V1. Considere em $\mathbb{R}^3$ a base ordenada $\mathcal{B} = ((1,1,2),(0,1,2),(-2,-1,-1))$. Sabendo que $x \in \mathbb{R}^3$ tem $(1,2,3)$ como vector das componentes na base $\mathcal{B}$, qual é o vector das componentes de x na base canónica?

A) $(-1,2,-1)$, **B)** $(3,2,-1)$, **C)** $(-1,-2,-1)$, **D)** $(-5,0,3)$.

Exercício 99 *[2010/11 - Exame - MEEC]*

V1. Qual das matrizes seguintes é tal que as suas colunas constituem uma base de $\mathbb{R}^3$?

A) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 6 & -2 & -2 \end{bmatrix}$, **B)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, **C)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, **D)** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$.

Exercício 100 *[2010/11 - Exame - MEEC]*

V1. Qual é a dimensão do subespaço de $\mathbb{R}^{3\times3}$ formado por todas as matrizes simétricas que têm traço nulo?

(O traço de uma matriz quadrada é a soma dos elementos da diagonal principal.)

A) 3, **B)** 7, **C)** 4, **D)** 5.

Exercício 101 *[2000/1 - 1°Exame - LEC]*

V1. Seja $\mathcal{P}_3$ o espaço linear real dos polinómios de variável real com grau menor ou igual a 3, e considere as seguintes funções definidas e com valores em $\mathcal{P}_3$.

I. $T : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ tal que $T\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3\right) = -a_0 - a_2x^2$.

II. $T : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ tal que $T\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3\right) = a_0 + a_1(x-1) + 2a_2(x-1)^2 + 3a_3(x-1)^3$.

III. $T : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ tal que $T\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3\right) = a_1x + a_0\,a_1 + a_2 + a_2x^2$.

IV. $T : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ tal que $T\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3\right) = a_0^2 - 4a_1^2x + \frac{2}{3}a_2^2x^2 - a_3^2x^3$.

Enumere a lista completa das que são transformações lineares.

A) I e III **B)** I e II **C)** II e IV **D)** III

. . . .

Resolução:

Analisemos cada uma das transformações separadamente, introduzindo por facilidade de exposição dois elementos genéricos de $\mathcal{P}_3$:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, \quad q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3, \quad x \in \mathbb{R},$$

e um número real α arbitrário. Tem-se:

– A transformação em I é linear,
pois, para qualquer $x \in \mathbb{R}$,

$$T(p+q)(x) = -(a_0+b_0) - (a_2+b_2)x^2 = Tp(x) + Tq(x)$$

e

$$T(\alpha p)(x) = -\alpha a_0 - \alpha a_2x^2 = \alpha Tp(x).$$

– A transformação em II é linear,
pois, para qualquer $x \in \mathbb{R}$,

$$T(p+q)(x) = -(a_0+b_0) + (a_1+b_1)(x-1) + 2(a_2+b_2)(x-1)^2 + 3(a_3+b_3)(x-1)^3 = Tp(x) + Tq(x)$$

e

$$T(\alpha p)(x) = \alpha a_0 + \alpha a_1(x-1) + 2\alpha a_2(x-1)^2 + 3\alpha a_3(x-1)^3 = \alpha Tp(x).$$

– A transformação em III não é linear, pois, por exemplo,

$$T(\alpha p)(x) = \alpha a_1x + \alpha^2 a_0\,a_1 + \alpha a_2 + \alpha a_2x^2 \neq \alpha a_1x + \alpha a_0\,a_1 + \alpha a_2 + \alpha a_2x^2 = \alpha Tp(x)$$

se $\alpha \neq 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

– A transformação em IV não é linear, pois, por exemplo,

$$T(\alpha p)(x) = \alpha^2a_0^2 - 4\alpha^2a_1^2x + \frac{2}{3}\alpha^2a_2^2x^2 - \alpha^2a_3^2x^3 \neq \alpha a_0^2 - 4\alpha a_1^2x + \frac{2}{3}\alpha a_2^2x^2 - \alpha a_3^2x^3 = \alpha Tp(x)$$

se $\alpha \neq 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Assim, a resposta correcta é **B**.

Exercício 102 *[2000/1 - 1°Exame - LEC]*

V1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ que representa uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ em relação à base $\{w_1, w_2\}$, onde $w_1 = (-1, 0)$ e $w_2 = (-4, 2)$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A) $T(4, -2) = (16, -8)$

B) $T(-1, 0) = (-8, 4)$

C) $T(-1, 0) = (-16, 6)$

D) $T(4, -2) = (8, -4)$

....

Resolução:

Uma vez que A representa T em relação à base constituída por w_1 e w_2, tem-se:

$$Tw_1 = 2w_2, \quad Tw_2 = -4w_1 - 3w_2.$$

Consequentemente,

$$T(4,-2) = -Tw_2 = 4w_1 + 3w_2 = (-4,0) + (-12,6) = (-16,6), \quad T(-1,0) = Tw_1 = 2w_2 = (-8,4),$$

pelo que a resposta correcta é **B**.

Exercício 103 *[2000/1 - 1°Exame - LEC]*

V1. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (7z, x + 3y,)$. Então a afirmação correcta é:

A) O vector $(0, 0)$ pertence ao núcleo de T e o vector $(-1, 1)$ pertence à imagem de T.

B) O vector $(3, 0)$ pertence ao núcleo de T e o vector $(0, 1, 1)$ pertence à imagem de T.

C) O vector $(-3, 1, 0)$ pertence ao núcleo de T e o vector $(1, -1)$ pertence à imagem de T.

D) O vector $(6, -2, 0)$ não pertence ao núcleo de T e o vector $(-1, 1)$ pertence à imagem de T.

....

Resolução:

Podemos eliminar imediatamente as alternativas A e B do conjunto das respostas certas uma vez que os vectores no núcleo de T pertencem a $\mathbb{R}^3$ e não a $\mathbb{R}^2$.

Vejamos agora que C é verdadeira, pelo que D será necessariamente falsa, pois se um vector pertence ao núcleo de T qualquer seu múltiplo (no caso 2) também pertence a núcleo e se um vector pertencer à imagem de T qualquer seu múltiplo (no caso -1) também pertence à imagem. Efectivamente,

$$T(-3, 1, 0) = (7 \,.\, 0, -3 + 3.1) = (0, 0), T(-1, 0, 1/7) = (1, -1).$$

Assim, a resposta correcta é **C**.

Exercício 104 *[2000/1 - 2º Exame - LEC]*

V1. Considere os vectores $v_1 = (1, -2)$, $v_2 = (-2, 2)$, $w_1 = (2, 1)$ e $w_2 = (-1, -2)$. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma aplicação linear tal que $T(v_1) = w_1$ e $T(v_2) = w_2$. Considerando a mesma base à partida e à chegada, indique qual das matrizes seguintes representa a transformação linear T em relação à base $\{v_1, v_2\}$.

A) $\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -\frac{5}{2} & 3 \end{bmatrix}$ **B)** $\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -\frac{5}{2} & 2 \end{bmatrix}$ **C)** $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -\frac{5}{2} & 2 \end{bmatrix}$ **D)** $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -\frac{5}{2} & 2 \end{bmatrix}$

....

Resolução:

A matriz A que representa T em à base $\{v_1, v_2\}$ é aquela cujas colunas contêm as componentes das imagens por T dos vectores desta base representados na mesma base, digamos

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}$$

em que

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = w_1 (= T v_1), \quad \gamma v_1 + \delta v_2 = w_2 (= T v_2)$$

Escrevemos estas equações na forma matricial

$$C \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

para a determinação de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Tal pode ser conseguido por vários métodos. Neste caso particular, como a matriz C dos coeficientes tem ordem 2 é fácil determinar a sua inversa (que existe pois as colunas são linearmente independentes), obtém-se:

$$C^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Consequentemente,

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = C^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -5/2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = C^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix},$$

pelo que a resposta correcta é **B**.

Exercício 105 *[2000/1 - 2º Exame - LEC]*

V1. Suponha que a matriz $A = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ representa uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ em relação à base $\{w_1, w_2\}$, onde $w_1 = (-4, 1)$ e $w_2 = (4, 1)$. Então a afirmação correcta é:

A) $T(-8, -2) = (0, 16)$

B) $T(8, 2) = (0, 8)$

C) $T(-8, -2) = (0, -16)$

D) $T(8, 2) = (-36, -1)$

. . . .

Resolução:

Decorre da definição da matriz que representa T em relação à base $\{w_1, w_2\}$ que

$$Tw_1 = -4w_1 + 5w_2, \quad Tw_2 = -4w_1 - 4w_2.$$

Escrevemos os vectores para os quais pretendemos determinar a imagem na base $\{w_1, w_2\}$:

$$(8,2) = 2w_2 \quad (\Rightarrow (-8-,2) = -2w_2)\,,$$

e usamos as relações anteriores, vindo

$$T(8,2) = 2Tw_2 = -8w_1 - 8w_2 = (0,-16) \quad (\Rightarrow T(-8-,2) = (0,16))\,,$$

pelo que a resposta correcta é **A**.

Exercício 106 *[2005/6 - 2º Teste/1º Exame - LEEC]*

V1. Considere a transformação linear $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x,y) = (x+3y,\, 2x,\, x-y)$. Então a afirmação correcta é :

A) O vector $(1,0,0)$ pertence ao núcleo de T e o vector $(4,2,0)$ pertence à imagem de T.

B) O vector $(0,0,0)$ pertence ao núcleo de T e o vector $(1,-1)$ pertence à imagem de T.

C) O vector $(0,0)$ pertence ao núcleo de T e o vector $(1,2,0)$ pertence à imagem de T.

D) O vector $(0,0)$ pertence ao núcleo de T e o vector $(-1,4,3)$ pertence à imagem de T.

. . . .

Resolução:

Podemos desde já eliminar as alternativas A e B do conjunto de respostas certas, uma vez que os vectores do núcleo de T pertencem a $\mathbb{R}^2$ e não a $\mathbb{R}^3$. Sendo claro que $T(0,0) = (0,0,0)$, o problema consiste em saber qual das seguintes duas equações é possível:

$$T(x,y,z) = (1,2,0), \quad T(x,y,z) = (-1,4,3).$$

Escrevendo-as na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix},$$

por eliminação de Gauss facilmente se conclui que a primeira daquelas equações é impossível e que a segunda é possível. Efectivamente, considerando a matriz aumentada dos dois sistemas, vem

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & 0 & 6 \\ 0 & -4 & -1 & 4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Assim, a resposta correcta é **D**.

Exercício 107 *[2005/6 - 2º Teste/1º Exame - LEEC]*

V1. Considere em $\mathbb{R}^3$ a base ordenada $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$, em que:

$$v_1 = (-2,1,1)\ , \quad v_2 = (-3,0,-1)\ , \quad v_3 = (1,1,0)\ .$$

Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear cuja representação matricial em relação à base $\mathcal{B}$ é a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} .$$

Um conjunto gerador da imagem ou contradomínio de T é:

A) $\{(-7,8,-3),(6,12,18)\}$ **B)** $\{(-7,8,-3),(-1,20,15)\}$

C) $\{(-7,8,-3),(-11,10,-3)\}$ **D)** $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

....

Resolução:

Uma vez que a representação matricial de T se refere à base $\mathcal{B}$, por eliminação de Gauss aplicada a esta matriz podemos obter uma base da imagem (ou ontradomínio) da transformação T. Implementando-a

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \to \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix} \quad \to \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

conclui-se que a imagem de T é um subespaço de dimensão 2 (o número de colunas com pivô) que tem como base os vectores cujas componentes figuram na primeira e segunda colunas de A, ou seja os vectores:

$$u_1 = v_1 + 4v_2 + 7v_3 = (-7,8,-3), \quad u_2 = 2v_1 + 5v_2 + 8v_3 = (-11,10,-3).$$

Ora, estes são precisamente os vectores que são dados na alternativa **C**, pelo que é esta a resposta correcta. Deixo ao cuidado dos leitores a verificação de que nenhum dos outros conjunto gera a imagem de T.

Exercício 108 *[2005/6 - 2º Exame - LEEC]*

V1. Considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ definida como se segue: sendo $p \in \mathcal{P}_2$ com $p(t) = p_0 + p_1\, t + p_2\, t^2$ então

$$T(p) = (p_0 + 2p_1 + 3p_2, -p_0 + 2p_1 + p_2, 2p_0 + 2p_2)\ ,$$

e as seguintes afirmações:

I. $\dim N(T) = 1$, II. T é injectiva , III. $\dim I(T) = 2$, IV. T não é invertível ,

em que $N(T)$ e $I(T)$ representam o núcleo e a imagem de T, respectivamente.

Qual é a lista completa de afirmações verdadeiras?

A) I **B)** I e III **C)** I,III e IV **D)** II e III

....

Resolução:

Podemos saber as propriedades de uma transformação linear entre espaços de dimensão finita (nestes caso, quer o espaço de partida quer o de chegada têm dimensão 3) com base na matriz A (que neste caso é de ordem 3) que representa a transformação relativamente a um par de bases previamente fixado. Em particular, tem-se:

$\dim N(T) = \dim N_A$; $\quad \dim I(T) = \dim C_A$; $\quad T$ é invertível se e só A é invertível.

Fixando em $\mathcal{P}_2$ e $\mathbb{R}^3$ as bases canónicas, como $T(1) = (1, -1, 2)$, $T(t) = (2, 2, 0)$, $T(t^2) = (3, 1, 2)$, a matriz A que representa T é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Para analisar as características da matriz A podemos usar o método de eliminação de Gauss. Implementando-o,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \to \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & -4 & -4 \end{bmatrix} \quad \to \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

concluímos que:

- $\dim N(T) = \dim N_A = 1$ (= número de colunas sem pivô);
- $\dim I(T) = \dim C_A = 2$ (= número de pivôs);
- T não é injectiva $\Leftrightarrow N(T) \neq \{0\}$;
- T não é invertível $\Leftrightarrow A$ não é invertível.

