Álgebra Linear
Exercícios de escolha múltipla

Setembro 2012

[Exercícios baseados em provas de avaliação a cursos leccionados por Amarino Lebre.]

Sistemas de Equações Lineares, Matrizes e Determinantes

Exercício 1 *[2000/1 - 1° Teste - LEC]*

V1. Considere o sistema de equações lineares nas variáveis u , v e w representado pela matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & \lambda & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & \mu \end{array}\right].$$

Faça a discussão do sistema em função dos parâmetros λ e μ . A resposta correcta é:

A) O sistema é determinado sse $\lambda \neq 3$; é impossível sse $\lambda = 3$ e $\mu \neq -\frac{5}{3}$; e é indeterminado sse $\lambda = 3$ e $\mu = -\frac{5}{3}$.

B) O sistema é determinado sse $\lambda \neq 3$; e é indeterminado sse $\lambda = 3$.

C) O sistema é possível sse $\lambda \neq 3$; e é impossível sse $\lambda = 3$.

D) O sistema é determinado sse $\lambda \neq 3$; é impossível sse $\lambda = 3$ e $\mu = -\frac{5}{3}$; e é indeterminado sse $\lambda = 3$ e $\mu \neq -\frac{5}{3}$.

Exercício 2 *[2000/1 - 1°Exame - LEC]*

V1. Considere o sistema de equações lineares nas variáveis x , y e z representado pela matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & -1 & \mu \\ 2 & -5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \end{array}\right].$$

Faça a discussão do sistema em função dos parâmetros λ e μ . A resposta correcta é:

A) O sistema é determinado sse $\lambda \neq 0$; e é indeterminado sse $\mu = \frac{5}{2}$.

B) O sistema é determinado sse $\lambda \neq 0$; e é impossível sse $\lambda = 0$.

C) O sistema é determinado sse $\lambda \neq 0$; e é indeterminado sse $\lambda = 0$.

D) O sistema é possível sse $\lambda \neq 0$; e é impossível sse $\lambda = 0$.

Exercício 3 *[2000/1 - 1°Exame - LEC]*

V1. Qual o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -5 & \beta \end{bmatrix}$?

A) $12\beta + 5\alpha\beta$ **B)** $60 + 20\alpha\beta$ **C)** $20\alpha + 15\beta$ **D)** $60\alpha - 3\alpha\beta$

Exercício 4 *[2000/1 - 2º Exame - LEC]*

V1. Considere o seguinte sistema de equações lineares em variáveis complexas

$$\begin{cases} 2\,\mathbf{i}\,z_1 + a\,z_2 &= b \\ -\mathbf{i}\,z_1 + z_2 &= 2\,\mathbf{i} \end{cases} .$$

Faça a sua discussão em função dos parâmetros a e b em $\mathbb{C}$. A resposta correcta é:

A) O sistema é determinado sse $a \neq -2$; é impossível sse $a = -2$ e $b \neq -4\,\mathbf{i}$; e é indeterminado sse $a = -2$ e $b = -4\,\mathbf{i}$

B) O sistema é determinado sse $a \neq -2 + \mathbf{i}$; e é indeterminado sse $a = -2 + \mathbf{i}$

C) O sistema é determinado sse $a \neq -2$; e é indeterminado sse $a = -2$

D) O sistema é determinado sse $a \neq -2 + \mathbf{i}$; é impossível sse $a = -2 + \mathbf{i}$ e $b \neq -2 - 4\,\mathbf{i}$; e é indeterminado sse $a = -2 + \mathbf{i}$ e $b = -2 - 4\,\mathbf{i}$

Exercício 5

V1. Sejam A uma matriz 3×4, B uma matriz invertível 4×4 e C uma matriz 4×3. Considere ainda uma matriz múltipla da matriz identidade I, $E_\lambda = \lambda I$ com $\lambda \neq 0$, e uma matriz elementar de permutação, P, ambas com dimensão 4×4. Considere a lista de afirmações:

I. $(E_\lambda + B)^2 = (E_\lambda)^2 + 2E_\lambda B + B^2$

II. $(AP + AB)^T = PA^T + B^T A^T$, onde X^T representa a transposta da matriz X

III. $(PE_\lambda B)^{-1} = E_\lambda^{-1} B^{-1} P$

IV. $(PCA)^2 = P^2 (CA)^2$

A lista completa de afirmações correctas é:

A) Todas **B)** II e IV **C)** I, II e III **D)** III

Exercício 6 *[2000/1 - 2º Exame - LEC]*

V1. Considere a seguinte lista de igualdades entre determinantes.

I. $$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ d & 0 & c \\ 2 & 2 & -5 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 0 & c \\ 2 & -5 \end{vmatrix} + d \begin{vmatrix} b & 0 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix}$$

II. $$\begin{vmatrix} 0 & 0 & b \\ d & -3 & c \\ 2 & a & -3 \end{vmatrix} = d \begin{vmatrix} 0 & b \\ a & -3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & b \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$$

III. $$\begin{vmatrix} 0 & a & -5 \\ b & c & d \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} b & c \\ -4 & 0 \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} 0 & a \\ -4 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a \\ b & c \end{vmatrix}$$

Diga quais as que são verdadeiras para quaisquer valores dos escalares a, b, c, d:

A) III **B)** II **C)** I **D)** I e II

Exercício 7 *[2005/6 - 1° Teste - LEEC]*

V1. Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -4 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ -12 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sendo (x, y, z) solução do sistema, qual o valor da soma $x + y + z$?

