Álgebra Linear

Exercícios de escolha múltipla

(cerca de metade com resolução)

Setembro 2012

[Exercícios baseados em provas de avaliação a cursos leccionados por Amarino Lebre.]

Sistemas de Equações Lineares, Matrizes e Determinantes

Exercício 1 *[2000/1 - 1° Teste - LEC]*

V1. Considere o sistema de equações lineares nas variáveis u , v e w representado pela matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & \lambda & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & \mu \end{array}\right].$$

Faça a discussão do sistema em função dos parâmetros λ e μ . A resposta correcta é:

A) O sistema é determinado sse $\lambda \neq 3$; é impossível sse $\lambda = 3$ e $\mu \neq -\frac{5}{3}$; e é indeterminado sse $\lambda = 3$ e $\mu = -\frac{5}{3}$.

B) O sistema é determinado sse $\lambda \neq 3$; e é indeterminado sse $\lambda = 3$.

C) O sistema é possível sse $\lambda \neq 3$; e é impossível sse $\lambda = 3$.

D) O sistema é determinado sse $\lambda \neq 3$; é impossível sse $\lambda = 3$ e $\mu = -\frac{5}{3}$; e é indeterminado sse $\lambda = 3$ e $\mu \neq -\frac{5}{3}$.

....

Resolução:

O método de eliminação de Gauss permite responder à questão colocada. Usando a habitual convenção de notação: $X \xrightarrow{E} Y$ significa que $Y = EX$, tem-se:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & \lambda & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & \mu \end{array}\right] \xrightarrow{E_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & \lambda & 0 \\ 0 & 6/5 & -2\lambda/5 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & \mu \end{array}\right] \xrightarrow{E_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & \lambda & 0 \\ 0 & 6/5 & -2\lambda/5 & -2 \\ 0 & 0 & -1+\lambda/3 & \mu+5/3 \end{array}\right],$$

em que

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5/6 & 1 \end{bmatrix} \quad .$$

Uma vez que o método de eliminação de Gauss não altera o conjunto das soluções de um sistema de equações lineares, daqui se conclui que:

– O sistema é impossível sse $\lambda = 3$ ($\Leftrightarrow -1 + \lambda/3 = 0$) e $\mu \neq -5/3$ ($\Leftrightarrow \mu + 5/3 \neq 0$);

– O sistema é possível e indeterminado sse $\lambda = 3$ ($\Leftrightarrow -1 + \lambda/3 = 0$) e $\mu = -5/3$ ($\Leftrightarrow \mu + 5/3 = 0$);

– O sistema é possível e determinado sse $\lambda \neq 3$ ($\Leftrightarrow -1 + \lambda/3 \neq 0$), independentemente do valor de μ.

Assim, a resposta correcta é **A**.

Exercício 2 *[2000/1 - 1°Exame - LEC]*

V1. Considere o sistema de equações lineares nas variáveis x , y e z representado pela matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & -1 & \mu \\ 2 & -5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \end{array}\right].$$

Faça a discussão do sistema em função dos parâmetros λ e μ . A resposta correcta é:

A) O sistema é determinado sse $\lambda \neq 0$; e é indeterminado sse $\mu = \frac{5}{2}$.

B) O sistema é determinado sse $\lambda \neq 0$; e é impossível sse $\lambda = 0$.

C) O sistema é determinado sse $\lambda \neq 0$; e é indeterminado sse $\lambda = 0$.

D) O sistema é possível sse $\lambda \neq 0$; e é impossível sse $\lambda = 0$.

. . . .

Resolução:

O método de eliminação de Gauss permite responder à questão colocada. Usando a habitual convenção de notação: $X \xrightarrow{E} Y$ significa que $Y = EX$, tem-se:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & -1 & \mu \\ 2 & -5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & -1 & \mu \\ 0 & -5 & -13/5 & 1-2\mu/5 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \end{array}\right],$$

em que

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad .$$

Uma vez que o método de eliminação de Gauss não altera o conjunto das soluções de um sistema de equações lineares, daqui se conclui que:

– O sistema é sempre possível;
– O sistema é (possível e) indeterminado sse $\lambda = 0$;
– O sistema é (possível e) determinado sse $\lambda \neq 0$, independentemente do valor de μ.

Assim, a resposta correcta é **C**.

Exercício 3 *[2000/1 - 1°Exame - LEC]*

V1. Qual o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -5 & \beta \end{bmatrix}$?

A) $12\,\beta + 5\,\alpha\,\beta$ **B)** $60 + 20\,\alpha\,\beta$ **C)** $20\,\alpha + 15\,\beta$ **D)** $60\,\alpha - 3\,\alpha\,\beta$

. . . .

Resolução:

Podemos facilmente calcular o determinante usando repetidamente a regra de Laplace, uma vez que a matriz tem muitos elementos nulos. Escolhendo inicialmente a coluna 4 (a que tem mais elementos nulos) e posteriormente a coluna 2 (a que tem mais elementos nulos na matriz de ordem 3), vem

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -5 & \beta \end{vmatrix} = \beta \begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & \alpha \end{vmatrix} = \beta \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -3 & \alpha \end{vmatrix} = \beta(5\alpha + 12) = 5\alpha\beta + 12\beta.$$

Considera-se aqui, e em tudo o que se segue, que é bem conhecido de todos o determinante de uma matriz de ordem 2:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

sem ser necessário invocar nenhum resultado para o justificar.

Assim, a resposta correcta é **A**.

Exercício 4 *[2000/1 - 2º Exame - LEC]*

V1. Considere o seguinte sistema de equações lineares em variáveis complexas

$$\begin{cases} 2\,\mathbf{i}\,z_1 + a\,z_2 & = & b \\ -\mathbf{i}\,z_1 + z_2 & = & 2\,\mathbf{i} \end{cases} .$$

Faça a sua discussão em função dos parâmetros a e b em $\mathbb{C}$. A resposta correcta é:

A) O sistema é determinado sse $a \neq -2$; é impossível sse $a = -2$ e $b \neq -4\,\mathbf{i}$; e é indeterminado sse $a = -2$ e $b = -4\,\mathbf{i}$

B) O sistema é determinado sse $a \neq -2 + \mathbf{i}$; e é indeterminado sse $a = -2 + \mathbf{i}$

C) O sistema é determinado sse $a \neq -2$; e é indeterminado sse $a = -2$

D) O sistema é determinado sse $a \neq -2 + \mathbf{i}$; é impossível sse $a = -2 + \mathbf{i}$ e $b \neq -2 - 4\,\mathbf{i}$; e é indeterminado sse $a = -2 + \mathbf{i}$ e $b = -2 - 4\,\mathbf{i}$

....

Resolução:

O facto de se tratar de um sistema de equações com coeficientes complexos, sendo naturalmente também as soluções vectores de componentes complexas, não coloca nenhum problema especial em relação ao caso real, uma vez que podemos usar na mesma o método de eliminação de Gauss. Implementando-o em relação à matriz aumentada do sistema e usando a habitual convenção de notação: $X \xrightarrow{E} Y$ significa que $Y = EX$, obtém-se:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2\,\mathbf{i} & a & b \\ -\,\mathbf{i} & 1 & 2\,\mathbf{i} \end{array}\right] \xrightarrow{E} \left[\begin{array}{cc|c} 2\,\mathbf{i} & a & b \\ 0 & 1 + a/2 & 2\,\mathbf{i} + b/2 \end{array}\right],$$

em que

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Daqui se conclui que:

– O sistema é impossível sse $a = -2$ ($\Leftrightarrow 1 + a/2 = 0$) e $b \neq -4\,\mathbf{i}$ ($\Leftrightarrow 2\,\mathbf{i} + b/2 \neq 0$);

– O sistema é possível e indeterminado sse $a = -2$ ($\Leftrightarrow 1 + a/2 = 0$) e $b = -4$ ($\Leftrightarrow 2\,\mathbf{i} + b/2 = 0$);

– O sistema é possível e determinado sse $a \neq -2$ ($\Leftrightarrow 1 + a/2 \neq 0$), independentemente do valor de b.