Assim, a resposta correcta é **C**.

Exercício 109 *[2006/7 - 2º Teste/1º Exame - LEC/MEC]*

V1. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(x, y, z) = (x + 2y + z, x + 3y + 2z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

e considere as seguintes afirmações:

I. T é injectiva,
II. T não é sobrejectiva,
III. T não é injectiva e $(1, -1, 1) \in N(T)$,
IV. T é sobrejectiva e $(1, -1, 1) \in N(T)$,

onde $N(T)$ representa o núcleo de T.

Qual é a lista completa de afirmações verdadeiras?

A) I **B)** I e II **C)** II e III **D)** III e IV

. . . .

Resolução:

Analisemos cada uma das afirmações:

I é falsa.

Efectivamente, sendo X e T espaços lineares sobre o mesmo corpo com $\dim X > \dim Y$ e $S : X \to Y$ uma transformação linear, então S não pode ser injectiva, pois como $\dim I(S) \leq \dim Y$ e $\dim N(S) + \dim I(S) = \dim X$, necessariamente será $\dim N(S) > 0$, pelo que S não pode ser injectiva ($\Leftrightarrow N(S) \neq \{0\}$). Isto aplica-se a este caso concreto com $X = \mathbb{R}^3$, $Y = \mathbb{R}^2$ e $S = T$, pelo que a afirmação I é falsa.

II é falsa.

Para ver que T é sobrejectiva basta ver que o espaço das colunas da matriz A, que representa T em relação às bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, tem dimensão 2, o que é fácil usando a eliminação de Gauss:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \to \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = U$$

uma vez que a matriz U tem 2 pivôs. Consequentemente, a afirmação II é falsa.

III é verdadeira.
Já vimos que T não é injectiva e como $T(1,-1,1)=(0,0)$, ou seja $(1,-1,1)\in N(T)$, a afirmação III é verdadeira.

IV é verdadeira.
Já vimos que T é sobrejectiva e que $(1,-1,1)\in N(T)$, pelo que a afirmação IV é verdadeira.

Assim, as afirmações verdadeiras são III e IV, pelo que a resposta correcta é **D**.

Exercício 110 *[2006/7 - 2º Teste/1º Exame - LEC/MEC]*

V1. Em $\mathbb{R}^3$ considere a base ordenada $\mathcal{B}=((1,0,0),(1,-1,0),(1,1,1))$ e seja $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ a transformação linear que é representada nesta base pela matriz

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\1&1&2\\2&3&3\end{bmatrix}.$$

Qual é a imagem do vector $(-1,0,1)$ pela transformação T?

A) (0,0,0) **B)** (0,1,1) **C)** (1,0,1) **D)** (1,2,3)

....

Resolução:

Pela definição de matriz que representa T em relação à base $\mathcal{B}$, tem-se

$$T(1,0,0)=(1,1,2)_{\mathcal{B}}=(4,1,2),\quad T(1,-1,0)=(2,1,3)_{\mathcal{B}}=(6,2,3),\quad T(1,1,1)=(1,2,3)\mathcal{B}=(6,1,3).$$

Então para podermos calcular a imagem por T de um qualquer vector, basta sabermos representar esse vector na base $\mathcal{B}$ e usar a linearidade de T. Alternativamente, poderíamos representar cada um dos vectores coordenados unitários na base $\mathcal{B}$, por via da matriz de mudança de base, e em seguida usar a linearidade de T. Optando pela primeira via, o que se pretende é obter a representação $(-1,0,1)=(\alpha,\beta,\gamma)_{\mathcal{B}}$, ou seja

$$(-1,0,1)=\alpha(1,0,0)+\beta(1,-1,0)+\gamma(1,1,1)$$

ou ainda, em termos matriciais,

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},$$

cuja (única) solução é: $\alpha=-3,\beta=1,\gamma=1$.

Então

$$\begin{aligned}T(-1,0,1)&=T[-3(1,0,0)+(1,-1,0)+(1,1,1)]=-3T(1,0,0)+T(1,-1,0)+T(1,1,1)\\&=-3(1,1,2)_{\mathcal{B}}+(2,1,3)_{\mathcal{B}}+(1,2,3)_{\mathcal{B}}=-3(4,1,2)+(6,2,3)+(6,1,3)=(0,0,0),\end{aligned}$$

pelo que a resposta correcta é **A**.

Exercício 111 *[2006/7 - 2º Exame - LEC/MEC]*

V1. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x, y, z) = (x + y, x + y + z),$$

e as seguintes afirmações:

I. T é injectiva,
II. T é sobrejectiva,
III. Existe um vector $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ para o qual a equação $T(x, y, z) = (a, b)$ é impossível,
IV. Para qualquer vector $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ a equação $T(x, y, z) = (a, b)$ é possível e indeterminada.

Qual é a lista completa de afirmações falsas?

A) I **B)** I e II **C)** I e III **D)** II e IV

. . . .

Resolução:

Reafirmando o que já dissemos em exercícios semelhantes, podemos saber as características de uma transformação linear entre espaços de dimensão finita (nestes caso, o espaço de partida tem dimensão 3 e o de chegada tem dimensão 2) com base na matriz A (que neste caso é 2×3) que representa a transformação relativamente a um par de bases previamente fixado. Em particular, tem-se:

- T é injectiva $\Leftrightarrow N(T) = \{0\} \Leftrightarrow N_A = \{0\}$ e $\dim N(T) = \dim N_A$;
- T é sobrejectiva $\Leftrightarrow \dim C_A = 2$ e $\dim I(T) = \dim C_A$;
- A equação $T(x, y, z) = (a, b)$ é impossível $\Leftrightarrow$ a equação $A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ é impossível;
- A equação $T(x, y, z) = (a, b)$ é possível e indeterminada $\Leftrightarrow$ a equação $A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ é possível e indeterminada.

Fixando em $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$ as bases canónicas, como $T(1, 0, 0) = (1, 1)$, $T(0, 1, 0) = (1, 1)$, $T(0, 0, 1) = (0, 1)$, a matriz A é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e a eliminação de Gauss para a matriz aumentada conduz a

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \end{array}\right] \quad \to \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & b - a \end{array}\right].$$

Daqui se conclui que:

- $\dim N_A = 1 =$ número de incógnitas livre na matriz dos coeficientes; Consequentemente, a afirmação I é falsa;
- $\dim C_A = 2 =$ número de pivôs na matriz dos coeficientes; Consequentemente, a afirmação II é verdadeira;
- $\dim N_A = 1$, $\dim C_A = 2 \Rightarrow C_A = \mathbb{R}^2$, pelo que a equação $A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ é possível (independentemente do segundo membro), sendo indeterminada; Consequentemente, a afirmação III é falsa e a afirmação IV é verdadeira.

Assim, as afirmações falsas são I e III, pelo que a resposta correcta é **C**.

Exercício 112 *[2006/7 - 2º Exame - LEC/MEC]*

V1. Considere a base ordenada de $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ com $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,-1,0)$, $v_3 = (1,0,0)$. seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear que na base $\mathcal{B}$ é representada pela matriz diagonal

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Então a expressão correcta é:

A) $T(x,y,z) = (-2x - y + 4z, y + 2z, z)$ **B)** $T(x,y,z) = (-2x - y + 4z, -y + 2z, z)$
C) $T(x,y,z) = (-2x + y + 4z, y + 2z, x + z)$ **D)** $T(x,y,z) = (x, -y, -2z)$

....

Resolução:

Podemos obter a expressão analítica de T na forma pretendida se conhecermos a matriz A que representa T em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$. Efectivamente, se esta for

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix},$$

como consequência da linearidade de T, vem

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= xT(1,0,0) + yT(=,1,0) + zT(0,0,1) \\ &= x(a,d,g) + y(b,e,h) + z(c,f,i) = (ax + by + cz, dx + ey + fz, gx + hy + iz). \end{aligned}$$

Ora, não se conhece A mas sim B, a matriz que representa T na base $\mathcal{B}$. No entanto, a relação entre estas duas matrizes é conhecida

$$B = S^{-1}AS \quad \Leftrightarrow \quad A = SBS^{-1},$$

em que S é a matriz de mudança da base canónica para a base $\mathcal{B}$,

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cuja inversa facilmente se reconhece ser (usando qualquer dos métodos para determinar a inversa de uma matriz),

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Então

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

pelo que, em face do atrás exposto, a resposta correcta é **B**.

Como nota final de referir que não é indispensável para o cálculo de A recorrer à inversão de S^{-1}, podendo em alternativa obter-se directamente a matriz S^{-1} exprimindo os vectores da base canónica na base $\mathcal{B}$, como se exemplifica a seguir:

$$\begin{aligned} &(1,0,0) = v_3 \\ &(0,1,0) = -(1,-1,0) + (1,0,0) = -v_2 + v_3 \\ &(0,0,1) = (1,1,1) + (1,-1,0) - 2(1,0,0) = v_1 + v_2 - 2v_3. \end{aligned}$$

Exercício 113 *[2007/8 - 2º Teste/1º Exame - MEC]*

V1. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ definida por

$$T(a,b,c) = \begin{bmatrix} a+c & a-b \\ b-c & a-c \end{bmatrix}, \quad (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,$$

e as seguintes afirmações:
I. $\dim \mathcal{N}(T) = 1$, II. T é injectiva, III. T é sobrejectiva, IV. T é invertível,
onde $\mathcal{N}(T)$ representa o núcleo (ou espaço nulo) de T.

Qual é a lista completa de afirmações *falsas*?

A) I, **B)** I e III, **C)** I e IV, **D)** II, III e IV.

Exercício 114 *[2007/8 - 2º Exame - MEC]*

V1. Sejam $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ as transformações lineares definidas por

$$S(x,y,z) = (x+y, y-z), \ \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad T(u,v) = (u+v, u-v), \ \ (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Qual das seguintes matrizes representa a transformação composta $TS = T \circ S$ nas bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$?

A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, **B)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, **C)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, **D)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Exercício 115 *[2007/8 - 2º Exame - MEC]*

V1. Seja α um número real considere a transformação linear dependente do parâmetro α, $T_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T_\alpha(x,y,z) = (x+y+z, x+2y+2z, x+\alpha y+\alpha^2 z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Qual é o conjunto de todos os valores de α para os quais T_α não é bijectiva?

A) {1}, **B)** {-1,1}, **C)** {0,1}, **D)** {-1,0,1}.

Exercício 116 *[2008/9 - 2º Teste/1º Exame -LEIC]*

V1. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação definida por

$$T(x,y,z) = (2x+y, 2y+z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Representando por $N(T)$ e $I(T)$ o núcleo e a imagem (ou contradomínio) de T, respectivamente, qual é a afirmação **falsa**?

A) $(1,-2,4) \in N(T)$ e $(3,3) \in I(T)$, **B)** $(1,-2,4) \in N(T)$ e $I(T) = \mathbb{R}^2$,
C) $(1,2,-4) \in N(T)$ e T é sobrejectiva, **D)** T não é injectiva e $(0,0) \in I(T)$.

Exercício 117 *[2008/9 - 2º Teste/1º Exame -LEIC]*

V1. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear que é representada em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ pela matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & 1 & 2 \\ \beta & \gamma & 1 \end{bmatrix}.$$

Pretende-se determinar o terno (α, β, γ) por forma que a representação matricial S de T em relação à base ordenada $\mathcal{B} = \big((1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\big)$ seja simétrica (i.e. $S^t = S$).

Qual é a escolha certa para o terno (α, β, γ)?

A) $(1,8,12)$, **B)** $(8,12,1)$, **C)** $(1,12,8)$, **D)** $(2,3,2)$.

Exercício 118 *[2008/9 - 2º Exame -LEIC]*

V1. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definida como se segue: sendo $v = (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$,

$$Tv = (x - y + z - w, x + y - z - w, x + y + z - w, x + y + z + w).$$

Qual é a afirmação verdadeira?

A) T é invertível, **B)** T é injectiva mas não sobrejectiva,
C) T é sobrejectiva mas não injectiva, **D)** T não é injectiva.

Exercício 119 *[2008/9 - 2º Exame -LEIC]*

V1. Considere a trnsformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x,y,z) = (x + z, 6x - 2y - 7z, -2x + y + 4z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Qual das seguintes é a base ordenada de $\mathbb{R}^3$ relativamente à qual T é representada pela matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}?$$

A) $((1,0,0),(1,-1,1),(0,0,1))$, **B)** $((1,0,1),(2,-1,2),(1,2,0))$,
C) $((1,0,1),(1,-1,1),(1,2,0))$, **D)** $((1,0,1),(1,-1,1),(1,2,-1))$.

Exercício 120 *[2009/10 - 1º Exame - MEC]*

V1. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que é representada em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ pela matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A) T é bijectiva;
B) T é sobrejectiva, mas não injectiva;
C) T é injectiva, mas não sobrejectiva;
D) T não é injectiva nem sobrejectiva.

Exercício 121 *[2009/10 - 2º Exame - MEC]*

V1. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que é representada em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ pela matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Qual das expressões seguintes é valida para todo o vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$?

A) $T(x, y, z) = (x + y + 2z, 3x + y + z, x + 3y + 7z)$,
B) $T(x, y, z) = (x + y + 2z, x + 3y + z, 3x + y + 7z)$,
C) $T(x, y, z) = (z + 3y + x, 3z + y + x, 7z + y + 2x)$,
D) $T(x, y, z) = (z + 3y + x, z + y + 3x, 7z + y + 2x)$.