A) 7 **B)** 6 **C)** 5 **D)** 4

Exercício 8 *[2005/6 - 1° Teste - LEEC]*

V2. Considere o sistema de equações lineares nas variáveis x_1 , x_2 e x_3 representado pela matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & c & d \end{array}\right].$$

Faça a discussão do sistema em função dos parâmetros c e d . A resposta correcta é:

A) O sistema é possível sse $c \neq -\frac{5}{12}$; e é impossível sse $c = -\frac{5}{12}$.

B) O sistema é determinado sse $c \neq -\frac{5}{12}$; e é indeterminado sse $c = -\frac{5}{12}$.

C) O sistema é determinado sse $c \neq -\frac{5}{12}$; é impossível sse $c = -\frac{5}{12}$ e $d = \frac{5}{4}$; e é indeterminado sse $c = -\frac{5}{12}$ e $d \neq \frac{5}{4}$.

D) O sistema é possível sse $c \neq -\frac{5}{12}$ ou $c = -\frac{5}{12}$ e $d = \frac{5}{4}$; e é impossível sse $c = -\frac{5}{12}$ e $d \neq \frac{5}{4}$.

Exercício 9 *[2005/6 - 1° Teste - LEEC]*

V1. Sejam λ um número real e $\Lambda = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda+1 & \lambda+2 & \lambda+3 \\ 2\lambda+1 & 2\lambda+2 & 2\lambda \end{vmatrix}$.

Qual o valor de Λ?

A) $-\lambda(10\lambda + 9)$ **B)** -3λ **C)** $-\lambda(\lambda + 2)$ **D)** $-\lambda^3$

Exercício 10 *[2005/6 - 1° Exame - LEEC]*

V1. Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & -4 & -6 \\ 3 & 8 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Sabendo que (x, y, z) com $x = 2$ é solução do sistema anterior, qual o valor do par (y, z) ?

A) (-3,2) **B)** (3,-1) **C)** (2,-1/2) **D)** (-1,1)

Exercício 11 *[2005/6 - 1° Exame - LEEC]*

V2. Considere a seguinte lista de igualdades entre determinantes.

I. $\begin{vmatrix} b & a & 0 \\ -5 & c & 2 \\ d & 4 & 0 \end{vmatrix} = -b \begin{vmatrix} c & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 2 \end{vmatrix}$

II. $\begin{vmatrix} -5 & -2 & 0 \\ b & -3 & a \\ d & c & 0 \end{vmatrix} = d \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -3 & a \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ b & a \end{vmatrix}$

III. $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 3 & d & b \\ 3 & c & -4 \end{vmatrix} = d \begin{vmatrix} a & 0 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a & 0 \\ 3 & b \end{vmatrix}$

Diga quais as que são verdadeiras para quaisquer valores dos escalares a, b, c, d:

A) I , II e III **B)** II **C)** I e III **D)** Nenhuma

Exercício 12 *[2005/6 - 2° Exame - LEEC]*

V1. Considere em $\mathbb{R}^3$ um sistema de equações lineares $Au = b$ em que $b \in \mathbb{R}^3$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix},$$

e as seguintes afirmações:

I. Existe pelo menos um vector b para o qual o sistema $Au = b$ não tem soluções;

II. A equação $Au = 0$ tem como única solução $u = 0$;

III. Existindo soluções de $Au = b$, o conjunto das soluções é uma recta em $\mathbb{R}^3$;

IV. Existindo soluções de $Au = b$, o conjunto das soluções é um plano em $\mathbb{R}^3$.

Qual é a afirmação verdadeira?

A) I **B)** II **C)** III **D)** IV

Exercício 13 *[2005/6 - 2° Exame - LEEC]*

V1. Qual é o valor do determinante da matriz $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$?

A) 78 **B)** -78 **C)** 102 **D)** -102

Exercício 14 *[2005/6 - 2º Exame - LEEC]*

V1. Seja α um escalar e

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 3 & 0 & \alpha \\ 0 & 2 & 0 \\ \alpha & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix}.$$

Considere a relação

$$\det(A_\alpha + B_\alpha) = \det A_\alpha + \det B_\alpha \tag{1}$$

e as seguintes afirmações:

I. Não existem valores de $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tais que (1) é satisfeita;

II. Existem valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que (1) é satisfeita;

III. Existem valores de $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tais que (1) é satisfeita

IV. (1) é satisfeita para qualquer $\alpha \in \mathbb{C}$.

Então a afirmação verdadeira é:

A) I **B)** II **C)** III **D)** IV

Exercício 15 *[2006/7 - 1° Teste - LEC/MEC]*

V1. Considere em $\mathbb{R}^3$ um sistema de equações lineares, dependente de um parâmetro real α, escrito na forma $A_\alpha u = b_\alpha$ em que

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 3\alpha \end{bmatrix}, \quad b_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \end{bmatrix},$$

e as seguintes afirmações:

I. O sistema $A_\alpha u = b_\alpha$ é impossível qualquer que seja o valor de α;

II. O sistema $A_\alpha u = b_\alpha$ é impossível pelo menos para um valor de α;

III. O sistema $A_\alpha u = b_\alpha$ é possível qualquer que seja o valor de α;

IV. Para todos os valores de α para os quais o sistema $A_\alpha u = b_\alpha$ é possível existe uma única solução.

Qual é a lista completa de afirmações verdadeiras?