Assim, a resposta correcta é **A**.

Exercício 5

V1. Sejam A uma matriz 3×4, B uma matriz invertível 4×4 e C uma matriz 4×3. Considere ainda uma matriz múltipla da matriz identidade I, $E_\lambda = \lambda I$ com $\lambda \neq 0$, e uma matriz elementar de permutação, P, ambas com dimensão 4×4. Considere a lista de afirmações:

I. $(E_\lambda + B)^2 = (E_\lambda)^2 + 2E_\lambda B + B^2$

II. $(AP + AB)^T = PA^T + B^T A^T$, onde X^T representa a transposta da matriz X

III. $(PE_\lambda B)^{-1} = E_\lambda^{-1} B^{-1} P$

IV. $(PCA)^2 = P^2 (CA)^2$

A lista completa de afirmações correctas é:

A) Todas **B)** II e IV **C)** I, II e III **D)** III

....

Resolução:

Usaremos os seguintes resultados, válidos para quaisquer matrizes desde que façam sentido as operações indicadas:

P0. A matriz identidade I (de uma dada ordem) é o elemento neutro da multiplicação de matrizes (dessa ordem):
$$XI = IX = X.$$
Daqui resulta que, para qualquer escalar α, se tem: $X\alpha I = \alpha X = (\alpha I)X$.

P1. Distributividade do produto em relação à adição:
$$X(Y+Z) = XY + XZ; \quad (Y+Z)X = YX + ZX.$$

P2. A transposta da soma é a soma das transpostas:
$$(X+Y)^T = X^T + Y^T.$$

P3. A transposta do produto de duas matrizes é o produto das transpostas pela ordem inversa (em relação à qual elas figuram no produto inicial):
$$(XY)^T = Y^T X^T.$$
Efectivamente, se $X = [x_{ik}]$ e $Y = [y_k]$ então $XY = [z_{ij}]$ com $z_{ij} = \sum_{k=1}^{N} x_{ik}y_{kj}$, em que N é o número de colunas de X (= número de linhas de Y). Então $(XY)^T = [z_{ji}]$. Por outro lado, sendo $W = Y^T X^T = [w_{ij}]$, tem-se $w_{ij} = \sum_{k=1}^{N} y_{ki}x_{jk} = \sum_{k=1}^{N} x_{jk}y_{ki} = z_{ji}$. Consequentemente, $(XY)^T = Y^T X^T$.

P4. Sendo X e Y matrizes invertíveis (da mesma ordem), o produto XY é invertível e a sua inversa é o produto da inversa de Y pela inversa de X:
$$(XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1}.$$
Esta relação é uma consequência directa da associatividade do produto de matrizes, uma vez que, nas condições indicadas, se tem
$$(XY)(Y^{-1}X^{-1}) = X(YY^{-1})X^{-1} = XIX^{-1} = XX^{-1} = I$$
e
$$(Y^{-1}X^{-1})(XY) = Y^{-1}(X^{-1}X)Y = Y^{-1}IY = Y^{-1}Y = I.$$
Consequentemente, XY é invertível, sendo $Y^{-1}X^{-1}$ a sua inversa.

P5. Sendo P uma matriz elementar de permutação, i.e. difere da identidade em duas das suas linhas ou colunas (tem como efeito quando multiplicada à esquerda por uma matriz trocar duas das linhas dessa matriz), então P é simétrica, ou seja, $P^T = P$, uma vez que se $P = [p_{ij}]$ difere da identidade na linhas k e ℓ, então os únicos elementos iguais a 1 não pertencentes à diagonal principal são $p_{k\ell}$ e $p_{\ell,k}$, sendo os restantes nulos, pelo que
$$P^T = P \text{ e } P^{-1} = P,$$
sendo a última igualdade consequência directa de $P^2 = I$.

Note-se que estes resultados não são verdadeiros para uma matriz de permutação qualquer. Por exemplo,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P^T$$

Consideremos separadamente cada uma das afirmações no enunciado:

I. É verdadeira.

Tem-se $(E_\lambda + B)^2 = (E_\lambda + B)(E_\lambda + B) = (E_\lambda)^2 + E_\lambda B + BE_\lambda + B^2 = (E_\lambda)^2 + 2E_\lambda B + B^2$, onde se usaram P1 e P2 (E_λ comuta com qualquer matriz, por ser um múltiplo da matriz identidade);

II. É verdadeira.

Tem-se $(AP + AB)^T = (AP)^T + (AB)^T = P^T A^T + B^T A^T = PA^T + B^T A^T$, onde se usaram P2, P3 e P5;

III. É verdadeira.

Tem-se $(PE_\lambda B)^{-1} = B^{-1}(PE_\lambda)^{-1} = B^{-1}E_\lambda^{-1}P^{-1} = E_\lambda^{-1}B^{-1}P$, uma vez que $P^{-1} = P$ e que, para $\lambda \neq 0$, $E_\lambda^{-1} = E_{\lambda^{-1}}$ comuta com qualquer matriz;

IV. Não é verdadeira com generalidade.

Tem-se $(PCA)^2 = PCAPCA \neq P^2(CA)^2$, uma vez que o produto de matrizes não é comutativo, em geral.

Assim, as afirmações verdadeiras são I, II e III, e a resposta correcta é **C**.

Exercício 6 *[2000/1 - 2º Exame - LEC]*

V1. Considere a seguinte lista de igualdades entre determinantes.

I. $$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ d & 0 & c \\ 2 & 2 & -5 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 0 & c \\ 2 & -5 \end{vmatrix} + d\begin{vmatrix} b & 0 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix}$$

II. $$\begin{vmatrix} 0 & 0 & b \\ d & -3 & c \\ 2 & a & -3 \end{vmatrix} = d\begin{vmatrix} 0 & b \\ a & -3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & b \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$$

III. $$\begin{vmatrix} 0 & a & -5 \\ b & c & d \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix} b & c \\ -4 & 0 \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} 0 & a \\ -4 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a \\ b & c \end{vmatrix}$$

Diga quais as que são verdadeiras para quaisquer valores dos escalares a, b, c, d:

A) III **B)** II **C)** I **D)** I e II

. . . .

Resolução:

Analisemos cada uma das afirmações separadamente:

I. Não é verdadeira com generalidade, uma vez que a aplicação da regra de Laplace, por expansão segundo a coluna 1, conduz a

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ d & 0 & c \\ 2 & 2 & -5 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 0 & c \\ 2 & -5 \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} b & 0 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix}$$

e, portanto, para que a igualdade indicada fosse verdadeira teria de ser:

$$\pm d \begin{vmatrix} b & 0 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 0,$$

o que é falso se $db \neq 0$.

II. Não é verdadeira com generalidade, uma vez que a aplicação da regra de Laplace, por expansão segundo a linha 2, conduz a

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & b \\ d & -3 & c \\ 2 & a & -3 \end{vmatrix} = -d \begin{vmatrix} 0 & b \\ a & -3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & b \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & a \end{vmatrix} = -d \begin{vmatrix} 0 & b \\ a & -3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & b \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$$

e, portanto, para que a igualdade indicada fosse verdadeira teria de ser:

$$\pm d \begin{vmatrix} 0 & b \\ a & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

o que é falso se $abd \neq 0$.

III. É verdadeira, por ser o resultado da aplicação da regra de Laplace, por expansão segundo a coluna 3.

Assim, a resposta correcta é **A**.

Exercício 7 *[2005/6 - 1° Teste - LEEC]*

V1. Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -4 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ -12 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sendo (x, y, z) solução do sistema, qual o valor da soma $x + y + z$?