Exercício 122 *[2009/10 - 2º Exame - MEC]*

V1. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (x + y + 2z, x + 2y + 3z, 2x + 3y + 5z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Representando por $N(T)$ e $I(T)$ o núcleo de T e a imagem (ou contradomínio) de T, respectivamente, qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A) $(1, 1, -1) \in N(T)$ e $(0, 1, 2) \in I(T)$, **B)** $(1, 1, -1) \in N(T)$ e $(1, 5, 6) \in I(T)$,
C) $(1, 1, -1) \in N(T)$ e $(1, 5, 5) \in I(T)$, **D)** $(1, -1, -1) \in N(T)$ e $(1, 5, 5) \in I(T)$.

Exercício 123 *[2010/11 - 2º Teste - MEEC]*

V1. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que:

$$T(1, 0, 0) = (1, 2); \quad T(1, 1, 0) = (2, 4); \quad T(1, 1, 1) = (3, 4).$$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A) T é injectiva e sobrejectiva; **B)** T é invertível mas não sobrejectiva;
C) T não é injectiva mas é sobrejectiva; **D)** T não é injectiva nem sobrejectiva.

Exercício 124 *[2000/1 - 1º Exame - LEC]*

V1. Qual a distância em $\mathbb{R}^3$ entre o ponto $P = (-3,\, 0,\, 1\,)$ e a recta definida pelo sistema de equações

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_2 & = & 0 \\ x_3 & = & 0 \end{array} \right. \quad ?$$

A) $\sqrt{3}$ **B)** $\sqrt{2}$ **C)** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **D)** 1

....

Resolução:

Designando por S a recta dada, a distância d do ponto P ao plano S é, por definição,

$$d = \min_{s \in S} \|s - P\|.$$

Ora, pelo teorema da melhor aproximção (ou da aproximação óptima), existe um ponto em S mais próximo de P do que qualquer outro. Esse ponto, designêmo-lo por s_0, é dado por $s_0 = \mathcal{P}P$, em que $\mathcal{P}$ designa a projecção ortogonal sobre o subespaço S. Então

$$d = \|s_0 - P\| = \|\mathcal{P}P - P\| = \|\mathcal{P}^\perp P\|,$$

em que $\mathcal{P}^\perp$ representa a projecção complementar de $\mathcal{P}$ e é, portanto, a projecção ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre $S^\perp$.

Como $S = \{(x_1, x_2, x_3) : x_2 = x_3 = 0\} = L(\{e_1\})$, $e_1 = (1, 0, 0)$, tem-se $\mathcal{P}P = -3e_1$, donde $d = \|(0, 0, 1)\| = 1$. pelo que a resposta correcta é **D**.

Exercício 125 *[2000/1 - 2º Exame - LEC]*

V1. Qual dos seguintes conjuntos constitui uma base ortogonal para o subespaço de $\mathbb{R}^3$ que é ortogonal à recta de equação cartesiana

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 - x_2 & = & 0 \\ x_1 - x_3 & = & 0 \end{array} \right. \quad ?$$

A) $\{(1, 1, 0), (1, -1, 0)\}$

B) $\{(1, -1, 0), (1, 1, -2)\}$

C) $\{(1, 1, 1), (1, 1, -2)\}$

D) $\{(1, 1, 0), (2, -2, 1)\}$

....

Resolução:

Designemos por S o subespaço ortogonal à recta R dada. Em primeiro lugar é conveniente salientar que qualquer dos conjuntos dados é um conjunto ortogonal, pelo que aquele que for uma base de S será uma base ortogonal de S. Ora a recta R é caracterizada por $R = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 =$

$x_3\} = L(\{(1,1,1)\})$. Logo uma base ortogonal de S é constituída por vectores que são ortogonais ao vector $(1,1,1)$. Está nestas condições apenas o conjunto em B, pois

$$(B) \quad <(1,-1,0),(1,1,1)>=0 \quad , \quad <(1,1,-2),(1,1,1)>=0,$$

e

$$\begin{array}{lll} (A) & <(1,1,0),(1,1,1)>=2 & , \quad <(1,-1,0),(1,1,1)>=0, \\ (C) & <(1,1,1),(1,1,1)>=3 & , \quad <(1,1,-2),(1,1,1)>=0, \\ (D) & <(1,1,0),(1,1,1)>=2 & , \quad <(2,-2,1),(1,1,1)>=1. \end{array}$$

Assim, a resposta correcta é **B**.

Exercício 126 *[2000/1 - 2º Exame - LEC]*

V1. Sejam $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Enumere a lista completa das funções que definem um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

I. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sqrt{2}u_1v_1 + \frac{2}{5}u_2v_2 + 7u_3v_3$

II. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_3^2v_3^2$

III. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2u_1v_1 + 4u_3v_3$

IV. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 - u_2v_2 + u_3v_3$

A) I e III **B)** IV **C)** I **D)** II

....

Resolução:

Para que uma função definida em $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ e com valores reais não negativos, como é o caso de qualquer das aqui consideradas, seja produto interno tem que satisfazer três propriedades: para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e quaiquer vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$,

(1) Simetria: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$;
Qualquer das funções dadas satisfaz a esta condição.

(2) Linearidade relativamente a qualquer das duas variáveis;
Das funções dadas apenas II não satisfaz a esta propriedade, pelo que esta não úm produto interno. Efectivamente, com $\mathbf{u} = \mathbf{v} = (1,0,0)$ e $\mathbf{x} = (\mathbf{-1}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$, tem-se:

$$\begin{array}{rrcl} \text{(II)} & \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle & = & u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_3^2v_3^2 = 1 \\ \text{(II)} & \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle & = & x_1^2v_1^2 + x_2^2v_2^2 + x_3^2v_3^2 = 1 \\ \text{(II)} & \langle \mathbf{u} + \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle & = & (u_1 + x_1)^2v_1^2 + (u_2^2 + x_2^2)^2v_2^2 + (u_3 + x_3)^2v_3^2 = 0. \end{array}$$

(3) Positividade: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$ se $\mathbf{u} \neq (0,0,0)$;
Das três funções em causa (II já foi eliminada antes) apenas a função em I satisfaz esta propriedade. De facto, para esta função, tem-se

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \sqrt{2}u_1^2 + \frac{2}{5}u_2^2 + 7u_3^2 > 0 \text{ se } \mathbf{u} \neq (0,0,0).$$

Para ver que as outras funções não satisfazem a propriedade basta notar que, em III com $\mathbf{u} = \mathbf{v} = (0,1,0)$ se tem

$$\text{(III)} \qquad \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0,$$

e que, em IV com $\mathbf{u} = \mathbf{v} = (1,1,0)$, se tem

$$\text{(IV)} \qquad \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0.$$

Assim, a resposta correcta é **C**.

Exercício 127 *[2000/1 - 2ºExame - LEC]*

V1. Qual a distância em $\mathbb{R}^3$ entre o ponto $P = (-2,\ 0,\ 0\,)$ e a recta definida pelo sistema de equações

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3\,x_1 + 3\,x_2 - x_3 & = & 0 \\ -3\,x_2 & = & 0 \end{array} \right. \quad ?$$

A) $3\sqrt{\frac{2}{5}}$ **B)** $\frac{3}{\sqrt{5}}$ **C)** 2 **D)** $\sqrt{\frac{21}{5}}$

. . . .

Resolução:

Como vimos no Exercício 124 a distância d do Ponto $P = (-2,0,0)$ à recta S considerada é dada por

$$d = \|\mathcal{P}P - P\|,$$

em que P representa a projecção ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre S. Como S é uma recta que passa pela origem, é um subespaço de dimensão 1 e é fácil obter uma base de S. De facto,

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2 = 0 \text{ e } x_3 = 3x_1\} = L(\{(1,0,3)\}),$$

pelo que uma base de S é $\{(1{,}0{,}3)\}$. Então $\mathcal{P}P = \frac{<(-2,0,0),(1,0,3)>}{\|(1,0,3)\|^2}(1,0,3) = -\frac{2}{10}(1,0,3) = -\frac{1}{5}(1,0,3)$, logo $\mathcal{P}P - P = \frac{1}{5}(9,0,-3)$ e, portanto,

$$d = \frac{1}{5}\sqrt{81+9} = \frac{3}{5}\sqrt{10} = 3\sqrt{\frac{2}{5}}.$$

Assim, a resposta correcta é **A**.

Exercício 128 *[2005/6 - 2º Teste/1º Exame - LEEC]*

V1. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Considerando em $\mathbb{R}^4$ o produto interno usual, qual dos seguintes conjuntos constitui uma base ortogonal de C_A, o espaço das colunas de A?

A) $\{(1,-1,1,2), (1,1,-2,1)\}$
B) $\{(1,-1,1,2), (1,1,-2,1), (1,3,2,0)\}$
C) $\{(1,-1,1,2), (1,1,-2,1), (-3,1,0,2)\}$
D) $\{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$

. . . .

Resolução:

Uma vez que nos são apresentados conjuntos com um número distinto de elementos, convém começar por saber qual a dimensão dos espaço das colunas de A. Isso pode ser conseguido usando o método de eliminação de Gauss, que também nos fornece uma base para C_A, ainda que não necessariamente ortogonal. Por razões que adiante serão explicadas consideramos a matriz aumentada com um vector genérico de componentes x, y, z, w. Implementando a eliminação de Gauss para esta matriz, vem

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 & x \\ -1 & 2 & 3 & 3 & y \\ 1 & -3 & 1 & 3 & z \\ 2 & -1 & 3 & -3 & w \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 & x \\ 0 & 2 & 6 & 2 & y+x \\ 0 & -3 & -2 & 4 & z-x \\ 0 & -1 & -3 & -1 & w-2x \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 & x \\ 0 & 2 & 6 & 2 & y+x \\ 0 & 0 & 7 & 7 & z+1/2x+3/2y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w-3/2x+1/2y \end{array}\right]$$

Daqui se conclui que o espaço da colunas de A tem dimensão 3 e que uma base desse subespaço é constituída pelas primeiras 3 colunas de A (aquelas que dão origem às colunas com pivô no final da eliminação de Gauss). Podemos pois eliminar A (por o conjunto aí dado ter 2 elementos) e D (por o conjunto aí dado ter 4 elementos) do conjunto das respostas certas. Notemos agora que os conjuntos indicados em B e C são (de facto) ortogonais e que têm dois elementos comuns. Assim a questão resume-se a saber qual dos vectores não comuns aos dois conjuntos, (1,3,2,0) (que pertence ao conjunto em B) e (-3,1,0,2) (que pertence ao conjunto em C), pertence ao espaço das colunas de A. Foi por isso, que foi aumentada a matriz com um vector genérico, pois assim podemos imediatamente saber para um dado vector se ele pertence a C_A. Efectivamente, com $(x, y, z, w) = (1, 3, 2, 0)$ a última componente da matriz aumentada após a eliminação de Gauss é $w - 3/2x + 1/2y = 0$ e se for $(x, y, z, w) = (-3, 1, 0, 2)$ obtém-se para aquela componente $w - 3/2x + 1/2y = 7$. Tal significa que no primeiro caso, a matriz aumentada e a matriz A têm a mesma característica e, portanto, o vector $(1, 3, 2, 0)$ pertence a C_A, e no segundo caso a matriz aumentada tem caractrrística maior que a matriz$A$ e, portanto, o vector $(-3, 1, 0, 2)$ não pertence a C_A. Este mesmo processo permite verificar que os vectores comuns aos dois conjuntos pertencem (de facto) a C_A. Conclui-se então que o conjunto em B é uma base ortogonal de C_A.

Assim, a resposta correcta é **B**.

Exercício 129 *[2005/6 - 2º Teste/1º Exame - LEEC]*

V1. Considere o plano $\mathbb{P}$ de $\mathbb{R}^3$ que contém os pontos p, q e r dados por

$$p = (1, 0, 0) \ , \quad q = (-3, -1, 2) \ , \quad r = (0, 2, -1) \ .$$

Escrevendo um elemento genérico de $\mathbb{R}^3$ na forma (x, y, z), qual é a equação cartesiana do plano $\mathbb{P}$?

A) $x + 2y + 3z = 1$ **B)** $x - y - z = 1$ **C)** $-x + 2y + 4z = -1$ **D)** $x + y + z = 1$

. . . .

Resolução:

A equação vectorial de um plano $\mathbb{P}$ em $\mathbb{R}^3$ que contém os pontos p, q, r é da forma

$$\mathbb{P} = p + L(\{q - p.r - p\},$$

o que significa que qualquer u ponto do plano $\mathbb{P}$ se escreve na forma

$$u = p + \alpha(q - p) + \beta(r - p), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

obtendo-se, em particular, $u = p$ com $(\alpha, \beta) = (0, 0)$, $u = q$ com $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ e $u = r$ com $(\alpha, \beta) = (0, 1)$. O problema consiste pois em obter uma equação cartesiana de $\mathbb{P}$ conhecida a sua equação vectorial. A condição $u \in \mathbb{P}$ é equivalente a $u - p \in S$ e, tendo em conta a decomposição ortogonal de $\mathbb{R}^3$ determinada por S, $\mathbb{R}^3 = S \oplus S^\perp$, a condição anterior é equivalente a $u - p \perp S^\perp$.

Como S tem dimensão 2, $S^\perp$ tem dimensão 1, sendo gerado por um vector, digamos $s_\perp$ (ou seja, $S^\perp = L(\{s_\perp\})$). Se for $s_\perp = (a, b, c)$, $u = (x, y, z)$ e $p = (p_1, p_2, p_3)$, tem-se

$$u - p \perp S^\perp \quad \Leftrightarrow \quad <u, s_\perp> = <p, s_\perp>$$

ou ainda

$$ax + by + cz = d, \quad d = ap_1 + bp_2 + cp_3,$$

que é uma equação cartesiana de $\mathbb{P}$. Para concluir falta apenas determinar o vector $s_\perp$, o que pode ser feito determinando o núcleo da matriz que tem nas suas linhas as componentes dos vectores que geram S, $r - p = (-1, 2, -1)$ e $q - p = (-4, -1, 2)$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Facilmente se obtém $s_\perp = (1, 2, 3)$, pelo que uma equação cartesiana de $\mathbb{P}$ é

$$x + 2y + 3z = 1.$$

Assim, a resposta correcta é **A**.