A) II **B)** I e II **C)** III **D)** III e IV

Exercício 16 *[2006/7 - 1° Teste - LEC/MEC]*

V1. Sendo $\lambda \in \mathbb{R}$, pretende-se determinar o vector $u \in \mathbb{R}^3$, representado como vector coluna, que é solução da equação

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \end{bmatrix} u = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Qual é a solução?

A) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ **B)** $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ **C)** $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ **D)** $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Exercício 17 *[2006/7 - 1° Exame - LEC/MEC]*

V1. Sejam A e B matrizes quadradas e invertíveis de ordem $n \in \mathbb{N}$, represente por I a matriz identidade de ordem n e seja α um escalar não nulo. Considere as seguintes igualdades:

I. $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$,
II. $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$,
III. $(AB^{-1})^{-1} = BA^{-1}$,
IV. $\det(A + \alpha B) = \det A + \alpha^n \det B$.

Qual a lista completa de igualdades que são verdadeiras para quaisquer matrizes e qualquer escalar nas condições indicadas?

A) Todas **B)** I e II **C)** II e III **D)** III

Exercício 18 *[2006/7 - 1° Exame - LEC/MEC]*

V1. A solução geral do sistema de equações $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ é da forma

$$u = u_1 + \alpha u_0, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

em que o par de vectores $(u_0, u_1))$ é dado por:

A) ((1,1,-1),(1,0,1)) **B)** ((1,1,-1),(1,1,1)) **C)** ((1,-1,-1),(1,1,1)) **D)** ((1,-1,-1),(1,0,1))

Exercício 19 *[2006/7 - 2° Exame - LEC/MEC]*

V1. Considere o sistema de equações em $\mathbb{R}^3$, dependente dos parâmetros α e β,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 1 & \beta & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Qual dos seguintes é o valor do par (α, β) tal que o sistema anterior tem uma única solução?

A) (2,3) **B)** (3,2) **C)** (1,4) **D)** (2,4)

Exercício 20 *[2006/7 - 2° Exame - LEC/MEC]*

V1. Seja $\mathcal{S}$ o conjunto das soluções do sistema de equações lineares em $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Então $\mathcal{S}$ é

A) o conjunto vazio **B)** um conjunto singular **C)** uma recta **D)** um plano

---

Exercício 21 *[2006/7 - 2º Exame - LEC/MEC]*

V1. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ e considere o determinante seguinte

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 5 & 0 \\ 1 & \lambda+1 & 2 \\ 1 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}.$$

A expressão correcta para o valor do determinante é:

A) $(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+4)$ **B)** $(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4)$ **C)** $(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda+4)$ **D)** $(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda-4)$

Exercício 22 *[2007/8 - 1º Teste - MEC]*

V1. Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $A_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 2 & \lambda & \lambda^2 \\ 2 & \lambda+1 & \lambda^2+1 \end{bmatrix}$.

Então o conjunto dos valores de λ para os quais A_λ é invertível é

A) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, **B)** $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, **C)** $\mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}$, **D)** $]0,+\infty[$.

Exercício 23 *[2007/8 - 1º Teste - MEC]*

V1. O subconjunto de $\mathbb{R}^3$ formado pelas soluções da equação

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

é

A) um plano, **B)** uma recta, **C)** um conjunto singular, **D)** o conjunto vazio.

Exercício 24 *[2007/8 - 1º Exame - MEC]*

V1. Considere a matriz dependente do parâmetro real α,

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix}.$$

Qual das seguintes afirmações relativamente ao sistema de equações $A_\alpha u = b$ é verdadeira?

A) Existe (pelo menos) um valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que o sistema é possível e determinado, qualquer que seja $b \in \mathbb{R}^4$,

B) Existem valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ e de $b \in \mathbb{R}^4$ tais que o sistema é possível e determinado,

C) Para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^4$ o sistema é indeterminado,

D) Existe (pelo menos) um valor de $b \in \mathbb{R}^4$ tal que o sistema é impossível, qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercício 25 *[2007/8 - 1° Exame - MEC]*

V2. Qual o determinante da matriz $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -4 & \beta \end{bmatrix}$?

A) $8\,\alpha\,\beta+3\,\beta$ **B)** $8\,\alpha\,\beta-3\,\beta$ **C)** $3\,\alpha\,\beta-8\,\beta$ **D)** $3\,\alpha\,\beta+8\,\beta$

Exercício 26 *[2007/8 - 2° Exame - MEC]*

V1. Identifique o único valor de α real para o qual o sistema de equações

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

é possível.

A) 11, **B)** 3, **C)** 0, **D)** -4.

Exercício 27 *[2007/8 - 2° Exame - MEC]*

V1. Para $\alpha \in \mathbb{R}$ seja $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \alpha & 1 & 2\alpha+1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Qual o valor do determinante da matriz $2A_1^{-1}A_2A_3^{-1}$?

A) 3/4, **B)** -3/4, **C)** -3, **D)** 3.