A) 7 **B)** 6 **C)** 5 **D)** 4

....

Resolução:

É claro que podemos resolver o sistemas de equações dado e no final somar os valores das incógnitas. Em alternativa, podemos considerar o sistema com mais uma equação que o original: $x + y + z = w$ e ver qual a condição sobre w para que o novo sistema de equações (4 equações e 3 incógnitas, x, y, z) seja possível. Este processo, embora tenha mais um passo da eliminação de Gauss dispensa a determinação recursiva das incógnitas. Implementemos então o método de eliminação de Gauss para a matriz aumentada do novo sistema de equações:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 8 \\ -4 & -1 & -3 & -12 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & w \end{array}\right] \xrightarrow{E_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & w-4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & w \end{array}\right] \xrightarrow{E_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & w-5 \end{array}\right]$$

em que

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Conclui-se então que $w = 5$ é a condição para que o novo sistema de equações seja possível, sendo pois $w = 5$ o valor de $x + y + z$.

Assim, a resposta correcta é **C**.

Exercício 8 *[2005/6 - 1° Teste - LEEC]*

V2. Considere o sistema de equações lineares nas variáveis x_1 , x_2 e x_3 representado pela matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 & | & 5 \\ 3 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & c & | & d \end{bmatrix}.$$

Faça a discussão do sistema em função dos parâmetros c e d . A resposta correcta é:

A) O sistema é possível sse $c \neq -\frac{5}{12}$; e é impossível sse $c = -\frac{5}{12}$.

B) O sistema é determinado sse $c \neq -\frac{5}{12}$; e é indeterminado sse $c = -\frac{5}{12}$.

C) O sistema é determinado sse $c \neq -\frac{5}{12}$; é impossível sse $c = -\frac{5}{12}$ e $d = \frac{5}{4}$; e é indeterminado sse $c = -\frac{5}{12}$ e $d \neq \frac{5}{4}$.

D) O sistema é possível sse $c \neq -\frac{5}{12}$ ou $c = -\frac{5}{12}$ e $d = \frac{5}{4}$; e é impossível sse $c = -\frac{5}{12}$ e $d \neq \frac{5}{4}$.

....

Resolução:

O método de eliminação de Gauss permite responder à questão colocada. Usando a habitual convenção de notação, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 & | & 5 \\ 3 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & c & | & d \end{bmatrix} \xrightarrow{E_1} \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 & | & 5 \\ 0 & -12/5 & 1 & | & -3 \\ 0 & 1 & c & | & d \end{bmatrix} \xrightarrow{E_2} \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 & | & 5 \\ 0 & -12/5 & 1 & | & -3 \\ 0 & 0 & c + 5/12 & | & d - 5/4 \end{bmatrix},$$

em que

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5/12 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uma vez que o método de eliminação de Gauss não altera o conjunto das soluções de um sistema de equações lineares, daqui se conclui que:

– O sistema é impossível sse $c = -5/12$ ($\Leftrightarrow c + 5/12 = 0$) e $d \neq 5/4$ ($\Leftrightarrow d - 5/4 \neq 0$);

– O sistema é possível e indeterminado sse $c = -5/12$ ($\Leftrightarrow c + 5/12 = 0$) e $d = 5/4$ ($\Leftrightarrow d - 5/4 = 0$);

– O sistema é possível e determinado sse $c \neq -5/12$ ($\Leftrightarrow c + 5/12 \neq 0$, independentemente do valor de d.

Assim, a resposta correcta é **D**.

Exercício 9 *[2005/6 - 1° Teste - LEEC]*

V1. Sejam λ um número real e $\Lambda = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda+1 & \lambda+2 & \lambda+3 \\ 2\lambda+1 & 2\lambda+2 & 2\lambda \end{vmatrix}$.

Qual o valor de Λ?

A) $-\lambda(10\lambda+9)$ **B)** -3λ **C)** $-\lambda(\lambda+2)$ **D)** $-\lambda^3$

....

Resolução:

É claro que podemos calcular o determinante por vários métodos. Neste caso sugiro o seguinte: Observando que o vector na linha 2 é o resultado de somar ao vector na linha 1 o vector (1,2,3) e que a linha 3 é o resultado de multiplicar por 2 o vector na linha 1 e somar o vector (1,2,0), usando as propriedades da função determinante, em particular que esta é uma função linear de cada uma das suas linhas e que se duas linhas figuram repetidas numa matriz o seu determinante é nulo, obtém-se:

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda \\ 2\lambda & 2\lambda & 2\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Usando agora a regra de Laplace, por expansão segundo a linha 3, vem

$$\Lambda = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & \lambda \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} \lambda & \lambda \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\lambda - 2\lambda - 2(3\lambda - \lambda) = -3\lambda.$$

Assim, a resposta correcta é **B**.

Exercício 10 *[2005/6 - 1° Exame - LEEC]*

V1. Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & -4 & -6 \\ 3 & 8 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Sabendo que (x, y, z) com $x = 2$ é solução do sistema anterior, qual o valor do par (y, z) ?

A) (-3,2) **B)** (3,-1) **C)** (2,-1/2) **D)** (-1,1)

....

Resolução:

Podemos evidentemente resolver o sistema de equações dado e posteriormente ver qual das suas soluções é tal que $x = 2$. Em alternativa, podemos resolver o sistema resultante da substituição de x por 2, i.e.

$$\begin{cases} 3y + 5z &= 2 \quad (= 4 - x) \\ -4y - 6z &= -2 \quad (= -6 + 2x) \\ 8y + 13z &= 5 \quad (= 11 - 3x) \end{cases}.$$

Usando o método de eliminação de Gauss para o resolver:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 2 \\ -4 & -6 & -2 \\ 8 & 13 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{E_1} \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & -1/3 & -1/3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_2} \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

com

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4/3 & 1 & 0 \\ -8/3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Da segunda equação do sistema simplificado, obtém-se $2/3z = 2/3$, pelo que $z = 1$. Substituindo este resulta na primeira equação, vem $3y = 2 - 5z = -3$, donde se obtém $y = -1$.

Assim, a resposta correcta é **D**.

Exercício 11 *[2005/6 - 1° Exame - LEEC]*

V2. Considere a seguinte lista de igualdades entre determinantes.

I. $\begin{vmatrix} b & a & 0 \\ -5 & c & 2 \\ d & 4 & 0 \end{vmatrix} = -b \begin{vmatrix} c & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 2 \end{vmatrix}$

II. $\begin{vmatrix} -5 & -2 & 0 \\ b & -3 & a \\ d & c & 0 \end{vmatrix} = d \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -3 & a \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ b & a \end{vmatrix}$

III. $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 3 & d & b \\ 3 & c & -4 \end{vmatrix} = d \begin{vmatrix} a & 0 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a & 0 \\ 3 & b \end{vmatrix}$

Diga quais as que são verdadeiras para quaisquer valores dos escalares a, b, c, d:

A) I , II e III **B)** II **C)** I e III **D)** Nenhuma

Resolução:

Analisemos cada uma das afirmações separadamente:

I. Não é verdadeira com generalidade, uma vez que a aplicação da regra de Laplace, por expansão segundo a coluna 1, conduz a

$$\begin{vmatrix} b & a & 0 \\ -5 & c & 2 \\ d & 4 & 0 \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} c & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} a & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + d \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 2 \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} c & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + d \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 2 \end{vmatrix} = -8b + 2ad$$

e, portanto, para que a igualdade indicada fosse verdadeira teria de ser:

$$-8b + 2ad = 0,$$

o que, em geral, é falso.