Exercício 130 *[2005/6 - 2º Exame - LEEC]*

V1. Considere o plano $\mathbb{P}$ de $\mathbb{R}^3$ que contém os pontos:

$$p_1 = (1, 0, 0), \quad p_2 = (2, 1, 2), \quad p_3 = (1, 2, 3).$$

Designando por (x, y, z) um elemento genérico de $\mathbb{R}^3$, qual é a equação cartesiana de $\mathbb{P}$?

A) $x + 3y - 2z = -1$ **B)** $x + 3y - 2z = 1$ **C)** $x - 3y + 2z = -1$ **D)** $x - 3y - 2z = -1$

....

Resolução:

Usando a metodologia indicada no exercício anterior, neste caso com

$$p = p_1 = (1, 0, 0), \quad q - p = p_2 - p_1 = (1, 1, 2), \quad r - p = p_3 - p_1 = (0, 2, 3)$$

basta determinar uma solução $s_\perp = (a, b, c)$ da equação:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

, por exemplo, $s_\perp = (1, 3, -2)$. Uma equação cartesiana de $\mathbb{P}$ é

$$x + 3y - 2z = 1$$

já que $<s_\perp, p> = 1$.

Assim, a resposta correcta é **B**.

Exercício 131 *[2005/6 - 2º Exame - LEEC]*

V1. Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno não usual definido por

$$< x, y >= x_1y_1 + x_2y_2 + 4x_3y_3 + x_1y_3 + x_3y_1$$

em que $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3)$.

Qual o ângulo formado pelos vectores $v_1 = (1, 1, 1)$ e $v_2 = (-1, 1, 1)$, com este produto interno?

A) 0 **B)** $\pi/4$ **C)** $\pi/2$ **D)** $-\pi/4$

. . . .

Resolução:

Esta questão não está formulada correctamente, faltando dizer qual o domínio considerado. Como se sabe, a função cosseno $x \mapsto \cos x$ está bem definida em toda a recta real, sendo periódica de período 2π e, como tal, não invertível. Mesmo quando considerada como como definida apenas num período, não é invertível. No entanto, se a considerarmos como definida apenas no intervalo $[0, \pi]$ (ou em qualquer intervalo da forma $[k\pi, (k + 1)\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$) ela é invertível, sendo a sua inversa a função arco cosseno:

$$\cos\theta = x \in [-1, 1] \to \theta = \arccos x \in [0, \pi].$$

Assim, considerando a função cosseno com domínio $[0, \pi]$, a sua inversa a função arco cosseno permite definir o ângulo entre dois vectores não nulos v_1 e v_2, de um espaço linear real, através de

$$\theta = \arccos \frac{< v_2, v_1 >}{\|v_1\| \, \|v_2\|}.$$

Note-se que como consequência da desigualdade de Cauchy-Schwarz, efectivamente $< v_2, v_1 > /\|v_1\| \, \|v_2\| \in [-1, 1]$.

De acordo com a convenção anterior, podemos pois eliminar imediatamente D do conjunto de respostas certas. Para saber qual a resposta certa, basta calcular:

$$\|v_1\| = \sqrt{< v_1, v_1 >} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \quad \|v_2\| = \sqrt{< v_2, v_2 >} = \sqrt{4} = 2, \quad < v_2, v_1 >= 4,$$

donde

$$\theta = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Assim, a resposta correcta é **B**.

Exercício 132 *[2006/7 - 2º Teste/1º Exame - LEC/MEC]*

V1. Em $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual, qual a melhor aproximação do vector (7,7,3) por elementos do subespaço gerado pelos vectores (1,-1,1) e (1,1,6)?

A) (-2,4,2) **B)** (0,2,5) **C)** (-3,5,2) **D)** (-3,-1,4)

. . . .

Resolução:

De acordo com o teorema da projecção ortogonal, a melhor aproximação de um vector x por elementos de um subespaço é a projecção ortogonal de x sobre esse subespaço. Podemos determiná-la pela soma das projecções ortogonais do vector x sobre cada um dos elementos de uma base ortogonal desse subespaço. Neste caso conhecemos um conjunto gerador do subespaço, mas não uma base ortogonal. Podemos facilmente obtê-la pelo método de ortogonalização de Gram-Schmidt:

$$\begin{array}{lll} v_1 = (1, -1, 1) & \longrightarrow & u_1 = v_1 \\ v_1 = (1, 1, 6) & \longrightarrow & u_2 = v_2 - \frac{<v_2,u_1>}{\|u_1\|^2} u_1 = v_2 - 2u_1 = (-1, 3, 4). \end{array}$$

Então

$$\begin{aligned} P(7,7,3) &= \frac{<(7,7,3),u_1>}{\|u_1\|^2}u_1 + \frac{<(7,7,3),u_2>}{\|u_2\|^2}u_2 \\ &= u_1+u_2=(0,2,5), \end{aligned}$$

onde se usaram as seguintes relações: $\|u_1\|^2=3$, $\|u_2\|^2=26$, $<(7,7,3),u_1>=3$, $<(7,7,3),u_2>=26$.

Assim, a resposta correcta é **B**.

Exercício 133 *[2006/7 - 2º Teste/1º Exame - LEC/MEC]*

V1. Qual das seguintes é uma equação cartesiana do plano P de $\mathbb{R}^3$ que contém o ponto (1,1,1) e que é gerado pelos vectores (1,1,0) e (1,-1,1)?

A) $x-y-2z=-2$ **B)** $x-y+2z=-2$ **C)** $x-y-2z=2$ **D)** $-x+y+2z=-2$

....

Resolução:

Trata-se de mais uma questão em que se pretende determinar a equação cartesiana de um plano P, conhecida a sua equação vectorial, que neste caso é:

$$P=\{(1,1,1)\}+S$$

com $S=L(\{(1,1,0),(1,-1,1)\})$. Como $\dim S=2$, tem-se $\dim S^\perp=1$ e, portanto, $S^\perp=L(\{s_\perp\})$ em que $s_\perp=(a,b,c)$ é qualquer vector solução da equação

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

por exemplo, $s_\perp=(1,-1,-2)$. Uma equação cartesiana de P é

$$x-y-2z=-2,$$

pelo que a resposta correcta é **A**.

Exercício 134 *[2006/7 - 2º Exame - LEC/MEC]*

V1. Em $\mathbb{R}^3$, qual é o ponto de intersecção da recta que passa pelos pontos (1,1,1) e (3,5,7) com o plano $P=\{(x,y,z): x+y+z=9\}$?

A) (1,2,6) **B)** (2,2,5) **C)** (2,3,4) **D)** (1,5,3)

....

Resolução:

A recta R que passa pelos pontos $p=(1,1,1)$ e $q=(3,5,7)$ tem com equação vectorial

$$R=p+L(\{q-p\}),$$

e, portanto, um ponto (x,y,z) pertence à recta R se for da forma:

$$(x,y,z)=p+\alpha(q-p)=(1+2\alpha,1+4\alpha,1+6\alpha),$$

com $\alpha\in\mathbb{R}$. Exigindo que esse ponto pertença também ao plano P, obtém-se

$$1+2\alpha+(1+4\alpha)+(1+6\alpha)=9 \quad\Leftrightarrow\quad \alpha=\frac{1}{2}.$$

Substituindo na relação anterior, vem

$$(x,y,z)=(2,3,4).$$

Assim, a resposta correcta é **C**.

Exercício 135 *[2006/7 - 2º Exame - LEC/MEC]*

V1. A distância (medida na norma usual de $\mathbb{R}^3$) do vector $(1,-1,0)$ ao conjunto das soluções do sistema de equações homogéneo

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

é:

A) $\sqrt{6}$ **B)** $\sqrt{2}$ **C)** $2\sqrt{2}$ **D)** $\sqrt{3}$

....

Resolução:

Designando por A a matriz do coeficientes do sistema dado, o conjunto das soluções da equação $Au = 0$ tem a estrutura de um subespaço de $\mathbb{R}^3$, designemo-lo por U.

De acordo com o teorema da melhor aproximação (ou da aproximação óptima) a distância do vector v ao subespaço U é dada por

$$d = d(v,U) = \min_{u \in U} ||v - u|| = ||v - Pv|| = ||P^{\perp} v||,$$

em que P representa a projecção ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre U e $P^{\perp}$ a sua complementar $P^{\perp} = I - P$. Usando o método de eliminação de Gauss,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

facilmente se conclui que U é gerado pelo vector $u = (1,1,1)$. Consequentemente, $v = (1,-1,0)$ é ortogonal ao subespaço U, pelo que $Pv = 0$ e, portanto,

$$d = ||v|| = \sqrt{2}.$$

Assim, a resposta correcta é **B**.

Exercício 136 *[2007/8 - 2º Teste/1º Exame - MEC]*

V1. Sejam V um espaço euclideano e $F = L(\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\})$, em que os vectores v_j, $j = 1, \ldots 5$ são não nulos e satisfazem as seguintes condições:

$$1)\ <v_1, v_2> = <v_1, v_5> = 0, \quad 2)\ v_3 \in L(\{v_1, v_2\}), \quad 3)\ v_1 + v_2 = v_3 + v_4.$$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira para todos os subespaços F gerados por cinco vectores nas condições acima indicadas:

A) $\dim F = 2$, **B)** $2 \leq \dim F \leq 3$, **C)** $\dim F = 3$, **D)** $\dim F \geq 4$.

....

Resolução:

Vejamos o que cada uma das condições permite afirmar acerca das dimensões:

1) $<v_1, v_2> = <v_1, v_5> = 0$

Esta condição permite afirmar imediatamente que $\dim F \geq 2$ uma vez que qualquer dos conjuntos $\{v_1, v_2\} \subset F$ e $\{v_1, v_5\} \subset F$ é linearmente independente (vectores ortogonais não nulos são necessariamente linearmente independentes). No entanto, nada sabemos acerca da independência linear do conjunto $\{v_1, v_2, v_5\} \subset F$.

2) $v_3 \in L(\{v_1, v_2\})$

Esta condição é equivalente a $L(\{v_1, v_2\}) = L(\{v_1, v_2, v_3\})$.

3) $v_1 + v_2 = v_3 + v_4$

Esta condição significa que o conjunto $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ é linearmente dependente ou ainda que $L(\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = L(\{v_1, v_2, v_3\}$. Mas, em face da anterior, concluímos que $L(\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = L(\{v_1, v_2\}$.

Da análise anterior resulta que

$$F = L(\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}) = L(\{v_1, v_2, v_5\}),$$

pelo que $\dim F \leq 3$ e, por outro lado, que $\dim F \geq 2$, uma vez que qualquer dos conjuntos $\{v_1, v_2\} \subset F$ e $\{v_1, v_5\} \subset F$ é linearmente independente. Nada mais podemos afirmar, que seja válido para um conjunto com as características indicadas. Há casos em que será $\dim F = 2$, por exemplo, se v_5 for um múltiplo não nulo de v_2. Outros casos há em que $\dim F = 3$, por exemplo, se $<v_2, v_5>= 0$.

Assim, a resposta correcta é **B**.

Exercício 137 *[2007/8 - 2º Teste/1º Exame - MEC]*

V1. Sejam $x = (1, 3, 1)$ e $\mathcal{S}$ o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores $s_1 = (1, 0, 1)$ e $s_2 = (2, 2, 0)$. Qual é o valor de $d(x, \mathcal{S})$ (a distância de x ao subespaço $\mathcal{S}$)?

A) 1, **B)** $\sqrt{2}$, **C)** $\sqrt{3}$, **D)** $\sqrt{5}$.

. . . .

Resolução:

De acordo com o teorema da melhor aproximação o ponto de $\mathcal{S}$ mais próximo de $x = (1, 3, 1)$ é Px, em que P é o operador de projecção ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathcal{S}$, tendo-se

$$d(x, \mathcal{S}) = ||x - Px|| = ||P^{\perp}x||,$$

em que $P^{\perp}$ é a projecção complementar de P, $P^{\perp} = I - P$, sendo pois a projecção projecção ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathcal{S}^{\perp}$. Ora, $\mathcal{S}^{\perp}$ tem dimensão 1 e é gerado por um vector (não nulo), $s_{\perp}$, ortogonal a $\mathcal{S}$ e, portanto, ortogonal a s_1 e s_2. Para o obter basta resolver a equação

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} s_{\perp} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou, alternativamente, calcular o produto externo de s_1 e s_2, obtendo-se $s_{\perp} = (1, -1, -1)$ ou um seu múltiplo não nulo. Consequentemente,

$$P^{\perp}x = \frac{<x, s_{\perp}>}{||s_{\perp}||^2} s_{\perp} = (-1, 1, 1), \quad ||P^{\perp}x|| = \sqrt{3},$$

pelo que a resposta correcta é **C**.

Exercício 138 *[2007/8 - 2º Exame - MEC]*

V1. Considere $\mathbb{R}^3$ o produto interno usual e seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

Qual dos seguintes vectores pertence a $C_A^{\perp}$, o (complemento) ortogonal dos espaço das colunas de A?

A) (1,2,1), **B)** (1,-2,1), **C)** (1,2,-3), **D)** (1,-2,3).

....