Exercício 28 *[2008/9 - 1° Teste - LEIC]*

V1. Qual dos seguintes é o vector (x, y, z), solução do sistema de equações lineares

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix},$$

cuja componente z tem o valor 3.

A) $(2, 3, 3)$, **B)** $(-1, -2, 3)$, **C)** $(-2, -1, 3)$, **D)** $(3, 4, 3)$.

Exercício 29 *[2008/9 - 1° Teste - LEIC]*

V1. Considere o sistema de equações lineares dependente do parâmetro $\beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & \beta+3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \beta^2-2 \end{bmatrix},$$

e as seguintes afirmações relativamente a este sistema:

I. Existe uma única solução, qualquer que seja β,
II. Para $\beta = 1$ existe uma única solução,
III. Para $\beta = 2$ existe uma única solução,
IV. Para $\beta = 2$ não existem soluções.

Qual é a lista completa de afirmações verdadeiras?
A) I,II e III, **B)** II e IV, **C)** II e III, **D)** II.

Exercício 30 *[2008/9 - 1° Teste - LEIC]*

V1. Seja

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1-\alpha \\ 2 & \alpha^2 & 1 \\ 1 & \alpha & 1+\alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Qual o valor do determinante da matriz $A_1 A_3^{-1} A_{-1}$?
A) 0, **B)** 2/3, **C)** -2/3, **D)** 3/2.

Exercício 31 *[2008/9 - 1° Exame - LEIC]*

V1. Qual dos vectores seguintes é solução da equação

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}?$$

A) $(1, 2, 3)$, **B)** $(1, -2, 3)$, **C)** $(1, 2, 1)$, **D)** $(1, -1, 1)$.

Exercício 32 *[2008/9 - 1° Exame - LEIC]*

V1. Qual é o valor de

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}?$$

A) 0 , **B)** 4, **C)** -4, **D)** 2.

Exercício 33 *[2008/9 - 1° Exame - LEIC]*

V1. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \alpha - 1 \\ \alpha + 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Qual dos seguintes é o conjunto dos valores de α para os quais a função $f(\lambda) = \det(A_\alpha - \lambda I)$ não se anula em $\mathbb{R}$?

A) $]-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{2}[\cup]\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty[$, **B)** $]-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}[$, **C)** $]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[$, **D)** $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

Exercício 34 *[2008/9 - 2º Exame - LEIC]*

V1. Qual dos seguintes vectores (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ é solução do sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

e pertence ao plano $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z = 4\}$?

A) $(22, -12, -3)$ **B)** $(30, -12, 5)$, **C)** $(-6, 4, 1)$, **D)** $(1, 1, 1)$.

Exercício 35 *[2008/9 - 2º Exame - LEIC]*

V1. Considere o sistema de equações lineares (SEL), dependente do parâmetro $\beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & \beta+6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ \beta^2 - 5 \end{bmatrix}$$

e as seguintes afirmações:

I. Se $\beta \neq 1$ e $\beta \neq -1$, o SEL tem uma única solução;
II. Se $\beta = -1$, o conjunto das soluções do SEL é uma recta em $\mathbb{R}^3$;
III. Se $\beta = 1$, o conjunto das soluções do SEL é uma recta em $\mathbb{R}^3$;
IV. Se $\beta = -1$, o SEL é impossível.
Qual é a lista completa de afirmações verdadeiras?

A) I e II, **B)** I e III, **C)** I, III e IV, **D)** III e IV.

Exercício 36 *[2008/9 - 2º Exame - LEIC]*

V1. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$. Considere as seguintes igualdades entre determinantes:

I. $|A| = 0$, II. $|A + 2B| = 2|B + 2A|$, III. $|B| = 0$, IV. $|B + 2A| = |A + 2B|$.
Qual é a lista completa de igualdades verdadeiras?

A) I e III, **B)** I, II e III, **C)** I, III e IV, **D)** I, II, III e IV.

Exercício 37 *[2009/10 - 1º Teste - MEC]*

V1. Para $\lambda \in \mathbb{R}$ seja

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & \lambda & \lambda+1 \\ -5 & 2 & -\lambda-1 \end{bmatrix}.$$

Qual é o valor de $\det A_\lambda$?

A) $1 + \lambda^2$, **B)** $1 - \lambda^2$, **C)** $(1 - \lambda)^2$, **D)** $(1 + \lambda)^2$.

Exercício 38 *[2009/10 - 1º Teste - MEC]*

V1. Considere novamente a matriz A_λ (com $\lambda \in \mathbb{R}$) definida no problema anterior. Qual dos seguintes valores de λ é tal que o sistema de equações lineares

$$A_\lambda u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tem como única solução o vector $u = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$?

A) -1, **B)** 1, **C)** -2, **D)** 2.

Exercício 39 *[2009/10 - 1º Exame - MEC]*

V1. Qual o valor do determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}?$$

A) -16, **B)** -12, **C)** 12, **D)** 16.

Exercício 40 *[2009/10 - 1º Exame - MEC]*

V1. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Designando por $\mathcal{S}$ o subconjunto de $\mathbb{R}^4$ formado pelas soluções da equação $Au = b$, qual é a afirmação verdadeira?