II. Não é verdadeira com generalidade, uma vez que a aplicação da regra de Laplace, por expansão segundo a linha 3, conduz a

$$\begin{vmatrix} -5 & -2 & 0 \\ b & -3 & a \\ d & c & 0 \end{vmatrix} = d \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -3 & a \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ b & a \end{vmatrix}$$

e, portanto, para que a igualdade indicada fosse verdadeira teria de ser:

$$\pm c \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ b & a \end{vmatrix} = 0,$$

o que é falso se $ac \neq 0$.

III. Não é verdadeira com generalidade, uma vez que a aplicação da regra de Laplace, por expansão segundo a coluna 2, conduz a

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 3 & d & b \\ 3 & c & -4 \end{vmatrix} = d \begin{vmatrix} a & 0 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} a & 0 \\ 3 & b \end{vmatrix}$$

e, portanto, para que a igualdade indicada fosse verdadeira teria de ser:

$$\pm c \begin{vmatrix} a & 0 \\ 3 & b \end{vmatrix} = 0,$$

o que é falso se $abc \neq 0$.

Assim, a resposta correcta é **D**.

Exercício 12 *[2005/6 - 2º Exame - LEEC]*

V1. Considere em $\mathbb{R}^3$ um sistema de equações lineares $Au = b$ em que $b \in \mathbb{R}^3$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix},$$

e as seguintes afirmações:

I. Existe pelo menos um vector b para o qual o sistema $Au = b$ não tem soluções;

II. A equação $Au = 0$ tem como única solução $u = 0$;

III. Existindo soluções de $Au = b$, o conjunto das soluções é uma recta em $\mathbb{R}^3$;

IV. Existindo soluções de $Au = b$, o conjunto das soluções é um plano em $\mathbb{R}^3$.

Qual é a afirmação verdadeira?

A) I **B)** II **C)** III **D)** IV

....

Resolução:

Vejamos em primeiro lugar como podem ser formuladas de forma equivalente as afirmação dadas como alternativas. Consideremos a matriz aumentada do sistema de equações, $[A \mid b]$, e seja $[U \mid c]$ o resultado da eliminação de Gauss aplicado àquela matriz. Então:

I. Existe pelo menos um vector b para o qual o sistema $Au = b$ não tem soluções
$\Leftrightarrow$ Existe pelo menos um vector c para o qual o sistema $Uu = c$ não tem soluções
$\Leftrightarrow$ U tem uma linha nula e a componente da mesma ordem do vector c é diferente de zero;

II. A equação $Au = 0$ tem como única solução $u = 0$
$\Leftrightarrow$ A equação $Uu = 0$ tem como única solução $u = 0$
$\Leftrightarrow$ A matriz U tem tantos pivôs quantas as suas colunas
$\Leftrightarrow$ A matriz U não tem colunas sem pivô;

III. Existindo soluções de $Au = b$, o conjunto das soluções é uma recta em $\mathbb{R}^3$
$\Leftrightarrow$ Existindo soluções de $Uu = c$, o conjunto das soluções é uma recta em $\mathbb{R}^3$

$\Leftrightarrow U$ tem uma e uma só linha nula e a componente do vector c da mesma ordem da linha nula é igual a zero;

IV. Existindo soluções de $Au = b$, o conjunto das soluções é um plano em $\mathbb{R}^3$
$\Leftrightarrow$ Existindo soluções de $Uu = c$, o conjunto das soluções é um plano em $\mathbb{R}^3$
$\Leftrightarrow U$ tem duas linhas nulas e as componentes do vector c das mesmas ordems das linhas nulas são iguais a zero.

Agora resta apenas proceder à eliminação de Gauss e extrair a conclusão. Pondo $b = (b_1, b_2, b_3)$ com a convenção habitual de escrita, temos:

$$[A \mid b] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & b_1 \\ 1 & -1 & 2 & | & b_2 \\ 0 & 6 & 3 & | & b_3 \end{bmatrix} \overset{E_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & b_1 \\ 0 & -3 & -1 & | & b_2 - b_1 \\ 0 & 6 & 3 & | & b_3 \end{bmatrix} \overset{E_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & b_1 \\ 0 & -3 & -1 & | & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 1 & | & b_3 + 2b_2 - 2b_1 \end{bmatrix}$$

Uma vez que a matriz U não tem linhas nulas e tem tantos pivôs quantas as colunas, de acordo com as equivalências anteriores, a afirmação verdadeira é II.
Assim, a resposta correcta é **B**.

Exercício 13 *[2005/6 - 2º Exame - LEEC]*

V1. Qual é o valor do determinante da matriz $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$?

A) 78 **B)** -78 **C)** 102 **D)** -102

....

Resolução:

Uma vez que a matriz dada tem muitos elementos nulos e, em particular, a coluna 1 só tem um elemento não nulo, estamos numa situação muito favorável para aplicar a regra de Laplace, por expansão segundo a coluna 1, obtendo-se

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

Podemos continuar a aplicar a regra de Laplace, agora por expansão segundo a coluna 3 (por ser a que tem mais zeros, sendo a mais favorável do ponto de vista dos cálculos), vindo:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3(-2) \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -6(15+2) = -102.$$

Assim, a resposta correcta é **D**.

Exercício 14 *[2005/6 - 2º Exame - LEEC]*

V1. Seja α um escalar e

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 3 & 0 & \alpha \\ 0 & 2 & 0 \\ \alpha & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix}.$$

Considere a relação

$$\det(A_\alpha + B_\alpha) = \det A_\alpha + \det B_\alpha \tag{1}$$

e as seguintes afirmações:

I. Não existem valores de $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tais que (**??**) é satisfeita;

II. Existem valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que (**??**) é satisfeita;

III. Existem valores de $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tais que (**??**) é satisfeita

IV. (**??**) é satisfeita para qualquer $\alpha \in \mathbb{C}$.

Então a afirmação verdadeira é:

A) I **B)** II **C)** III **D)** IV

....

Resolução:

Convém começar por salientar que, embora o determinante seja uma função linear de cada um dos seus argumentos (as linhas de uma matriz), não é uma função linear das matrizes a que se aplica. Em particular, o determinante da soma de duas matrizes não é, em geral, a soma dos determinantes dessas matrizes. No entanto, em casos particulares, tal pode ocorrer. É de um desses casos que se trata neste exercício.

Dada a dependência das matrizes A_α e B_α do parâmetro α, qualquer dos membros da igualdade

$$\det(A_\alpha + B_\alpha) = \det A_\alpha + \det B_\alpha$$

é um polinómio na variável α. Sendo assim, do que se trata é de saber quais são as raízes de um polinómio. De facto, facilmente se obtém

$$\det A_\alpha = 2(9 - \alpha^2), \quad \det B_\alpha = 0,$$

por exemplo, se recordarmos que contribuem para o determinante de ordem 3 todos os possíveis produtos de 3 elementos da matriz, cada um deles contendo um elemento de cada uma das linhas e de cada um das colunas, sem lugar a repetições, e sendo afectados de sinal positivo ou negativo consoante a permutação correspondente. Já para o cálculo de $\det(A_\alpha + B_\alpha)$ podemos recorrer, por exemplo, à regra de Laplace por expansão segundo a linha 1, vindo:

$$\det(A_\alpha + B_\alpha) = 3(6 - \alpha^2) - (3 - \alpha^2) - \alpha^2 = 15 - 3\alpha^2.$$

Consequentemente, a igualdade inicial acontece se e só se α for tal que

$$15 - 3\alpha^2 = 2(9 - \alpha^2)$$

ou, equivalentemente,

$$\alpha^2 = -3.$$

Como se sabe esta equação não tem raíes reais, mas tem raízes complexas dadas por:

$$\alpha = \pm i\sqrt{3}.$$

Consequentemente, a afirmação verdadeira é III e, portanto, a resposta correcta é **C**.