Resolução:

Um vector $u \in C_A^\perp$ é tal que $<u, c_j>= u^t c_j = 0$, $j = 1, 2, 3$, em que c_j é a coluna j de A. Ou seja, $u \in C_A^\perp$ é tal que

$$u^t A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A^t u = 0.$$

Para determinar as soluções desta última equação podemos recorrer ao método de eliminação de Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

obtendo-se $u = (1, -2, 1)$ ou um seu múltiplo não nulo.

Assim, a resposta correcta é **B**.

Exercício 139 *[2007/8 - 2º Exame - MEC]*

V1. Considere $\mathbb{R}^2$ o produto interno definido por

$$<u, v>= u^t \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} v,$$

em que se considera a representação dos elementos de $\mathbb{R}^2$ como vectores coluna e os seguintes vectores:

$$x = (1, 2), \quad y = (3, 4), \quad z = (5, -4), \quad w = (5, -2).$$

Qual dos seguintes conjuntos é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^2$ com este produto interno?

A) $\{x, y\}$, **B)** $\{x, z\}$, **C)** $\{y, z\}$, **D)** $\{y, w\}$.

....

Resolução:

Uma base ortogonal de $\mathbb{R}^2$ é constituída por quaisquer dois vectores não nulos que sejam ortogonais para o produto interno considerado (recorde-se que qualquer base de $\mathbb{R}^2$ é formada por dois vectores linearmente independentes e que vectores ortogonais são necessariamente linearmente independentes). Trata-se, pois, apenas de fazer os cálculos dos produtos internos dos pares de vectores dados como alternativas. Para tal pode ser conveniente exprimir o resultado em termos das componentes dos vectores dados: $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$,

$$\begin{aligned} <(u_1, u_2), (v_1, v_2)> &= [u_1 \ u_2] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \\ &= [u_1 \ u_2] \begin{bmatrix} 2v_1 + v_2 \\ v_1 + 2v_2 \end{bmatrix} \\ &= 2u_1 v_1 + u_1 v_2 + u_2 v_1 + 2u_2 v_2. \end{aligned}$$

Tem-se

$$\begin{aligned} &<x, y>=<(1, 2), (3, 4)>= 6 + 4 + 6 + 16 = 32, \\ &<x, z>=<(1, 2), (5, -4)>= 10 - 4 + 10 - 16 = 0, \\ &<y, z>=<(3, 4), (5, -4)>= 30 - 12 + 20 - 32 = 6, \\ &<y, w>=<(3, 4), (5, -2)>= 30 - 6 + 20 - 16 = 28, \end{aligned}$$

pelo que, dos vectores dados, apenas o par (x, z) é formado por vectores ortogonais para o produto interno considerado. Assim, a resposta coreecta é **B**.

Exercício 140 *[2008/9 - 2º Teste/1º Exame - LEIC]*

V1. Seja S o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores $(1,2,3)$ e $(3,2,1)$. Qual dos seguintes conjuntos é uma base ortogonal de S?

A) $\{(1,2,3),(-3,0,1)\}$, **B)** $\{(3,2,1),(-1,1,1)\}$,
C) $\{(4,5,-4),(1,0,1)\}$, **D)** $\{(2,0,-2),(1,1,1)\}$.

Exercício 141 *[2008/9 - 2º Teste/1º Exame - LEIC]*

V1. Sejam $x=(1,4,1)$ e S subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores $(0,2,4)$ e $(1,3,5)$. Considerando em $\mathbb{R}^3$ o produto interno usual, qual dos seguintes pares de vectores y,z é o que corresponde à decomposição

$$x = y + z \text{ com } y \in S \text{ e } z \in S^{\perp}?$$

A) $y=(2,2,2), z=(-1,2,-1)$, **B)** $y=(3,3,3), z=(-2,1,-2)$,
C) $y=(0,6,0), z=(1,-2,1)$, **D)** $y=(0,0,0), z=(1,4,1)$.

Exercício 142 *[2008/9 - 2º Exame - LEIC]*

V1. Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno não usual definido como se segue: sendo $x=(x_1,x_2,x_3)$, $y=(y_1,y_2,y_3)$,

$$< x, y >= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Qual dos seguintes vectores é ortogonal ao vector $(1,0,-1)$? (A noção de ortogonalidade é a determinada pelo produto interno considerado).

A) $(1,2,-1)$, **B)** $(-1,-3,4)$, **C)** $(-2,3,2)$, **D)** $(2,2,1)$.

Exercício 143 *[2008/9 - 2º Exame - LEIC]*

V1. Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno usual. Sendo $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3$ o plano cuja equação cartesiana é $3x+2y+z=0$, qual dos seguintes pontos de $\mathcal{P}$ está mais próximo do vector $(1,1,-1)$?

A) $(-3,5,-1)$, **B)** $(2,-3,0)$, **C)** $(-2,1,4)$, **D)** $(-1,3,-3)$.

Exercício 144 *[2008/9 - 2º Exame - LEIC]*

V1. Para $n \in \mathbb{N}$, considere em $\mathbb{R}^n$ o produto interno usual. Seja $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz simétrica e represente por N_S, L_S e C_S o núcleo de S, o espaço das linhas de S e o espaço das colunas de S, respectivamente. Considere as seguintes afirmações:

I. $N_S = \{0\}$, II. $L_S = C_S$, III. ${N_S}^{\perp} = C_S$, IV. $\dim N_S + \dim L_S = n$.

Qual é a lista completa das afirmações verdadeiras para qualquer matriz nas condições mencionadas?

A) I e IV, **B)** I, II e IV, **C)** II, III e IV, **D)** II e IV.

Exercício 145 *[2009/10 - 1º Exame - MEC]*

V1. Considere a função $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como se segue: sendo $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, então

$$F(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + 2(x_2y_1 + x_1y_2).$$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A) F não é linear na primeira variável,
B) F não é simétrica (ou seja, existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $F(x, y) \neq F(y, x)$),
C) F não é positiva (ou seja, $F(x, x) \leq 0$ para algum $x \neq (0, 0)$),
D) F é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

Exercício 146 *[2009/10 - 1º Exame - MEC]*

V1. Seja S o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos três vectores seguintes:

$$v_1 = (1, 1, -1), \quad v_2 = (1, 2, 1), \quad v_3 = (1, 5, 7).$$

Qual dos seguintes conjuntos contém simultaneamente uma base ortogonal de S e uma base de $S^\perp$?

A) $\{(1, 1, -1), (1, 4, 5), (3, -2, 1)\}$,
B) $\{(1, 1, -1), (5, -4, 1), (1, 2, 3)\}$,
C) $\{(1, 1, -1), (1, 4, -5), (3, -2, 1)\}$,
D) $\{(1, 2, 1), (2, 1, -4), (2, 0, 1)\}$.

Exercício 147 *[2009/10 - 2º Exame - MEC]*

V1. Seja S o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos três vectores seguintes:

$$v_1 = (1, 1, -1), \quad v_2 = (1, 2, 1), \quad v_3 = (1, 5, 7).$$

Qual dos seguintes conjuntos é uma base ortogonal de S?

A) $\{(1, 1, -1), (1, 4, 5), (3, -2, 1)\}$,
B) $\{(1, 1, -1), (1, 4, 5), (-3, 2, 1)\}$,
C) $\{(1, 1, -1), (3, -2, 1)\}$,
D) $\{(1, 2, 1), (2, 1, -4)\}$.

Exercício 148 *[2009/10 - 2º Exame - MEC]*

V1. Seja S o subespaço definido no problema anterior. Qual é a distância do vector $(2, -3, 2)$ ao subespaço S?

A) $\sqrt{2}$, **B)** $\sqrt{7}$, **C)** $\sqrt{14}$, **D)** $\sqrt{21}$.

Exercício 149 *[2010/11 - 3º Teste - MEEC]*

V1. Considere em $\mathbb{R}^4$ o produto interno usual e os seguintes subconjuntos:
$S_1 = \{(0, 0, 1, -1), (0, 0, 1, 1), (1, 1, 1, -1), (1, 1, 0, 0)\}$
$S_2 = \{(0, 0, 1, -1), (1, 1, 0, 0), (1, -1, 0, 0), (1, 1, 1, 0)\}$
$S_3 = \{(0, 0, 1, -1), (0, 0, 1, 1), (1, -1, 0, 0), (1, 1, 0, 0)\}$
$S_4 = \{(0, 0, 1, -1), (1, 1, 0, 0), (1, -1, 1, 0), (1, -1, 0, 0)\}$.
Qual deles constitui uma base ortogonal de $\mathbb{R}^4$?

A) S_1, **B)** S_2, **C)** S_3, **D)** S_4.

Exercício 150 *[2010/11 - 3º Teste - MEEC]*

V1. Seja R a recta de $\mathbb{R}^3$ gerada pelo vector $(1,1,1)$.

Considerando os vectores de $\mathbb{R}^3$ escritos na forma (x,y,z), qual das seguintes é a equação cartesiana do plano P tal que $P \perp R$ e $(1,1,1) \in P$?

A) $x-y+z=3$, **B)** $x+y+z=3$, **C)** $x+y+z=-3$, **D)** $x-y+2z=3$.

Exercício 151 *[2010/11 - 3º Teste - MEEC]*

V1. Considere em $\mathbb{R}^{2\times 2}$ o produto interno usual e seja S o subespaço de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ definido por

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} : a,b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Qual das seguintes matrizes é a melhor aproximação (ou aproximação óptima) de matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ por elementos de S?

A) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, **B)** $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, **C)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, **D)** $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$.

Exercício 152 *[2010/11 - Exame - MEEC]*

V1. Considere a base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ constituída pelos vectores :

$$v_1 = (1,2,-2),\ v_2 = (2,1,2),\ v_3 = (-2,2,1).$$

Qual das seguintes é uma equação cartesiana do subespaço $S = L\{v_1, v_3\}$?

A) $4x-y+z=0$; **B)** $2x+y+2z=0$; **C)** $2x-2y-z=0$; **D)** $2x-3y-2z=0$.

Exercício 153 *[2010/11 - Exame - MEEC]*

V1. Nas condições do problema anterior, calcule a projecção ortogonal do vector $u = v_1 - v_2 + v_3$ no subespaço S.

A resposta correcta é:

A) $Proj_S(u) = (3,0,-3)$; **B)** $Proj_S(u) = (0,6,-3)$;

C) $Proj_S(u) = (-1,4,-1)$; **D)** $Proj_S(u) = (4,2,-5)$.

Exercício 154 *[2010/11 - Exame - MEEC]*

V1. Qual dos quatro vectores seguintes está mais próximo do plano $\mathbb{P} = L(\{(1,1,1),(1,2,3)\})$?

A) $(0,1,0)$, **B)** $(1,0,1)$, **C)** $(1,1,3)$, **D)** $(2,3,5)$.

Exercício 155 *[2000/1 - 1°Exame - LEC]*

V1. Seja A uma matriz $3{\times}3$ com os valores próprios -9 , 6 e 7 . Considere as seguintes afirmações:

I. Para todo o vector $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ o sistema $(A - 6\,I)\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ admite uma solução $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

II. A matriz $A + I$ tem característica menor que 3 .

III. A transformação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida pela matriz $A - 7\,I$ não é injectiva.

IV. Para todo o vector $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ em $\mathbb{R}^3$, $A\,\mathbf{y} \neq 3\,\mathbf{y}$.

Qual a lista completa de afirmações correctas?

A) Nenhuma **B)** I , II , III e IV **C)** I e II **D)** III e IV

....

Resolução:

Analisemos cada uma das afirmações enunciadas:

I é falsa.
Efectivamente, nas condições do problema, tem-se

$$\dim N_{A-6I} = 1 \ (= \dim N_{A-7I} = \dim N_{A+9I}),$$

pelo que $\dim C_{A-6I} = 2$, uma vez que $\dim N_{A-6I} + \dim C_{A-6I} = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Consequentemente, a equação

$$(A - 6I)x = b$$

só tem solução se $b \in C_{A-6I} \neq \mathbb{R}^3$. Assim, a afirmação I é falsa.

II é falsa.
A característica de uma matriz é igual à dimensão do espaço das colunas dessa matriz. Como -1 não é valor próprio de A (de acordo com os dados do problema os valores próprios de A são -9, 6 e 7), $A + I$ é invertível ou, o que é equivalente $N_{A+I} = \{0\}$ e, portanto,

$$\dim C_{A+I} = 3 - \dim N_{A+I} = 3.$$

Assim, a afirmação II é falsa.

III é verdadeira.
A transformação T é injectiva se e só se $N_{A-7I} = \{0\}$ (recorde-se que uma transformação linear é injectiva se e só se o seu núcleo for constituido apenas pelo vector zero). Como 7 é valor próprio de A, tem-se $N_{A-7I} \neq \{0\}$ e, portanto, T não é injectiva, pelo que a afirmação III é verdadeira.

IV é verdadeira.
Para todo o valor de $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-9, 6, 7\}$ a matriz $A - \lambda I$ é invertível (uma vez que $\{-9, 6, 7\}$ é o conjunto dos valores próprios de A) ou, o que é equivalente $N_{A-\lambda I} = \{0\}$. Ora, a afirmação IV é equivalente a

$$N_{A-3I} = \{0\},$$

uma vez que não existe $y \neq 0$ tal que $(A - 3I)y = 0$. Assim, a afirmação IV é verdadeira.

Assim, das afirmações enunciadas as verdadeiras são III e IV, pelo que a resposta correcta é **D**.

Exercício 156 *[2005/6 - 2º Teste/1º Exame - LEEC]*

V2. Seja $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ cujos valores próprios são -3 , 4 e 9 . Considere as seguintes afirmações:

I. Para um certo vector $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ o sistema $(A + 2\,I)\ \mathbf{x} = \mathbf{b}$ não admite soluções $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

II. Para todo o vector $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ em $\mathbb{R}^3$, $A\,\mathbf{y} \neq 9\,\mathbf{y}$.