A) $\mathcal{S}$ é um plano (ou plano-2),
B) $\mathcal{S}$ é uma recta (ou plano-1),
C) $\mathcal{S}$ é um conjunto singular,
D) $\mathcal{S}$ é o conjunto vazio.

Exercício 41 *[2009/10 - 2º Exame - MEC]*

V1. Qual o valor do determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}?$$

A) -1, **B)** 0, **C)** 1, **D)** 16.

Exercício 42 *[2009/10 - 2º Exame - MEC]*

V1. Sejam α um número real, A e B duas matrizes quadradas da mesma ordem $n \geq 2$, e A^t e B^t as respectivas transpostas. Considere as seguintes afirmações:

I. $\det(\alpha A) = \alpha \det A$, II. $\det(A+B) = \det A + \det B$,

III. $\det(AB) = (\det A)(\det B)$, IV. $\det(A^t B) = (\det A)(\det B)$.

Qual é a lista completa das que são verdadeiras para qualquer escalar α e quaisquer matrizes A e B nas condições acima indicadas?

A) III e IV, **B)** II e III, **C)** I e II, **D)** I, III e IV.

Exercício 43 *[2009/10 - 2º Exame - MEC]*

V1. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & x \\ 1 & y & 2 & 3 \\ 1 & 2 & z & w \end{bmatrix},$$

em que x, y, z e w são números reais que se pretendem escolher por forma que o núcleo da matriz A seja gerado pelo vector $(1, 1, -1, -1)$.

Qual das seguintes é a escolha acertada para o vector (x, y, z, w)?

A) $(0, 3, 3, 0)$, **B)** $(0, 4, 3, 0)$, **C)** $(0, 4, 1, 2)$, **D)** $(0, 4, 3, 1)$.

Exercício 44 *[2010/11 - 1º Teste - MEEC]*

V1. Das quatro matrizes seguintes duas são invertíveis. Quais?

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

A) A_1 e A_4, **B)** A_2 e A_3, **C)** A_2 e A_4, **D)** A_3 e A_4.

Exercício 45 *[2010/11 - 1º Teste - MEEC]*

V1. Pretende-se calcular em função do parâmetro real α o determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1+\alpha & 1-\alpha^2 \\ -1 & 2 & 1-\alpha \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Qual é a resposta certa?

A) $1+\alpha$, **B)** $(1+\alpha)^2$, **C)** $1+\alpha^2$, **D)** $(1-\alpha)^2$.

Exercício 46 *[2010/11 - Exame - MEEC]*

V1. Determine o único valor de $a \in \mathbb{R}$ tal que a equação

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & a & -1 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

tem como conjunto de soluções uma recta em $\mathbb{R}^3$.

A) $a = 12$, **B)** $a = 8$, **C)** $a = 4$, **D)** $a = 2$.

Exercício 47 *[2010/11 - Exame - MEEC]*

V1. Sejam $b = (1, -1, 2)$ e $\mathcal{S} = \{(1, 1, 1)\} + L(\{(1, 2, 1)\})$. Qual das matrizes seguintes é a matriz dos coeficientes de um SEL escrito na forma $Au = b$ que tem $\mathcal{S}$ como conjunto de soluções?

A) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 6 & -4 & 2 \end{bmatrix}$, **B)** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix}$, **C)** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 6 & -2 & -2 \end{bmatrix}$, **D)** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -7 \\ 6 & -2 & -2 \end{bmatrix}$.

Exercício 48 *[2010/11 - Exame - MEEC]*

V1. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$. Qual é o valor do determinante $\det(A - \alpha I)$?

A) $(\alpha - 3)^3$, **B)** $-(\alpha - 1)^2(\alpha - 3)$, **C)** $(\alpha - 3)^2(\alpha - 1)$, **D)** $-(\alpha - 3)^2(\alpha - 1)$.

Espaços Lineares

Exercício 49 *[2000/1 - 1° Teste - LEC]*

V1. Sejam v_1 , v_2 , v_3 , v_4 e v_5 vectores não nulos de um espaço vectorial V e $W = L\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ o subespaço por eles gerado. Admitindo que:

(i) $v_2 \notin L\{v_1\}$, (ii) $v_3 \notin L\{v_1, v_2\}$, (iii) $2\,v_1 - 3\,v_2 + 3\,v_3 - 2\,v_4 = 0$, (iv) $v_5 \notin L\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$,

indique a dimensão de W .

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5

Exercício 50 *[2000/1 - 1° Teste - LEC]*

V1. A expressão "SEL" significa "sistema de equações lineares". Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Considere as seguintes afirmações:

I. O SEL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é possível e indeterminado para cada $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ sse A é invertível.

II. A tem característica igual a n sse o espaço gerado pelas linhas de A é $\mathbb{R}^n$.

III. A dimensão do núcleo de A é igual a zero sse as colunas de A são linearmente independentes.

IV. A é invertível sse o SEL $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem solução trivial.

A lista completa de afirmações verdadeiras é:

A) I , II e IV **B)** II e III **C)** I e IV **D)** II , III e IV

Exercício 51 *[2000/1 - 1° Teste - LEC]*

V1. Seja $\mathcal{P}_3$ o espaço linear real dos polinómios de variável real com grau menor ou igual a 3, e $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, $x \in \mathbb{R}$, um elemento genérico de $\mathcal{P}_3$. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathcal{P}_3$ e identifique os que são subespaços vectoriais de $\mathcal{P}_3$.