Exercício 15 *[2006/7 - 1° Teste - LEC/MEC]*

V1. Considere em $\mathbb{R}^3$ um sistema de equações lineares, dependente de um parâmetro real α, escrito na forma $A_\alpha u = b_\alpha$ em que

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 3\alpha \end{bmatrix}, \quad b_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \end{bmatrix},$$

e as seguintes afirmações:

I. O sistema $A_\alpha u = b_\alpha$ é impossível qualquer que seja o valor de α;

II. O sistema $A_\alpha u = b_\alpha$ é impossível pelo menos para um valor de α;

III. O sistema $A_\alpha u = b_\alpha$ é possível qualquer que seja o valor de α;

IV. Para todos os valores de α para os quais o sistema $A_\alpha u = b_\alpha$ é possível existe uma única solução.

Qual é a lista completa de afirmações verdadeiras?

A) II **B)** I e II **C)** III **D)** III e IV

. . . .

Resolução:

Consideremos a matriz aumentada do sistema de equações, $[A_\alpha \mid b_\alpha]$, e seja $[U_\alpha \mid c_\alpha]$ o resultado da eliminação de Gauss aplicada àquela matriz. Com a convenção habitual de escrita, temos:

$$[A_\alpha \mid b_\alpha] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 7 & 8 & 3\alpha & \alpha \end{array}\right] \xrightarrow{E_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -2 \\ 0 & -6 & 3(\alpha-7) & \alpha-7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 3(\alpha-3) & \alpha-3 \end{array}\right] = [U_\alpha \mid c_\alpha]$$

com

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Recordando que o método de eliminação de Gauss não altera o conjunto das soluções de um sistema de equações lineraes, temos:

I. É falsa,
uma vez que, por exemplo, para $\alpha \neq 3$ o sistema é possível.

II. É falsa,
uma vez que para que o sistema seja impossível é necessário que haja na matriz U_α uma linha de zeros - o que só acontece na 3^{a} linha para $\alpha = 3$ - e que a correspondente componente do vector c_α seja diferente de zero - para $\alpha = 3$ a 3^{a} componente do vector c_α é nula.

III. É verdadeira,
uma vez que, como vimos, o sistema é possível para qualquer valor de α.

IV. É falsa,
uma vez que para $\alpha = 3$ há infinitas soluções: podemos determinar a 1^{a} e a 2^{a} das incógnitas em função da 3^{a}, que é livre, uma vez que a 3^{a} coluna de U_α não tem pivô.

Assim, a resposta correcta é **C**.

Exercício 16 *[2006/7 - 1° Teste - LEC/MEC]*

V1. Sendo $\lambda \in \mathbb{R}$, pretende-se determinar o vector $u \in \mathbb{R}^3$, representado como vector coluna, que é solução da equação

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \end{bmatrix} u = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Qual é a solução?

A) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ **B)** $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ **C)** $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ **D)** $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

....

Resolução:

A igualdade no enunciado não é mais do que uma igualdade entre polinómios. De facto, sendo $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \end{bmatrix} u = a + b\lambda + c\lambda^2$$

e

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 + (\lambda - 1) \\ 1 & 1 + (\lambda - 1) & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda - 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -(\lambda - 1)^2 = -1 + 2\lambda - \lambda^2, \end{aligned}$$

onde se usou a regra de Laplace, por expansão segundo a linha 3, para o cálculo do último determinante.

Como dois polinómios são iguais quando forem iguais os respectivos coeficientes, resulta que

$$a = -1, \quad b = 2, \quad c = -1.$$

Assim, a resposta correcta é **B**.

Exercício 17 *[2006/7 - 1° Exame - LEC/MEC]*

V1. Sejam A e B matrizes quadradas e invertíveis de ordem $n \in \mathbb{N}$, represente por I a matriz identidade de ordem n e seja α um escalar não nulo. Considere as seguintes igualdades:

I. $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$,

II. $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$,

III. $(AB^{-1})^{-1} = BA^{-1}$,

IV. $\det(A + \alpha B) = \det A + \alpha^n \det B$.

Qual a lista completa de igualdades que são verdadeiras para quaisquer matrizes e qualquer escalar nas condições indicadas?

A) Todas **B)** I e II **C)** II e III **D)** III

....

Resolução:

Analisemos cada uma das igualdades:

I. Não é verdadeira com generalidade.

Usando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, tem-se

$$(A-B)(A+B) = A(A+B) - B(A+B) = A^2 + AB - BA + B^2,$$

pelo que será $A^2 + B^2 = (A-B)(A+B)$ se e só se

$$AB = BA,$$

o que não é verdadeiro com generalidade, pois o produto de matrizes não é comutativo.

II. É verdadeira.

Efectivamente, o determinante de uma matriz de ordem n é uma função linear de cada uma das suas linhas e como multiplicar uma matriz por um escalar corresponde a multiplicar cada uma da suas linhas por esse escalar, o resultado é imediato. Em termos analíticos, considerando a matriz A representada em termos das suas linhas

$$A = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \vdots \\ \ell_n \end{bmatrix},$$

tem-se

$$\det(\alpha A) \;=\; \begin{vmatrix} \alpha\ell_1 \\ \alpha\ell_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha\ell_k \\ \vdots \\ \alpha\ell_n \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \ell_1 \\ \alpha\ell_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha\ell_k \\ \vdots \\ \alpha\ell_n \end{vmatrix} = \alpha^2 \begin{vmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \alpha\ell_3 \\ \vdots \\ \alpha\ell_k \\ \vdots \\ \alpha\ell_n \end{vmatrix} = \cdots = \alpha^k \begin{vmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \vdots \\ \ell_k \\ \alpha\ell_{k+1} \\ \vdots \\ \alpha\ell_n \end{vmatrix} = \cdots = \alpha^n \begin{vmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \vdots \\ \ell_k \\ \vdots \\ \vdots \\ \ell_n \end{vmatrix} = \alpha^n \det A$$

III. É verdadeira.

Para qualquer matriz B invertível, pela definição da inversa, tem-se $(B^{-1})^{-1} = B$ e, como a inversa do produto de duas matrizes invertíveis - A e B - é o produto das inversas pela ordem inversa em relação à qual elas figuram no produto original - $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ - (ver o Exercício 5 para uma demostração), obtém-se

$$(AB^{-1})^{-1} = (B^{-1})^{-1}A^{-1} = BA^{-1}.$$

IV. Não é verdadeira com generalidade.

Efectivamente, esta igualdade seria verdadeira se o determinante de uma soma de duas matrizes fosse a soma dos determinantes:

$$\det(X+Y) = \det X + \det Y, \tag{2}$$

pois, nesse caso, usando II (que já vimos ser verdadeira) obter-se-ia a igualdade no enunciado. No entanto, (**??**) não é verdadeira com generalidade, pois, por exemplo,

$$\det\left(2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 4, \quad \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1.$$

Assim, a resposta correcta é **C**.

Exercício 18 *[2006/7 - 1º Exame - LEC/MEC]*

V1. A solução geral do sistema de equações $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ é da forma

$$u = u_1 + \alpha u_0, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

em que o par de vectores $(u_0, u_1))$ é dado por:

A) ((1,1,-1),(1,0,1)) **B)** ((1,1,-1),(1,1,1)) **C)** ((1,-1,-1),(1,1,1)) **D)** ((1,-1,-1),(1,0,1))

....