III. A matriz $A - 4\,I$ é invertível.

IV. A transformação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x) = (A + 3\,I)x$ não é injectiva.

Qual a lista completa de afirmações correctas?

A) I , II e III **B)** I , II , III e IV **C)** II **D)** IV

. . . .

Resolução:

Este exercício é da mesma índole que o anterior e pode ser resolvido usando argumentos do mesmo tipo. Analisemos cada uma das afirmações enunciadas:

I é falsa.
Para todo o valor de $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{-3, 4, 9\}$ a matriz $A-\lambda I$ é invertível (uma vez que $\{-3, 4, 9\}$ é o conjunto dos valores próprios de A) ou, o que é equivalente, $N_{A-\lambda I} = \{0\}$. Em particular, $N_{A+2I} = \{0\}$ e, como $\dim N_{A+2I} + \dim C_{A+2I} = 3$, vem $\dim C_{A+2I} = 3$ ou, o que é equivalente,$C_{A+2I} = \mathbb{R}^3$. Consequentemente, o sistema $(A + 2\,I)\ \mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem uma única solução qualquer que seja o vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ considerado. Assim, I é falsa.

II é falsa.
A afirmação II é equivalente a afirmar que a equação $(A - 9I)u = 0$ não tem soluções não nulas ou, o que é equivalnte, que $N_{A-9I} = \{0\}$. Ora, tal é falso, pois 9 é valor próprio de A e, portanto, $N_{A-9I} \neq \{0\}$. Logo, II é falsa.

III é falsa.
Uma matriz quadrada é invertível se e só se o seu núcleo é trivial, ou seja, $\{0\}$. Ora, como 4 é valor próprio de A, tem-se $N_{A-4I} \neq \{0\}$ e, consequenetemente, $A - 4I$ não é invertível. Logo, III é falsa.

IV é verdadeira.
Uma transformação linear (não) é injectiva se e só se o seu núcleo (não) é $\{0\}$. Ora, o núcleo de T coincide com o núcleo de $A + 3I$, que é diferente de $\{0\}$, pois -3 é valor próprio de A, e daí decorre que $N_{A+3I} \neq \{0\}$. Logo, T não é injectiva e IV é verdadeira.

Assim, das afirmações dadas a única que é verdadeira é IV, pelo que a resposta correcta é **D**.

Exercício 157 *[2005/6 - 2º Exame - LEEC]*

V1. Seja A uma matriz quadrada que tem o número 3 como valor próprio.
Sendo I a matriz identidade de ordem 3, qual dos seguintes determinantes pode garantir que se anula?

A) $\det(A^2 - 3A + 6I)$ **B)** $\det(A^2 - 4A - 6I)$ **C)** $\det(A^2 - 3I)$ **D)** $\det(A^2 - 3A)$

. . . .

Resolução:

Em qualquer dos casos a matriz para a qual se pretende averiguar se o determinante se anula é um polinómio de grau 2 em A, da forma geral

$$P_A = A^2 + \alpha A + \beta I, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

que podemos factorizar na forma

$$P_A = (A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I)$$

em que λ_1 e λ_2 são as raízes (em geral, complexas) do polinómio

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 + \alpha\lambda + \beta.$$

Uma vez que apenas sabemos que 3 é valor próprio de A, apenas podemos garantir que se anula o determinante do polinómio P_A se λ_1 ou λ_2 for igual a 3 (recorde-se que o determinante de um produto é o produto dos determinantes). Tal acontece apenas no caso D, uma vez que

$$A^2 - 3A = A(A - 3I).$$

Em qualquer dos outros casos, quer λ_1 quer λ_2 são diferentes de 3. Efectivamente,

$$\begin{array}{lll} \lambda_{1,2} = \frac{3 \pm i\sqrt{15}}{2} \in \mathbb{C} & - & \text{no caso A;} \\ \lambda_{1,2} = \frac{3 \pm i\sqrt{8}}{2} \in \mathbb{C} & - & \text{no caso B;} \\ \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{3} \in \mathbb{R} & - & \text{no caso C.} \end{array}$$

Assim, a resposta correcta é **D**.

Exercício 158 *[2005/6 - 2º Exame - LEEC]*

V1. Qual é a forma de Jordan da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$?

A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **B)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ **C)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **D)** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

....

Resolução:

A forma de Jordan de uma matriz de ordem 2 é:

- uma matriz diagonal, tendo na diagonal principal os valores próprios da matriz; nesse caso teríamos dois blocos de Jordan cada um deles com dimensão 1;

ou

- uma matriz triangular (superior), tendo na diagonal principal os valores próprios da matriz e o outro elemento não nulo igual a 1; nesse caso teríamos apenas um bloco de Jordan com dimensão 2.

No presente caso a matriz tem apenas um valor próprio, o número 1, uma vez que o polinómio característico é

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)^2.$$

Podemos desde já eliminar as alternativas B e D do conjunto de respostas certas, pois na diagonal principal figuram números que não são valores próprios da matriz considerada. Por outro lado, a matriz dada não é diagonalizável, uma vez que a dimensão do espaço próprio associado ao valor próprio 1 é igual a 1, pois os vectores próprios são da forma $c(1, 0)$ com $c \neq 0$ por serem as soluções não nulas de $(A - I)x = 0$. Assim, a resposta correcta é **C**.

Exercício 159 *[2006/7 - 2º Teste/1º Exame - LEC/MEC]*

V1. Seja $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ tal que os valores próprios de A são -1, 0 e 1. Considere as seguintes afirmações, em que I representa a matriz identidade de ordem 3:

I. A é invertível;

II. O espaço das colunas de A tem dimensão 2;

III. O núcleo de $A - I$ tem dimensão 1;

IV. $A - I$ é invertível.

Qual é a lista completa de afirmações verdadeiras?

A) II **B)** II e III **C)** I e IV **D)** II, III e IV

....

Resolução:

Como $\{-1, 0, 1\}$ é o conjunto dos valores próprios de A, podemos imediatamente afirmar que

$$\dim N_A = \dim N_{A+I} = \dim N_{A-I} = 1.$$

Efectivamente, da definição de valor próprio decorre imediatamente que $N_A \neq \{0\}, N_{A+I} \neq \{0\}, N_{A-I} \neq \{0\}$. Por outro lado, como a valores próprios distintos estão associados vectores próprios linearmente independentes, a dimensão de cada um daqueles subespaços só pode ser 1, pois, caso contrário, existiria em $\mathbb{R}^3$ um conjunto linearmente independente com mais de 3 elementos, o que não é possível, como sabemos.

Da igualdade anterior decorre imediatamente que A, $A+I$ e $A-I$ não são invertíveis (recorde-se que uma matriz quadrada é invertível se e só se o seu núcleo for constituído pelo vector nulo), pelo que as afirmações I e IV são falsas e a afirmação III é verdadeira. A afirmação II também é verdadeira, pois

$$\dim C_A = \dim \mathbb{R}^3 - \dim N_A = 3 - 1 = 2.$$

Assim, a resposta correcta é **B**.

Exercício 160 *[2006/7 - 2º Exame - LEC/MEC]*

V1. Qual o conjunto dos valores de α reais para os quais a forma quadrática associada à matriz

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 3 & \alpha \end{bmatrix}$$

é definida positiva?

A) $]2, +\infty[$ **B)** $]-\infty, -2[$ **C)** $]-2, 2[$ **D)** $[-2, 2]$

....

Resolução:

A forma quadrática associada a uma matriz é definida positiva se a parte simétrica dessa matriz for definida positiva. Por outro lado, uma matriz simétrica é definida positiva se e só se os seus valores próprios forem todos (estritamente) positivos. Assim, para sabermos qual dos intervalos satisfaz as condições começamos por identificar a parte simétrica $(A_\alpha)_s$ da matriz A_α dada, obtendo-se (X^t representa a transposta de$X$):

$$(A_\alpha)_s = \frac{1}{2}(A_\alpha + A_\alpha^t) = \begin{bmatrix} \alpha & 2 \\ 2 & \alpha \end{bmatrix}$$

e calculamos os valores próprios desta matriz, que são as raízes do polinómio característico:

$$(\alpha - \lambda)^2 - 4 = (\alpha - \lambda - 2)(\alpha - \lambda + 2) = (\lambda - (\alpha - 2))(\lambda - (\alpha + 2)).$$

Os valores próprios de $(A_\alpha)_s$ são: $\alpha - 2$ e $\alpha + 2$. A condição de os valores próprios serem ambos (estritamente) positivos é equivalente a $\alpha > 2$. Assim, a resposta correcta é **A**.

Exercício 161 *[2007/8 - 2º Teste/1º Exame - MEC]*

V1. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ e Q_A a forma quadrática em $\mathbb{R}^2$ associada a A.

Qual das seguintes afimações é verdadeira?

A) Q_A é definida positiva,
B) Q_A é semi-definida positiva,
C) Q_A é semi-definida negativa,
D) Q_A é indefinida.

....

Resolução:

Como a forma quadrática associada a uma matriz coincide com a forma quadrática associada à parte simétrica dessa matriz, a classificação de uma forma quadrática é feita com base na classificação da parte simétrica da matriz que lhe está associada. Para matrizes simétricas A_s, tem-se:

- A_s é definida positiva (resp. negativa) se e só se os valores próprios de A_s são todos positivos (negativos);

- A_s é semi-definida positiva (resp. negativa) se e só se os valores próprios de A_s são todos não negativos (não positivos);

- A_s é indefinida se e só se A_s tem valores próprios uns positivos e outros negativos.

Com base nestes resultados, começamos por identificar a parte simétrica A_s da matriz dada (X^t representa a transposta de X):

$$A_s = \frac{1}{2}(A + A^t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

e calculamos os valores próprios desta matriz, que são as raízes do polinómio característico:

$$\det(A_s - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 2) - 4 = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3),$$

em que no último passo se usou a fórmula resolvente da equação do 2° grau. Daqui resulta que A_s tem um valor prprio positivo (2) e outro negativo (-3), pelo que A_s é indefinida e, portanto, também Q_A é indefinida. Assim, a resposta correcta é **D**.

Exercício 162 *[2007/8 - 2º Teste/1º Exame - MEC]*

V1. Sabe-se que uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tem apenas um valor próprio, λ, que o espaço próprio associado a λ, $E(\lambda)$, contém o vector $(1, 1, 0)$, que T é representada em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ por uma matriz triangular superior e que $T(1, 1, 1) = (2, 2, 1)$. Então, para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, a expressão correcta é:

A) $T(x, y, z) = (x + y + z, y + z, z)$,
B) $T(x, y, z) = (x + y, y + z, y + z)$,
C) $T(x, y, z) = (x + z, y + z, z)$,
D) $T(x, y, z) = (x + y, y + z, z)$.

....

Resolução:

Seja $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$ (ou seja, $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$). Para qualquer transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e, em particular, para a considerada neste exercício, tem-se:

$$T(x, y, z) = T(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xTe_1 + yTe_2 + zTe_3, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

O problema consiste pois em deteminar Te_1, Te_2 e Te_3.

Sabendo que T é representada em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ por uma matriz triangular superior, essa matriz, designemo-la por A, tem a forma

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & a & b \\ 0 & d_2 & c \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}.$$

Sabendo que T tem apenas um valor próprio, λ, como esse será também valor próprio de A e que uma matriz trinagular tem os valores próprios na diagonal principal, conclui-se imediatamente que

$$d_1 = d_2 = d_3 = \lambda$$

e, portanto,

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & a & b \\ 0 & \lambda & c \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

A condição $(1,1,0) \in E(\lambda)$ implica que $T(1,1,0) = \lambda(1,1,0)$ ou, o que é equivalente, que $A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Daqui se conclui que $a = 0$, por ser $A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + a \\ \lambda \\ 0 \end{bmatrix}$.

Por outro lado, como $T(1,1,1) = (2,2,1)$ ou, o que é equivalente, $A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, de $A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + b \\ \lambda + c \\ \lambda \end{bmatrix}$ conclui-se que

$$\lambda = 1, b = c = 1,$$

o que completa a determinação dos elementos da matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Consequentemente, $Te_1 = (1,0,0) = e_1$, $Te_2 = (0,1,0) = e_2$ e $Te_3 = (1,1,1) = e_1 + e_2 + e_3$ e, portanto, para qualquer $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, tem-se

$$T(x,y,z) = xe_1 + ye_2 + z(e_1 + e_2 + e_3) = (x+z)e_1 + (y+z)e_2 + ze_3 = (x+z, y+z, z).$$

Assim, a resposta correcta é **C**.

Exercício 163 *[2007/8 - 2º Exame - MEC]*

V1. Qual é o conjunto dos valores próprios da matriz $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$?

A) $\{1,3\}$, **B)** $\{-1,1,5\}$, **C)** $\{0,1,4\}$, **D)** $\{1,2,3\}$.

....

Resolução:

Trata-se de um problema de cálculo dos valores próprios da matriz A dada no enunciado, o que pode ser feito calculando, primeiro, o polinómio característico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ e, posteriormente, identificando as suas raízes que são os valores próprios de A. Neste caso, tem-se

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & 4 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)((2-\lambda)^2 - 4) = (1-\lambda)(2-\lambda-2)(2-\lambda+2) = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-4). \end{aligned}$$

Assim, os valores próprios de A são os números $0, 1$ e 4, pelo que a resposta correcta é **C**.

Exercício 164 *[2007/8 - 2º Exame - MEC]*

V1. Qual das matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 20 & -11 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ 20 & -9 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 14 & -8 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

não é diagonalizável?

A) A, **B)** B, **C)** C, **D)** D.