I O conjunto dos polinómios p com grau igual a 3 tais que $a_0 + 4a_1 - a_3 = 0$.

II O conjunto dos polinómios p com grau menor ou igual a 2 tais que $-a_0 + a_2 + 4a_3 = 1$.

III O conjunto dos polinómios p com grau menor ou igual a 3 tais que $-2a_0 + a_1 + 3a_3 = 0$.

IV O conjunto dos polinómios p com grau menor ou igual a 2 tais que $a_1 - 7a_2 + 4a_3 = 0$.

A lista completa de subespaços vectoriais é:

A) III e IV **B)** III **C)** II e III **D)** I

Exercício 52 *[2000/1 - 1° Teste - LEC]*

V1. Considere o subespaço $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ constituído pelas matrizes da forma $\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$. Uma base para o subespaço $\mathcal{S}$ é o conjunto:

A) $\left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

B) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$

C) $\left\{ \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}$

D) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$

Exercício 53 *[2000/1 - 1° Teste - LEC]*

V1. Seja $A \in \mathbb{R}^{p\times q}$ e A^T a sua transposta. Suponha que:

I O núcleo de A^T tem dimensão 3,

II Existe um vector v em $\mathbb{R}^p$ formando uma base do espaço das linhas de A^T,

III O núcleo de A tem dimensão 4.

Então os valores de p e q são :

A) $p = 5$ **e** $q = 5$ **B)** $p = 5$ **e** $q = 4$ **C)** $p = 4$ **e** $q = 4$ **D)** $p = 4$ **e** $q = 5$

Exercício 54 *[2000/1 - 1°Exame - LEC]*

V1. Seja $A \in \mathbb{R}^{p\times q}$ e A^T a sua transposta. Suponha que:

I O espaço das linhas de A^T tem dimensão 1.

II núcleo de A tem dimensão 4.

III O núcleo de A^T tem dimensão 2.

Então os valores de p e q são:

A) $p = 5$ **e** $q = 3$ **B)** $p = 2$ **e** $q = 5$ **C)** $p = 3$ **e** $q = 5$ **D)** $p = 5$ **e** $q = 4$

Exercício 55 *[2000/1 - 1°Exame - LEC]*

V1. Sejam v_1, v_2, v_3, v_4 e v_5 vectores não nulos de um espaço linear V e $W = L\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ o subespaço por eles gerado. Admitindo que:

i. $v_2 \notin L\{v_1\}$,

ii. $2v_1 - 3v_2 + 2v_3 = 0$,

iii. $v_4 \notin L\{v_1, v_2, v_3\}$,

iv. $v_5 \notin L\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, qual a dimensão de W?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 2

Exercício 56 *[2000/1 - 1º Exame - LEC]*

V1. Chama-se traço de uma matriz quadrada A, representando-se por $\operatorname{tr} A$, à soma dos elementos da diagonal principal. Uma base para o espaço linear real das matrizes de ordem 2 com traço igual a zero ($\operatorname{tr} A = 0$) é o conjunto:

A) $\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

B) $\left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

C) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$

D) $\left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \right\}$

Exercício 57 *[2000/1 - 2º Exame - LEC]*

V1. Seja A uma matriz real $n \times n$ invertível e B uma matriz real $n \times n$ arbitrária. Considere as seguintes afirmações e indique qual delas é falsa para quaisquer matrizes A, B nas condições indicadas:

A) AB é invertível sse $\operatorname{car} B = n$.

B) O núcleo de B é o conjunto $\{\mathbf{0}\}$ sse $\frac{\det B}{\det A} \neq 0$.

C) $\det(AB) \neq 0$ sse o núcleo de B é constituído pelo vector zero.

D) As colunas de B são linearmente dependentes sse a matriz B é invertível.

Exercício 58 *[2000/1 - 2º Exame - LEC]*

V1. Seja A uma matriz 3×4 cujo núcleo admite uma base formada pelo vector $(2, 0, 0, 6)$. Considere a seguinte lista de afirmações :

I. $\dim(\text{Espaço das linhas de } A) = 3$

II. $\dim(\text{Núcleo de } A) = 1$

III. $\dim\left(\text{Núcleo de } A^T\right) = 2$

IV. $\dim\left(\text{Espaço das colunas de } A^T\right) = 2$

Indique todas as conclusões que pode inferir.

A) I , III e IV **B)** I e II **C)** II e IV **D)** I e III

Exercício 59 *[2005/6 - 1° Teste - LEEC]*

V1. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} , \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} , \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} .$$

Considere o subespaço $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^{3\times 3}$ formado por todas as matrizes M tais que

$$M = M^t \quad \text{e} \quad PM = (PM)^t \quad \text{com } P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Qual das matrizes não pertence ao subespaço $\mathcal{S}$?

A) A **B)** B **C)** C **D)** D

Exercício 60 *[2005/6 - 1° Teste - LEEC]*

V1. Sejam $A \in \mathbb{R}^{p\times q}$ e A^t a sua transposta. Suponha que:

(i) $p > q$, (ii) $\dim L_A = 3$, (iii) $N_A = \{0\}$, (iv) $\dim N_{A^t} = 2$.