Resolução:

Para determinar a solução geral do sistema em causa usamos o método de eliminação de Gauss, que não altera o conjunto das soluções do sistema. Considerando a matriz aumentada, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 4 \\ 1 & 3 & 4 & | & 5 \\ 1 & 4 & 5 & | & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 4 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 2 & | & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 4 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} = [U_\alpha \mid c_\alpha]$$

com

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Havendo uma linha nula, a terceira, na matriz aumentada após a eliminação de Gauss o sistema é indeterminado, com grau de indeterminação 1. Escrevendo as soluções na forma $u = (x, y, z)$, podemos determinar x e y em função de z (a incógnita que corresponde à coluna sem pivô). Da segunda equação, $y + z = 1$, vem

$$y = 1 - z$$

e substituindo este resultado na primeira das equações, $x + 2y + 3z = 4$, obtém-se

$$x = 4 - 2(1 - z) - 3z = 2 - z.$$

Consequentemente, a solução geral do sistema de equações pode ser escrita na forma

$$u = (2 - z, 1 - z, z) = (2, 1, 0) - z(1, 1, -1), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Agora trata-se de comparar este resultado com as alternativas dadas. Imediatamente se conclui que o vector u_0 é $u_0 = (1, 1, -1)$, ou um seu múltiplo não nulo, pelo que podemos eliminar C e D do conjunto de respostas certas. Para determinar o vector u_1, convém escever a solução geral na forma mais conveniente, introduzindo o novo parâmetro $\alpha = 1 - z \in \mathbb{R}$, por forma a que, por exemplo, a primeira componente do vector solução para $\alpha = 0$ seja igual a 1 (que aparece em qualquer das alternativas de resposta restantes (A e B)):

$$u = (2, 1, 0) + (1 - z - 1)(1, 1, -1) = (1, 0, 1) + (1 - z)(1, 1, -1) = (1, 0, 1) + \alpha(1, 1, -1), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Obtém-se assim a representação desejada com

$$u_1 = (1, 0, 1), \quad u_0 = (1, 1, -1).$$

Assim, a resposta correcta é **A**

Exercício 19 *[2006/7 - 2º Exame - LEC/MEC]*

V1. Considere o sistema de equações em $\mathbb{R}^3$, dependente dos parâmetros α e β,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 1 & \beta & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Qual dos seguintes é o valor do par (α, β) tal que o sistema anterior tem uma única solução?

A) (2,3) **B)** (3,2) **C)** (1,4) **D)** (2,4)

....

Resolução:

Trata-se de mais um problema que pode ser facilmente resolvido usando o método de eliminação de Gauss. Implementando-o para a matriz aumentada do sistema com a habitual convenção de notação, obtém-se no primeiro passo da eliminação de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \alpha & 1 \\ 1 & \beta & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \alpha & 1 \\ 0 & \beta-2 & 3-\alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \qquad \text{com } E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

O segundo passo da eliminação de Gauss depende do valor de $\beta - 2$:

- $\beta = 2$

  Neste caso, a forma final obtém-se trocando as linhas 2 e 3:

  $$\xrightarrow{P} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3-\alpha & 1 \end{array}\right] \qquad \text{com } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

  O sistema de equações terá uma única solução se for $\alpha \neq 3$ (caso em que a matriz dos coeficientes tem 3 pivôs). Ora a única alternativa de resposta com $\beta = 2$ é B, mas tendo $\alpha = 3$, podemos eliminá-la do conjunto das eventuais respostas certas.

- $\beta \neq 2$

  Neste caso, a forma final resulta de

  $$\xrightarrow{E_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \alpha & 1 \\ 0 & \beta-2 & 3-\alpha & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\beta+\alpha-5}{\beta-2} & \frac{3\beta-7}{\beta-2} \end{array}\right] \qquad \text{com } E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\beta-2} & 1 \end{bmatrix}.$$

  O sistema de equações terá uma única solução se for $\beta + \alpha \neq 5$ (caso em que a matriz dos coeficientes tem 3 pivôs). Podemos pois também eliminar A e C do conjunto das eventuais respostas certas, uma vez que para qualquer delas se tem $\beta + \alpha = 5$. No caso da alternativa D, tem-se $\beta = 4 \neq 2$ e $\beta + \alpha = 6 \neq 5$, pelo que o sistema de equações tem uma única solução.

Assim, a resposta correcta é **D**.

Exercício 20 *[2006/7 - 2º Exame - LEC/MEC]*

V1. Seja $\mathcal{S}$ o conjunto das soluções do sistema de equações lineares em $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Então $\mathcal{S}$ é

A) o conjunto vazio **B)** um conjunto singular **C)** uma recta **D)** um plano

. . . .

Resolução:

Comecemos por formular de forma equivalente as alternativas de resposta apresentadas no enunciado. Desigando por $Au = b$ o sistema considerado, por $[A \mid b]$ a sua matriz aumentada e por $[U \mid c]$ a mtriz aumentada que se obtém por eliminação de Gauss da anterior, tem-se:

I. $\mathcal{S}$ é o conjunto vazio
$\Leftrightarrow$ o sistema de equações não tem soluções
$\Leftrightarrow$ o sistema de equações é impossível
$\Leftrightarrow$ existe uma linha nula em U e a componente correspondente (da mesma ordem) do vector c é não nula.

II. $\mathcal{S}$ é um ponto
$\Leftrightarrow$ o sistema de equações tem uma única solução
$\Leftrightarrow$ a matriz U não tem nenhuma linha nula.

III. $\mathcal{S}$ é uma recta
$\Leftrightarrow$ o sistema de equações é indeterminado com grau de indeterminação 1
$\Leftrightarrow$ existe uma e uma só linha nula na matriz U e a componente correspondente do vector c é nula (condição de existência de soluções).

IV. $\mathcal{S}$ é um plano
$\Leftrightarrow$ o sistema de equações é indeterminado com grau de indeterminação 2
$\Leftrightarrow$ U tem duas linhas nulas (que serão necessariamente a segunda e terceira uma vez que a primeira é não nula e permanece inalterada pela eliminação de Gauss) e as componentes do vector c correspondentes são não nula (nesse caso, a segunda e terceira componentes de c).

Agora resta proceder à eliminação de Gauss e escolher adequadamente. Com a habitual convenção de notação, obtém-se:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

em que

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Resulta do que atrás dissemos que a afirmação verdadeira é a III e, portanto, a resposta correcta é **C**.

Exercício 21 *[2006/7 - 2º Exame - LEC/MEC]*

V1. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ e considere o determinante seguinte

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 5 & 0 \\ 1 & \lambda + 1 & 2 \\ 1 & 2 & \lambda + 1 \end{vmatrix}.$$

A expressão correcta para o valor do determinante é:

A) $(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+4)$ **B)** $(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4)$ **C)** $(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda+4)$ **D)** $(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda-4)$

....

Resolução:

Uma vez que a matriz de que se pretende calcular o determinante tem uma entrada nula (na posição 13), podemos facilmente obtê-lo usando a regra de Laplace por expansão segundo a linha 1 (em alternativa podia ser usada a coluna 3), vindo:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \lambda-1 & 5 & 0 \\ 1 & \lambda+1 & 2 \\ 1 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} &= (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 \\ 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & \lambda+1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1)\big((\lambda+1)^2-4\big) - 5\big((\lambda+1)-2\big) \\
&= (\lambda-1)\big((\lambda+1)^2-9\big) = (\lambda+1-3)(\lambda+1-3) \\
&= (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+4)
\end{aligned}$$

Assim, a resposta correcta é **A**.

Exercício 22 *[2007/8 - 1° Teste - MEC]*

V1. Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $A_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 2 & \lambda & \lambda^2 \\ 2 & \lambda+1 & \lambda^2+1 \end{bmatrix}$.

Então o conjunto dos valores de λ para os quais A_λ é invertível é

A) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, **B)** $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, **C)** $\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$, **D)** $]0,+\infty[$.

....

Resolução:

Tendo em conta que

Uma matriz quadrada é invertível se e só se o seu determinante é diferente de zero

(ver [LTM, Teoremas 5.7 e 5.12]) basta calcular o determinante de A_λ e ver para que valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ este se anula. Podemos facilmente calcular o determinante de A_λ usando as propiedades básicas dos determinantes, como a seguir se exemplifica:

$$\begin{aligned}
\det A_\lambda &= \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 2 & \lambda+1 & \lambda^2+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & \lambda+1 & \lambda^2+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & \lambda+1 & \lambda^2+1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} \lambda & \lambda^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda-1),
\end{aligned}$$

em que no último passo se usou o conhecimento de um determinante de ordem 2.