Resolução:

Apesar de as matrizes dadas terem elementos reais podemos sempre considerá-las como matrizes complexas. Uma matriz X de ordem 2 é diagonalizável se e só se existir uma base de $\mathbb{C}^2$ (ou de $\mathbb{R}^2$ no caso dos valores próprios serem reais) formada por vectores próprios de X. Uma vez que a valores próprios distintos estão associados vectores próprios linearmente independentes, uma condição suficiente para que tal aconteça é que a matriz tenha 2 valores próprios distintos. Vejamos qual é a situação para cada uma das matrizes identificando os respectivos valores próprios, por via da factorização do respectivo polinómio característico:

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= -(7-\lambda)(11+\lambda) + 80 = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3), \\
\det(B - \lambda I) &= -(9-\lambda)(9+\lambda) + 80 = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1), \\
\det(C - \lambda I) &= -(5-\lambda)(8+\lambda) + 42 = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2), \\
\det(A - \lambda I) &= -(1-\lambda)(3+\lambda) + 4 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2.
\end{aligned}$$

Daqui se conclui que as três primeiras matrizes (A, B e C) são diagonalizáveis, por terem dois valores próprios distintos, e a última (D) só tem um valor próprio com multiplicidade algébrica 2. Esta não é diagonalizável, por ter um espaço próprio com dimensão 1, como é fácil de verificar. Uma outra forma de extrair a mesma conclusão é notar que uma matriz de ordem 2 com apenas um valor próprio e diagonalizável só pode ser um múltiplo (o valor próprio) da identidade, o que não é o caso da matriz D.

Exercício 165 *[2008/9 - 2º Teste/1º Exame - LEIC]*

V1. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$T(x, y, z) = (2x + y + z, 2x + 3y + 4z, -x - y - 2z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

e considere os vectores de $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (0, 1, -1), \quad v_2 = (1, -1, 1), \quad v_3 = (-1, 1, 0), \quad v_4 = (-2, -3, 1), \quad v_5 = (2, 3, -2).$$

Qual dos seguintes conjuntos só contém vectores próprios de T?

A) $\{v_1, v_2, v_3\}$, **B)** $\{v_1, v_3, v_5\}$, **C)** $\{(0, 0, 0), v_1, v_3\}$, **D)** $\{v_1, v_3, v_4\}$.

Resolução:

Trata-se aqui de saber quais dos vectores dados são vectores próprios da transformação T. É claro que podemos desde já eliminar a alternativa B do conjunto de respostas certas, uma vez que, por definição, os vectores próprios são os vectores v não nulos que satisfazem a condição

$$Tv = \lambda v,$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Averiguemos quais dos vectores dados satisfazem esta condição. Tem-se

$$\begin{aligned}
Tv_1 &= (0,-1,1) = -(0,1,-1) = -v_1,\\
Tv_2 &= (2,3,-2) \neq \lambda v_2 \quad (\lambda \in \mathbb{R}),\\
Tv_3 &= (-1,1,0) = v_3,\\
Tv_4 &= (-6,-9,3) = 3(-2,-3,1) = 3v_4,\\
Tv_5 &= (5,5,-1) \neq \lambda v_5 \quad (\lambda \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Conclui-se assim que dos vectores dados apenas são vectores próprios de T os seguintes: v_1, v_3 e v_4, pelo que a resposta correcta é **D**.

Exercício 166 *[2008/9 - 2º Teste/1º Exame - LEIC]*

V1. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Qual das seguintes formas quadráticas definidas em $\mathbb{R}^2$ é definida positiva?

A) Q_A, **B)** Q_B, **C)** Q_C, **D)** Q_D.

....

Resolução:

Como a forma quadrática associada a uma matriz coincide com a forma quadrática associada à parte simétrica dessa matriz, a classificação de uma forma quadrática é feita com base na classificação da parte simétrica da matriz que lhe está associada. Para matrizes simétricas A_s, tem-se:

- A_s é definida positiva (resp. negativa) se e só se os valores próprios de A_s são todos positivos (negativos);

Com base nestes resultados, começamos por identificar as partes simétricas das matrizes dadas (escreveremos X_s para representar a parte simétrica da matriz X e X^t representa a transposta de X) e factorizamos os polinómios característicos para identificar os correspondentes valores próprios valores próprios; Note-se que A e C são simétricas. Tem-se:

$$A_s = A, \quad B_s = \frac{1}{2}(B + B^t) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C_s = C, \quad D_s = \frac{1}{2}(D + D^t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{aligned}
p_{A_s} &= (1-\lambda)^2 - 4 = (1-\lambda-2)(1-\lambda+2) = (\lambda+1)(\lambda-3),\\
p_{B_s} &= (3-\lambda)^2 - 4 = (3-\lambda-2)(3-\lambda+2) = (\lambda-1)(\lambda-5),\\
p_{C_s} &= (1-\lambda)(2-\lambda) - 9 = \lambda^2 - 3\lambda - 7 = (\lambda - \tfrac{3+\sqrt{37}}{2})(\lambda - \tfrac{3-\sqrt{37}}{2}),\\
p_{D_s} &= p_{A_s} = (\lambda+1)(\lambda-3).
\end{aligned}$$

Daqui se conclui que apenas a matriz B_s tem todos os valores próprios positivos, pelo que apenas Q_B é definida positiva e a resposta correcta é **B**.

Exercício 167 *[2008/9 - 2º Exame - LEIC]*

V1. Seja $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ a transformação definida por

$$T(z, w) = (z - w, z + w), \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

Qual é o conjunto dos valores próprios de T?

A) $\{0, 1\}$, **B)** $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$, **C)** $\{1 - i, 1 + i\}$, **D)** $\{1 - i\sqrt{2}, 1 + i\sqrt{2}\}$.

....

Resolução:

Os valores próprios de T coincidem com os valores próprios da matriz A, que a representa em relação à base canónica de $\mathbb{C}^2$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Os valores próprios de A são os números complexos $1 \pm i$, uma vez que o polinómio característico de A é

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)^2 + 1 = (\lambda - (1 - i))(\lambda - (1 + i)),$$

pelo que a resposta correcta é **C**.

Exercício 168 *[2008/9 - 2º Exame - LEIC]*

V1. Seja $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ que tem como valores próprios $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 2$. Considere as seguintes afirmações:

I. A é singular, II. A é diagonalizável, III. $\dim L_A < 3$, IV. $L_A \perp N_A$.

(L_A e N_A representam o espaço das linhas e o núcleo de A, respectivamente, e supõe-se $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual.)

Qual é a lista completa de afirmações verdadeiras?

A) I e III, **B)** I, II e III, **C)** I, II e IV, **D)** I, II, III e IV.

. . . .

Resolução:

Analisemos cada uma das afirmações separadamente:

I é verdadeira.

Efectivamente, as matrizes singulares são as não invertíveis ou, equivalentemente, aquelas cujo determinante se anula. Ora, como $\lambda = 0$ é valor póprio de A e os valores próprios de A são as soluções da equação caracterítica, tem-se $p(0) = \det A = (0)$. Logo, A é singular.

II é verdadeira.

Uma condição suficiente para que uma matriz quadrada real de ordem 3 seja diagonalizável é a de que tenha três valores próprios distintos (que é o caso da matriz dada), ainda que alguns possam ser números complexos (o que não é o caso).

III é verdadeira.

Como $\lambda = 0$ é valor póprio de A, tem-se $N_A \neq \{0\}$ e, portanto, $\dim N_A > 0$. Por outro lado, para qualquer matriz são verdadeiras as relações:

$$\dim L_A = \dim C_A, \quad \dim N_A + \dim C_A = \text{ número de colunas de } A.$$

Sendo 3 o número de colunas de A, vem

$$\dim L_A = \dim C_A = 3 - \dim N_A < 3.$$

IV é verdadeira.

Os elementos de N_A, o núcleo de A, são as soluções da equação $Au = 0$. Ora, esta equação diz-nos precisamente que as linhas de A são ortogonais aos elementos do núcleo de A, uma vez que para qualquer $u \in N_A$ e qualquer linha ℓ_j de A se tem $< \ell_j^t, u >= 0$.

Concluímos então que todas as afirmações consideradas são verdadeiras, pelo que a resposta correcta é **D**.

Exercício 169 *[2009/10 - 1° Exame - MEC]*

V1. Seja $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ uma transformação linear cuja representação em relação à base canónica $\mathcal{B}_C = (1, t, t^2)$ de $\mathcal{P}_2$ é a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Qual dos seguintes polinómios é vector próprio (ou função própria) de T?

A) $1 + 4t - t^2$, **B)** $1 + 2t + t^2$, **C)** $1 - 3t + t^2$, **D)** $1 - 2t + t^2$, $(t \in \mathbb{R})$.

....

Resolução:

Um polinómio $p \in \mathcal{P}_2$ é valor próprio (ou função própria) de T se

$$Tp = \lambda p,$$

para algum escalar λ. Sendo $u = (p_1, p_2, p_3)$ o vector das componentes de p na base canónica de $\mathcal{P}_2$ a equação anterior toma a forma (ou seja, é equivalente a)

$$Au = \lambda u,$$

em que se admite que u está representado como vector coluna. Para os quatro polinómios dados temos:

$$p_1(t) = 1 + 4t - t^2 \quad \to \quad u_1 = (1, 4, -2) \quad \to \quad Au_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 13 \end{bmatrix} \neq \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \lambda u_1 \quad \to \quad Tp_1 \neq \lambda p_1,$$

$$p_2(t) = 1 + 2t + t^2 \quad \to \quad u_2 = (1, 2, 1) \quad \to \quad Au_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ 20 \\ 32 \end{bmatrix} \neq \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \lambda u_2 \quad \to \quad Tp_2 \neq \lambda p_2,$$

$$p_1(t) = 1 - 3t + t^2 \quad \to \quad u_3 = (1, -3, 1) \quad \to \quad Au_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ -8 \end{bmatrix} \neq \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \lambda u_3 \quad \to \quad Tp_3 \neq \lambda p_3,$$

$$p_1(t) = 1 - 2t + t^2 \quad \to \quad u_4 = (1, -2, 1) \quad \to \quad Au_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0u_4 \quad \to \quad Tp_4 = 0p_4.$$

para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$. Conclui-se assim que apenas u_4 é vector próprio A (associado ao valor próprio $\lambda = 0$), pelo que apenas p_4 é vector próprio (ou função própria) de T (associado ao valor próprio $\lambda = 0$). Consequentemente, a resposta correcta é **D**.

Exercício 170 *[2009/10 - 1° Exame - MEC]*

V1. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (4x + 2y + z, 3x + 7y + 2z, 2x + 4y + 5z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Sabendo que $\lambda = 3$ é valor próprio de T, qual é o espaço próprio associado a este valor próprio?

A) $L(\{(2, -1, 2)\})$, **B)** $L(\{(0, -1, 2)\})$, **C)** $L(\{(2, -1, 0)\})$, **D)** $L(\{(2, 0, -3)\})$.

....

Resolução:

O espaço próprio pretendido é o gerado pelos vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda = 3$. Determinemos estes.

Sejam A a matriz que representa T em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix},$$

$v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ um vector próprio de T associado ao valor próprio $\lambda = 3$ e u o vector coluna das componentes de v na base canónica de $\mathbb{R}^3$. Então temos as seguintes equivalências:

$$Tv = \lambda v \quad \Leftrightarrow \quad (T - 3I)v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (A - 3I_3)u = 0.$$

O problema consiste pois em determinar as soluções da última equação, o que pode ser conseguido pelo método de eliminação de Gauss. Implementando-o, conclui-se que as soluções v são da forma:

$$v = c(0, -1/2, 1) = c/2(0, -1, 2), \quad c \in \mathbb{R},$$

sendo então o espaço próprio associado ao valor próprio $\lambda = 3$, o gerado pelo vector $(0, 1, -2)$, pelo que a resposta correcta é **B**.

Exercício 171 *[2009/10 - 2º Exame - MEC]*

V1. Sejam

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

e Q_{A_1}, Q_{A_2} as formas quadráticas em $\mathbb{R}^2$que lhes estão associadas, respectivamente.

Qual das seguintes é a afirmação verdadeira?
A) Q_{A_1} e Q_{A_2} são (ambas) definidas positivas,
B) Q_{A_1} e Q_{A_2} são (ambas) indefinidas,
C) Q_{A_1} é definida positiva e Q_{A_2} é definida negativa,
D) Q_{A_1} é definida positiva e Q_{A_2} é indefinida.

....

Resolução:

Tal como em exercícios anterior sobre este tema vamos usar o seguinte procedimento: Como a forma quadrática associada a uma matriz coincide com a forma quadrática associada à parte simétrica dessa matriz, a classificação de uma forma quadrática é feita com base na classificação da parte simétrica da matriz que lhe está associada. Para matrizes simétricas A_s, tem-se:

- A_s é definida positiva (resp. negativa) se e só se os valores próprios de A_s são todos positivos (negativos);

- A_s é semi-definida positiva (resp. negativa) se e só se os valores próprios de A_s são todos não negativos (não positivos);

- A_s é indefinida se e só se A_s tem valores próprios uns positivos e outros negativos.

Com base nestes resultados, começamos por identificar as partes simétricas das matriz dadas, neste caso A_2 é simétrica, e determinamos os seus valores póprios, por via da factorização do correspondente polinómio característico. Temos (X^t representa a transposta de X):

$$(A_1)_s = \frac{1}{2}(A_1 + A_1^t) = A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 5/2 \\ 5/2 & 3 \end{bmatrix}, \quad (A_2)_s = A_2,$$

cujos polinómios carcterísticos são

$$p_{(A_1)_s} = (3 - \lambda)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(3 - \frac{5}{2} - \lambda\right)\left(3 + \frac{5}{2} - \lambda\right) = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\left(\lambda - \frac{11}{2}\right),$$

$$p_{(A_2)_s} = (\lambda - 1)(\lambda + 2) - 4 = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3).$$

Daqui se conclui que:

- Q_{A_1} é definida positiva, pois $(A_1)_s$ tem os valores próprios positivos;
- Q_{A_2} é indefinida, pois $A_2 = (A_2)_s$ tem um valor próprio positivo e outro negativo.