(L_A e N_A representam o espaço gerado pelas linhas de A e o núcleo (ou espaço nulo) de A, repectivamente).

Então os valores de p e q são :

A) $p = 6$ **e** $q = 5$ **B)** $p = 5$ **e** $q = 4$ **C)** $p = 5$ **e** $q = 3$ **D)** $p = 4$ **e** $q = 3$

Exercício 61 *[2005/6 - 1° Exame - LEEC]*

V2. Sejam v_1 , v_2 , v_3 , v_4 e v_5 vectores não nulos de um espaço linear V e $W = L\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ o subespaço por eles gerado. Admitindo que:

i. $v_1 + 2\,v_2 = 0$,

ii. $v_3 \notin L\{v_1, v_2\}$,

iii. $v_1 + v_2 - 2\,v_3 - 2\,v_4 = 0$,

iv. $v_5 \notin L\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$,

qual a dimensão de W ?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5

Exercício 62 *[2005/6 - 1° Exame - LEEC]*

V1. Considere o subespaço $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ constituído pelas matrizes de forma $\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Uma base do subespaço $\mathcal{S}$ é o conjunto:

A) $\left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

B) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$

C) $\left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

D) $\left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \right\}$

Exercício 63 *[2005/6 - 1º Exame - LEEC]*

V1. Dado um sistema de equações lineares escrito na forma $Au = b$, em que se supõe que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ não é invertível e $b \in \mathbb{R}^n$, seja B a matriz aumentada do sistema de equações, $B = [\,A \vdots b\,]$. Considere as seguintes afirmações:

I. O sistema $Au = b$ é impossível ou indeterminado, dependendo de $b \in \mathbb{R}^n$.

II. $\operatorname{car} A < n$.

III. $\operatorname{car} A < \operatorname{car} B$ para qualquer $b \in \mathbb{R}^n$.

IV. Existe $b \in \mathbb{R}^n$ tal que $Au = b$ tem uma única solução.

A lista completa de afirmações verdadeiras é

A) I e II **B)** I, II e III **C)** IV **D)** II e IV

Exercício 64 *[2005/6 - 2º Exame - LEEC]*

V1. Considere o subespaço de $\mathbb{R}^3$:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\}$$

Uma base de S é o conjunto:

A) {(3,0,1), (0,3,2)} **B)** {(3,0,-1), (0,3,2)} **C)** {(3,0,-1), (0,3,-2)} **D)** {(3,0,1), (0,-3,2)}

Exercício 65 *[2005/6 - 2º Exame - LEEC]*

V1. Sejam S e U os subespaços de $\mathbb{R}^3$ definidos como se segue:

$$S = L(\{(1, 2, 3), (-3, 7, 1), (19, 10, -13)\}), \quad U = L(\{(1, -11, -7), (4, -5, 2)\}).$$

Designando por a, b as dimensões de $S \cap U$ e $S + U$, respectivamente, indique qual o valor do par (a, b):

A) (1,3) **B)** (1,4) **C)** (2,2) **D)** (2,3)

Exercício 66 *[2006/7 - 1º Teste - LEC/MEC]*

V1. Considere o subespaço $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^{3\times 3}$ formado por todas as matrizes que são triangulares superiores e que têm traço nulo.

Qual a dimensão de $\mathcal{S}$?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6

NOTA: o *traço* de uma matriz quadrada é a soma dos elementos da diagonal principal.

Exercício 67 *[2006/7 - 1° Teste - LEC/MEC]*

V1. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ e considere as seguintes afirmações:

I. As linhas de A formam um conjunto linearmente independente em $\mathbb{R}^3$;

II. As colunas de A formam um conjunto linearmente independente em $\mathbb{R}^3$;

III. A característica de A é igual a 3;

IV. O sistema de equações lineares $Au = b$ tem uma única solução, qualquer que seja $b \in \mathbb{R}^3$.

Qual é a lista completa de afirmações verdadeiras?

A) I e II **B)** I, II e III **C)** III **D)** Todas

Exercício 68 *[2006/7 - 1° Teste - LEC/MEC]*

V1. Sejam S e U os subespaços de $\mathbb{R}^3$ definidos como se segue:

$$S = L(\{(1,2,4), (-3,7,1), (-1,11,9)\}), \quad U = L(\{(4,-5,3), (1,1,1)\}).$$

Designando por a e b as dimensões de $S \cap U$ e $S + U$, respectivamente, indique qual o valor do par (a, b):

A) (1,3) **B)** (1,4) **C)** (2,2) **D)** (2,3)

Exercício 69 *[2006/7 - 1° Exame - LEC/MEC]*

V1. Considere os seguintes vectores de $\mathbb{R}^3$: $v_1 = (1,2,1)$, $v_2 = (1,2,3)$ e $v_3 = (1,2,2)$.
Qual dos vectores a seguir indicados não pertence ao subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por $\{v_1, v_2, v_3\}$?