Conclui-se então que A_λ não é invertível se $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.

Assim, a resposta correcta é **B**.

Exercício 23 *[2007/8 - 1° Teste - MEC]*

V1. O subconjunto de $\mathbb{R}^3$ formado pelas soluções da equação

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

é

A) um plano, **B)** uma recta, **C)** um conjunto singular, **D)** o conjunto vazio.

. . . .

Resolução:

Trata-se de uma questão do mesmo tipo da colocada no Exercício 20. Tal como naquele caso, desigando por $Au = b$ o sistema considerado, por $[A \mid b]$ a sua matriz aumentada e por $[U \mid c]$ a matriz aumentada que se obtém por eliminação de Gauss da anterior e por $\mathcal{S}$ o conjunto das soluções de $Au = b$, tem-se:

I. $\mathcal{S}$ é o conjunto vazio
$\Leftrightarrow$ o sistema de equações não tem soluções
$\Leftrightarrow$ o sistema de equações é impossível
$\Leftrightarrow$ existe uma linha nula em U e a componente correspondente (da mesma ordem) do vector c é não nula.

II. $\mathcal{S}$ é um ponto
$\Leftrightarrow$ o sistema de equações tem uma única solução
$\Leftrightarrow$ a matriz U não tem nenhuma linha nula.

III. $\mathcal{S}$ é uma recta
$\Leftrightarrow$ o sistema de equações é indeterminado com grau de indeterminação 1 $\Leftrightarrow$ existe uma e uma só linha nula na matriz U e a componente correspondente do vector c é nula (condição de existência de soluções).

IV. $\mathcal{S}$ é um plano
$\Leftrightarrow$ o sistema de equações é indeterminado com grau de indeterminação 2
$\Leftrightarrow$ U tem duas linhas nulas (que serão necessariamente a segunda e terceira uma vez que a primeira é não nula e permanece inalterada pela eliminação de Gauss) e as componentes do vector c correspondentes são nulas (nesse caso, a segunda e terceira componentes de c, que é a condição de existência de soluções).

Neste caso particular obtém-se:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 4 \\ 7 & 8 & 9 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{E_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right],$$

em que

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Conclui-se então que o sistema de equações considerado é impossível e, portanto, $\mathcal{S}$ é o conjunto vazio.

Assim a resposta correcta é **D**.

Exercício 24 *[2007/8 - 1° Exame - MEC]*

V1. Considere a matriz dependente do parâmetro real α,

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix}.$$

Qual das seguintes afirmações relativamente ao sistema de equações $A_\alpha u = b$ é verdadeira?

A) Existe (pelo menos) um valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que o sistema é possível e determinado, qualquer que seja $b \in \mathbb{R}^4$,

B) Existem valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ e de $b \in \mathbb{R}^4$ tais que o sistema é possível e determinado,

C) Para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^4$ o sistema é indeterminado,

D) Existe (pelo menos) um valor de $b \in \mathbb{R}^4$ tal que o sistema é impossível, qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{R}$.

....

Resolução:

Por facilidade de exposição ponhamos $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$, seja $[A_\alpha \mid b]$ a matriz aumentada do sistema de equações dado e $[U_\alpha \mid c]$ a que se obtém da anterior por aplicação do método de eliminação de Gauss. Neste caso, obtém-se:

$$[A_\alpha \mid b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & b_2 \\ 3 & 3 & 6 & 5 & b_3 \\ 1 & 0 & \alpha & 1 & b_4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & b_3 - 3b_1 \\ 0 & -2 & \alpha - 2 & -1 & b_4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & \alpha - 2 & -1/3 & b_4 - 2/3b_2 + 2/3b_1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{P} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & \alpha - 2 & -1/3 & b_4 - 2/3b_2 + 2/3b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - 2b_1 \end{array}\right] = [U_\alpha \mid c],$$

em que

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Daqui se conclui o seguinte:

- I e II são falsas,

uma vez que, tratando-se de um sistema com tantas equações quantas as incógnitas, a existência de uma linha nula na matriz U_α implica que o sistema é impossível ou indeterminado (não podendo, pois, ser possível e determinando).

- III é falsa e IV é verdadeira,

uma vez que o sistema é impossível no caso do vector b ser tal que a quarta componente do vector c é diferente de zero, $b_3 - b_2 - 2b_1 \neq 0$, independentemente do valor de α.

Assim, a resposta correcta é **D**.

Exercício 25 *[2007/8 - 1º Exame - MEC]*

V2. Qual o determinante da matriz $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -4 & \beta \end{bmatrix}$?

A) $8\,\alpha\,\beta + 3\,\beta$ **B)** $8\,\alpha\,\beta - 3\,\beta$ **C)** $3\,\alpha\,\beta - 8\,\beta$ **D)** $3\,\alpha\,\beta + 8\,\beta$

. . . .

Resolução:

Podemos facilmente calcular o determinante usando repetidamente a regra de Laplace, uma vez que a matriz tem muitos elementos nulos. Escolhendo inicialmente a coluna 4 (a que tem mais elementos nulos) e posteriormente a coluna 2 (a que tem mais elementos nulos na matriz de ordem 3), vem

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -4 & \beta \end{vmatrix} = \beta \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -4 & 0 & \alpha \end{vmatrix} = \beta \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & \alpha \end{vmatrix} = \beta(3\alpha + 8) = 3\alpha\beta + 8\beta.$$

Assim, a resposta correcta é **D**.

Exercício 26 *[2007/8 - 2º Exame - MEC]*

V1. Identifique o único valor de α real para o qual o sistema de equações

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

é possível.

A) 11, **B)** 3, **C)** 0, **D)** -4.

. . . .

Resolução:

Procedendo à eliminação de Gauss da matriz aumentada do sistema, obtém-se

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 7 & 8 & 9 & \alpha \end{array}\right] \xrightarrow{E_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -2 \\ 0 & -6 & -12 & \alpha - 7 \end{array}\right] \xrightarrow{E_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 3 \end{array}\right],$$

em que

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Daqui se conclui imediatamente que a condição de existência de soluções é que

$$\alpha = 3,$$

sendo o sistema impossível no caso contrário.

Assim, a resposta correcta é **B**.

Exercício 27 *[2007/8 - 2º Exame - MEC]*

V1. Para $\alpha \in \mathbb{R}$ seja $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \alpha & 1 & 2\alpha+1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Qual o valor do determinante da matriz $2A_1^{-1}A_2A_3^{-1}$?

A) 3/4, **B)** -3/4, **C)** -3, **D)** 3.

Exercício 28 *[2008/9 - 1º Teste - LEIC]*

V1. Qual dos seguintes é o vector (x, y, z), solução do sistema de equações lineares

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix},$$

cuja componente z tem o valor 3.

A) $(2, 3, 3)$, **B)** $(-1, -2, 3)$, **C)** $(-2, -1, 3)$, **D)** $(3, 4, 3)$.

Exercício 29 *[2008/9 - 1º Teste - LEIC]*

V1. Considere o sistema de equações lineares dependente do parâmetro $\beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & \beta+3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \beta^2 - 2 \end{bmatrix},$$

e as seguintes afirmações relativamente a este sistema:

I. Existe uma única solução, qualquer que seja β,
II. Para $\beta = 1$ existe uma única solução,
III. Para $\beta = 2$ existe uma única solução,
IV. Para $\beta = 2$ não existem soluções.

Qual é a lista completa de afirmações verdadeiras?

A) I,II e III, **B)** II e IV, **C)** II e III, **D)** II.