Assim, a resposta correcta é **D**.

Exercício 172 *[2009/10 - 2º Exame - MEC]*

V1. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear, que tem $\{2, 3\}$ como conjunto de valores próprios e cujos espaços próprios associados são, respectivamente,

$$E(2) = L(\{(1, 2)\}), \quad E(3) = L(\{(1, 3)\}).$$

Qual das seguintes é a expressão analítica de T, válida para qualquer par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$?

A) $T(x, y) = (y, -6x + 5y)$, **B)** $T(x, y) = (-x + y, -6x + 5y)$,
C) $T(x, y) = (-6x + 5y, x)$, **D)** $T(x, y) = (2x + y, -3x + 5y)$.

....

Resolução:

Como T é linear, para obter a expressão analítica de T, válida para qualquer par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, é suficiente saber as imagens por T dos vectores coordenados unitários $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$. Efectivamente,

$$T(x, y) = T(xe_1 + ye_2) = xTe_1 + yTe_2.$$

Por outro lado, os vectores $v_1 = (1, 2)$ e $v_2 = (1, 3)$ constituem outra base de $\mathbb{R}^2$, por serem vectores próprios associados ao valores próprios (distintos) 2 e 3 de T, pelo que $Tv_1 = 2v_1$ e $Tv_2 = 3v_2$. Assim, uma vez que conhecemos as imagens por T de v_1 e v_2, basta que consigamos obter a representação de e_1 e e_2 na base (v_1, v_2), o que não oferece dificuldade, pois

$$e_1 = (1, 0) = 3(1, 2) - 2(1, 3) = 3v_1 - 2v_2, \quad e_2 = (0, 1) = (1, 3) - (1, 2) = v_2 - v_1.$$

Consequentemente,

$$Te_1 = T(3v_1 - 2v_2) = 3Tv_1 - 2Tv_2 = 6v_1 - 6v_2 = -6(0, 1) = -6e_2,$$

$$Te_2 = T(v_2 - v_1) = Tv_2 - Tv_1 = 3v_2 - 2v_1 = (1, 5) = e_1 + 5e_2$$

e, portanto,

$$T(x, y) = -6xe_2 + y(e_1 + 5e_2) = ye_1 + (-6x + 5y)e_2 = (y, -6x + 5y).$$

Assim, a resposta correcta é **A**.

Exercício 173 *[2010/11 - 3º Teste - MEEC]*

V1. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$. Sabendo que $\lambda = 7$ é valor próprio de A qual dos seguintes conjuntos contém os outros valores próprios?

A) $\{2, 3\}$, **B)** $\{-1, 4\}$, **C)** $\{0, 1\}$, **D)** $\{-2, 6\}$.

....

Resolução:

Torna-se indispensável conhecer os outros valores próprios de A, além de $\lambda = 7$. Embora a forma da matriz permita determinar outro valor próprio por inspecção, no vamos usar essa via e vamos determinar o polinómio característico de A cujas nraízes são os valores próprios de A:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 3 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix}.$$

Usando a regra de Laplace para calcular este determinante, por expansão segundo a primeira linha, obtém-se sucessivamente

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (2-\lambda)[(3-\lambda)(4-\lambda)-6] - (2(4-\lambda)-6) + 6 - 3(3-\lambda) \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 6 + 5(\lambda - 1) \\ &= -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 15\lambda + 7 \end{aligned}$$

Ora, sabemos que $\lambda = 7$ é valor próprio de A e, consequentemente, 7 é raíz de p. Usando esse facto, podemos factorizar o polinómio característico na forma

$$p(\lambda) = (7-\lambda)(A\lambda^2 + B\lambda + C),$$

em que os coeficientes do factor direito podem ser calculados pela regra de Ruffini ou resolvendo o sistema de equações que resulta dessa igualdade, obtendo-se: $A = 1, B = -2, C = 1$, pelo que

$$p(\lambda) = (7-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = (7-\lambda)(\lambda - 1)^2,$$

o que significa que a matriz A tem apenas um valor próprio distinto de 7 que é $\lambda = 1$.

Dos conjuntos dados apenas o que figura em C contém o valor 1, pelo que a resposta correcta é **C**.

Exercício 174 *[2010/11 - 3º Teste - MEEC]*

V1. Sejam

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}; \quad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Destas apenas uma não é diagonalizável, nem quando considerada como matriz complexa. Qual é?

A) A_1, **B)** A_2, **C)** A_3, **D)** A_4.

. . . .

Resolução:

Podemos imediatamente afirmar que as matrizes A_2 e A_4 são diagonalizáveis, por serem simétricas e toda a matriz simétrica ser diagonalizável. É também fácil conluir que A_1 é diagonalizável, uma vez que tem dois valores próprios distintos e, portanto, existe uma base de $\mathbb{R}^2$ formada por vectores próprios de A_1 (já que a valores próprios distintos estão associados vectores próprios linearmente independentes). Efectivamente, o polinómio característico de A_1 é

$$p_{A_1}(\lambda) = \det(A_1 - \lambda I) = ((1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda+1)(\lambda-4),$$

cujas raízes são -1 e 4.

Por exclusão de partes a única matriz não diagonalizável é A_3. Para verificar que assim é basta notar que A_3 tem apenas um valor próprio $\lambda = 2$ e que a dimensão do espaço próprio correspondente é igual a 1, sendo aquele gerado pelo vector $(1, 0, 0)$, como facilmente se conclui da resolução da equação $(A_3 - 2I)u = 0$.

Assim, a resposta correcta é **C**.

Exercício 175 *[2010/11 - Exame - MEEC]*

V1. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que $T(1,0) = (5,1)$. Admita ainda que $(1,1)$ é um vector próprio de T associado ao valor próprio $\lambda = 1$. Nestas condições calcule $T(0,1)$.
A resposta correcta é:

A) $T(0,1) = (-5,0)$; **B)** $T(0,1) = (-4,0)$; **C)** $T(0,1) = (-3,0)$; **D)** $T(0,1) = (-2,0)$.

....

Resolução:

Sabendo que $(1,1)$ é um vector próprio de T associado ao valor próprio $\lambda = 1$, tem-se $T(1,1) = (1,1)$. Por outro lado, $T(1,0) = (5,1)$. Então, como

$$(0,1) = (1,1) - (1,0)$$

e T é linear, vem

$$T(0,1) = T(1,1) - T(1,0) = (1,1) - (5,1) = (-4,0),$$

pelo que a resposta correcta é **B**.

Exercício 176 *[2010/11 - Exame - MEEC]*

V1. Nas condições do problema anterior, qual dos seguintes conjuntos contém todos os valores próprios de T?

A) $\{-5,1,2\}$; **B)** $\{-4,1,3\}$; **C)** $\{-3,1,4\}$; **D)** $\{-2,1,5\}$.

....

Resolução:

Os valores próprios de T coincidem com os valores próprios da matriz A que representa T em relação à base canónica de $\mathbb{R}^2$, que é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

uma vez que, como vimos anteriormente, $T(1,0) = (5,1)$ e $T(0,1) = (-4,0)$. Factorizando o polinómio característico de A, obtêm-se os valores próprios (um dos quais já conhecemos, $\lambda = 1$):

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -4 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(5-\lambda) + 4 = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 4),$$

pelo que o outro valor próprio de A (ou de T) é $\lambda = 4$. Assim, dos conjuntos dados apenas um contém os valores 1 e 4, pelo que a resposta correcta é **C**.

Soluções

Exercício	V1	V2	V3	V4
1	A	B	D	A
2	C	A	A	D
3	A	D	A	C
4	A	C	A	B
5	C	C	C	A
6	A	A	D	D
7	C	B	A	B
8	A	D	B	A
9	B	C	B	C
10	D	A	C	B
11	A	D	D	C
12	B	C	B	C
13	D	C	B	A
14	C	B	C	B
15	C	A	B	D
16	B	D	D	B
17	C	B	B	A
18	A	D	C	D
19	D	D	B	A
20	C	A	C	A
21	A	B	B	C
22	B	C	A	B
23	D	C	B	D
24	D	A	D	A
25	A	D	A	C
26	B	C	D	C
27	C	D	D	A
28	C	B	C	B
29	D	A	B	C
30	B	D	A	A
31	D	C	B	D
32	B	B	B	C
33	B	D	D	A
34	A	C	D	B
35	B	D	B	C
36	B	C	B	C
37	B	A	C	C
38	C	D	A	B
39	B	C	B	C
40	A	D	A	D
41	B	C	A	D
42	A	C	B	B
43	C	D	C	D
44	C	B	A	C
45	B	D	C	B
46	A	C	B	D
47	C	B	D	C
48	D	A	C	B
49	C	C	D	C
50	D	B	A	C

Exercício	V1	V2	V3	V4
51	A	A	B	D
52	A	D	C	A
53	D	C	D	D
54	C	A	D	D
55	B	C	D	D
56	B	C	D	B
57	D	C	B	B
58	B	B	A	D
59	D	A	D	D
60	C	B	C	B
61	B	B	A	A
62	C	A	D	B
63	A	C	B	D
64	C	B	A	D
65	D	C	A	B
66	C	B	C	D
67	D	A	D	A
68	A	D	C	C
69	D	A	A	C
70	C	D	B	D
71	B	C	A	B
72	B	C	B	C
73	C	D	A	B
74	B	B	A	A
75	C	A	C	B
76	C	D	C	C
77	B	B	D	C
78	C	D	C	D
79	D	A	A	A
80	A	B	A	D
81	C	D	A	B
82	D	C	D	C
83	A	A	C	D
84	C	B	D	B
85	A	B	D	C
86	C	B	B	C
87	D	D	C	B
88	D	D	D	A
89	A	B	A	A
90	D	C	C	C
91	D	D	C	C
92	B	C	D	D
93	B	C	C	D
94	C	B	B	C
95	A	B	C	B
96	B	A	B	C
97	B	C	C	B
98	D	B	C	A
99	B	C	A	A
100	D	B	C	C

Soluções

Exercício	V1	V2	V3	V4
101	B	A	D	A
102	B	D	B	C
103	C	C	D	D
104	B	A	D	D
105	A	A	A	A
106	D	B	C	C
107	C	B	A	D
108	C	C	A	B
109	D	B	C	D
110	A	C	C	B
111	C	C	D	D
112	B	B	B	A
113	B	D	B	D
114	D	A	C	B
115	C	A	B	D
116	C	C	A	A
117	B	C	D	A
118	A	D	A	D
119	C	A	D	B
120	D	D	D	A
121	C	B	C	B
122	B	C	A	D
123	C	D	D	B
124	D	D	A	B
125	B	C	B	D
126	C	B	D	B
127	A	A	D	D
128	B	C	B	C
129	A	D	D	A
130	B	D	A	C
131	B	D	C	A
132	B	A	D	C
133	A	B	D	A
134	C	C	A	D
135	B	A	A	D
136	B	C	A	D
137	C	B	D	A
138	B	C	C	C
139	B	D	C	A
140	D	A	A	D
141	A	C	D	B
142	D	B	C	D
143	B	C	A	D
144	C	B	B	C
145	C	A	C	A
146	A	C	A	B
147	D	B	C	A
148	C	D	B	A
149	C	B	D	A
150	B	A	C	D

Exercício	V1	V2	V3	V4
151	A	B	C	D
152	B	C	A	B
153	C	A	D	B
154	D	D	B	C
155	D	D	C	D
156	D	D	C	D
157	D	C	C	D
158	C	B	B	C
159	B	D	B	B
160	A	D	B	C
161	D	B	D	B
162	C	A	C	B
163	C	A	B	A
164	D	B	B	D
165	D	D	B	A
166	B	A	C	D
167	C	B	C	B
168	D	A	C	A
169	D	B	D	A
170	B	A	A	B
171	D	D	D	D
172	A	A	C	B
173	C	A	B	D
174	C	D	C	D
175	B	D	C	A
176	C	A	B	D
177				
178				
179				
180				
181				
182				
183				
184				
185				
186				
187				
188				
189				
190				
191				
192				
193				
194				
195				
196				
197				
198				
199				
200				

Respostas

Exercício	V1	V2	V3	V4
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				
21				
22				
23				
24				
25				
26				
27				
28				
29				
30				
31				
32				
33				
34				
35				
36				
37				
38				
39				
40				
41				
42				
43				
44				
45				
46				
47				
48				
49				
50				

Exercício	V1	V2	V3	V4
51				
52				
53				
54				
55				
56				
57				
58				
59				
60				
61				
62				
63				
64				
65				
66				
67				
68				
69				
70				
71				
72				
73				
74				
75				
76				
77				
78				
79				
80				
81				
82				
83				
84				
85				
86				
87				
88				
89				
90				
91				
92				
93				
94				
95				
96				
97				
98				
99				
100				

Respostas

Exercício	V1	V2	V3	V4
101				
102				
103				
104				
105				
106				
107				
108				
109				
110				
111				
112				
113				
114				
115				
116				
117				
118				
119				
120				
121				
122				
123				
124				
125				
126				
127				
128				
129				
130				
131				
132				
133				
134				
135				
136				
137				
138				
139				
140				
141				
142				
143				
144				
145				
146				
147				
148				
149				
150				

Exercício	V1	V2	V3	V4
151				
152				
153				
154				
155				
156				
157				
158				
159				
160				
161				
162				
163				
164				
165				
166				
167				
168				
169				
170				
171				
172				
173				
174				
175				
176				
177				
178				
179				
180				
181				
182				
183				
184				
185				
186				
187				
188				
189				
190				
191				
192				
193				
194				
195				
196				
197				
198				
199				
200				