Exercício 30 *[2008/9 - 1º Teste - LEIC]*

V1. Seja

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1-\alpha \\ 2 & \alpha^2 & 1 \\ 1 & \alpha & 1+\alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Qual o valor do determinante da matriz $A_1A_3^{-1}A_{-1}$?

A) 0, **B)** 2/3, **C)** -2/3, **D)** 3/2.

Exercício 31 *[2008/9 - 1° Exame - LEIC]*

V1. Qual dos vectores seguintes é solução da equação

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}?$$

A) $(1, 2, 3)$, **B)** $(1, -2, 3)$, **C)** $(1, 2, 1)$, **D)** $(1, -1, 1)$.

Exercício 32 *[2008/9 - 1° Exame - LEIC]*

V1. Qual é o valor de

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}?$$

A) 0 , **B)** 4, **C)** -4, **D)** 2.

Exercício 33 *[2008/9 - 1° Exame - LEIC]*

V1. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \alpha - 1 \\ \alpha + 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Qual dos seguintes é o conjunto dos valores de α para os quais a função $f(\lambda) = \det(A_\alpha - \lambda I)$ não se anula em $\mathbb{R}$?

A) $]-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{2}[\cup]\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty[$, **B)** $]-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}[$, **C)** $]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[$, **D)** $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

Exercício 34 *[2008/9 - 2° Exame - LEIC]*

V1. Qual dos seguintes vectores (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ é solução do sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

e pertence ao plano $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z = 4\}$?

A) $(22, -12, -3)$ **B)** $(30, -12, 5)$, **C)** $(-6, 4, 1)$, **D)** $(1, 1, 1)$.

Exercício 35 *[2008/9 - 2° Exame - LEIC]*

V1. Considere o sistema de equações lineares (SEL), dependente do parâmetro $\beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & \beta + 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ \beta^2 - 5 \end{bmatrix}$$

e as seguintes afirmações:

I. Se $\beta \neq 1$ e $\beta \neq -1$, o SEL tem uma única solução;
II. Se $\beta = -1$, o conjunto das soluções do SEL é uma recta em $\mathbb{R}^3$;
III. Se $\beta = 1$, o conjunto das soluções do SEL é uma recta em $\mathbb{R}^3$;
IV. Se $\beta = -1$, o SEL é impossível.
Qual é a lista completa de afirmações verdadeiras?

A) I e II, **B)** I e III, **C)** I, III e IV, **D)** III e IV.

Exercício 36 *[2008/9 - 2º Exame - LEIC]*

V1. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$. Considere as seguintes igualdades entre determinantes:

I. $|A| = 0$, II. $|A + 2B| = 2|B + 2A|$, III. $|B| = 0$, IV. $|B + 2A| = |A + 2B|$.

Qual é a lista completa de igualdades verdadeiras?

A) I e III, **B)** I, II e III, **C)** I, III e IV, **D)** I, II, III e IV.

Exercício 37 *[2009/10 - 1º Teste - MEC]*

V1. Para $\lambda \in \mathbb{R}$ seja

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & \lambda & \lambda + 1 \\ -5 & 2 & -\lambda - 1 \end{bmatrix}.$$

Qual é o valor de $\det A_\lambda$?

A) $1 + \lambda^2$, **B)** $1 - \lambda^2$, **C)** $(1 - \lambda)^2$, **D)** $(1 + \lambda)^2$.

Exercício 38 *[2009/10 - 1º Teste - MEC]*

V1. Considere novamente a matriz A_λ (com $\lambda \in \mathbb{R}$) definida no problema anterior. Qual dos seguintes valores de λ é tal que o sistema de equações lineares

$$A_\lambda u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tem como única solução o vector $u = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$?

A) -1, **B)** 1, **C)** -2, **D)** 2.

Exercício 39 *[2009/10 - 1º Exame - MEC]*

V1. Qual o valor do determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}?$$

A) -16, **B)** -12, **C)** 12, **D)** 16.

Exercício 40 *[2009/10 - 1º Exame - MEC]*

V1. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Designando por $\mathcal{S}$ o subconjunto de $\mathbb{R}^4$ formado pelas soluções da equação $Au = b$, qual é a afirmação verdadeira?

A) $\mathcal{S}$ é um plano (ou plano-2),
B) $\mathcal{S}$ é uma recta (ou plano-1),
C) $\mathcal{S}$ é um conjunto singular,
D) $\mathcal{S}$ é o conjunto vazio.

Exercício 41 *[2009/10 - 2º Exame - MEC]*

V1. Qual o valor do determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}?$$

A) -1, **B)** 0, **C)** 1, **D)** 16.

Exercício 42 *[2009/10 - 2º Exame - MEC]*

V1. Sejam α um número real, A e B duas matrizes quadradas da mesma ordem $n \geq 2$, e A^t e B^t as respectivas transpostas. Considere as seguintes afirmações:

I. $\det(\alpha A) = \alpha \det A$, II. $\det(A + B) = \det A + \det B$,
III. $\det(AB) = (\det A)(\det B)$, IV. $\det(A^t B) = (\det A)(\det B)$.

Qual é a lista completa das que são verdadeiras para qualquer escalar α e quaisquer matrizes A e B nas condições acima indicadas?

A) III e IV, **B)** II e III, **C)** I e II, **D)** I, III e IV.

Exercício 43 *[2009/10 - 2º Exame - MEC]*

V1. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & x \\ 1 & y & 2 & 3 \\ 1 & 2 & z & w \end{bmatrix},$$

em que x, y, z e w são números reais que se pretendem escolher por forma que o núcleo da matriz A seja gerado pelo vector $(1, 1, -1, -1)$.

Qual das seguintes é a escolha acertada para o vector (x, y, z, w)?

A) $(0, 3, 3, 0)$, **B)** $(0, 4, 3, 0)$, **C)** $(0, 4, 1, 2)$, **D)** $(0, 4, 3, 1)$.

Exercício 44 *[2010/11 - 1º Teste - MEEC]*

V1. Das quatro matrizes seguintes duas são invertíveis. Quais?

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

A) A_1 e A_4, **B)** A_2 e A_3, **C)** A_2 e A_4, **D)** A_3 e A_4.

Exercício 45 *[2010/11 - 1º Teste - MEEC]*

V1. Pretende-se calcular em função do parâmetro real α o determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1+\alpha & 1-\alpha^2 \\ -1 & 2 & 1-\alpha \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Qual é a resposta certa?

A) $1+\alpha$, **B)** $(1+\alpha)^2$, **C)** $1+\alpha^2$, **D)** $(1-\alpha)^2$.

Exercício 46 *[2010/11 - Exame - MEEC]*

V1. Determine o único valor de $a \in \mathbb{R}$ tal que a equação

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & a & -1 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

tem como conjunto de soluções uma recta em $\mathbb{R}^3$.

A) $a = 12$, **B)** $a = 8$, **C)** $a = 4$, **D)** $a = 2$.

Exercício 47 *[2010/11 - Exame - MEEC]*

V1. Sejam $b = (1, -1, 2)$ e $\mathcal{S} = \{(1,1,1)\} + L(\{(1,2,1)\})$. Qual das matrizes seguintes é a matriz dos coeficientes de um SEL escrito na forma $Au = b$ que tem $\mathcal{S}$ como conjunto de soluções?

A) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 6 & -4 & 2 \end{bmatrix}$, **B)** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix}$, **C)** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 6 & -2 & -2 \end{bmatrix}$, **D)** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -7 \\ 6 & -2 & -2 \end{bmatrix}$.

Exercício 48 *[2010/11 - Exame - MEEC]*

V1. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$. Qual é o valor do determinante $\det(A - \alpha I)$?

A) $(\alpha-3)^3$, **B)** $-(\alpha-1)^2(\alpha-3)$, **C)** $(\alpha-3)^2(\alpha-1)$, **D)** $-(\alpha-3)^2(\alpha-1)$.