A) (0,0,0) **B)** (0,0,1) **C)** (1,2,5) **D)** (0,1,0)

Exercício 70 *[2006/7 - 1° Exame - LEC/MEC]*

V1. Seja $\mathcal{P}_2$ o espaço real dos polinómios definidos em $\mathbb{R}$ de grau menor ou igual a 2, considere os elementos de $\mathcal{P}_2$ definidos por:

$$p_1(t) = 1, \quad p_2(t) = (1-t)(1+t), \quad p_3(t) = (1-t)(1+2t), \quad p_4(t) = t(1-t), \quad t \in \mathbb{R},$$

e os seguintes subconjuntos de $\mathcal{P}_2$:

$$P_1 = \{p_1, p_2\}, \quad P_2 = \{p_1, p_2, p_3\}, \quad P_3 = \{p_2, p_3, p_4\}, \quad P_4 = \{p_1, p_2, p_4\}.$$

Qual a lista completa de conjuntos que constituem bases de $\mathcal{P}_2$?

A) P_1 e P_2 **B)** P_2 e P_3 **C)** P_2 e P_4 **D)** P_3 e P_4

Exercício 71 *[2006/7 - 1° Exame - LEC/MEC]*

V1. Seja $v = (4, -4, 8)$ e considere a base ordenada $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathcal{B} = ((1, 0, 1), (0, 2, 1), (1, 0, 3)) .$$

Qual dos seguintes é o vector das componentes (ou coordenadas) de v na base $\mathcal{B}$?

A) (1,2,3) **B)** (1,-2,3) **C)** (-1,2,3) **D)** (1,-2,-3)

Exercício 72 *[2006/7 - 2° Exame - LEC/MEC]*

V1. Para $\lambda \in \mathbb{R}$ seja $A_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ \lambda^2 & \lambda & 1 \end{bmatrix}$. Designe por Λ o conjunto de todos os valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que o vector $(2, 4, 3)$ pertence ao espaço das colunas de A_λ. Então Λ é o conjunto

A) $\mathbb{R}$ **B)** $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ **C)** $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ **D)** $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

Exercício 73 *[2006/7 - 2° Exame - LEC/MEC]*

V1. Seja $\mathcal{S}$ o subespaço de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ gerado pelas matrizes $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, e seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Considere as seguintes afirmações:

I. $\mathcal{S}$ tem dimensão 2, II. $\mathcal{S}$ tem dimensão 3, III. $A \in \mathcal{S}$, IV. $A \notin \mathcal{S}$.

Quais as afirmações verdadeiras?

A) I e III **B)** I e IV **C)** II e III **D)** II e IV

Exercício 74 *[2007/8 - 1° Teste - MEC]*

V1. Seja S o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos quatro vectores seguintes:

$$v_1 = (1, 0, -1, 0), \quad v_2 = (0, 1, 0, -1), \quad v_3 = (1, 0, -2, -1), \quad v_4 = (0, 1, 1, 0).$$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A) $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y - z - w = 0\}$, **B)** $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z - w = 0\}$,

C) $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y - z - w = 0\}$, **D)** $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z - w = 0\}$.

Exercício 75 *[2007/8 - 1° Teste - MEC]*

V1. Seja $v = (1, 2, 3)$ e considere em $\mathbb{R}^3$ a base ordenada $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$, em que

$$v_1 = (1, 0, 1), \quad v_2 = (1, 1, 0), \quad v_3 = (1, 1, 1).$$

Qual dos seguintes é o vector das componentes (ou coordenadas) de v na base $\mathcal{B}$?

A) (3,-2,4), **B)** (-1,4,4), **C)** (-1,-2,4), **D)** (-1,-2,6).

Exercício 76 *[2007/8 - 1° Teste - MEC]*

V1. Seja $\mathcal{P}_2$ o espaço linear real dos polinómios definidos em $\mathbb{R}$ de grau menor ou igual a 2, considere os elementos de $\mathcal{P}_2$ definidos como se segue:

$$p_1(t) = 1 - t,\ \ p_2(t) = 1 + t,\ \ p_3(t) = 1 - t^2,\ \ p_4(t) = 1 + t^2,\quad t \in \mathbb{R},$$

e as seguintes afirmações:
I - $\{p_1, p_2, p_4\}$ é linearmente independente,
II - $\{p_1, p_2, p_3\}$ é linearmente dependente,
III - $\{p_1, p_2, p_3\}$ é uma base de $\mathcal{P}_2$,
IV - $\{p_1, p_2, p_4\}$ gera $\mathcal{P}_2$
Qual é a lista completa de afirmações verdadeiras?

A) I e IV, **B)** III e IV, **C)** I, III e IV, **D)** II, III e IV.

Exercício 77 *[2007/8 - 1° Exame - MEC]*

V1. Sejam $n \in \mathbb{N}$, P uma matriz de permutação de ordem n, I a matriz identidade de ordem n e considere os seguintes conjuntos:

$$\begin{array}{ll} S_1 = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : PA = I\}, & S_2 = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : PA = A + A^t\}, \\ S_3 = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : PA = (\det A)P\}, & S_4 = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : PA = A^t P\}, \end{array}$$

em que A^t representa a transposta de A.
Qual é a lista completa dos que são subespaços de $\mathbb{R}^{n\times n}$?

A) S_1 e S_3, **B)** S_2 e S_4, **C)** S_1, S_2 e S_4, **D)** S_1, S_3 e S_4.

Exercício 78 *[2007/8 - 1° Exame - MEC]*

V1.
Seja $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & \alpha(\alpha-2) \\ -1 & -\alpha & 2\alpha - 1 \end{bmatrix}$ e considere as seguintes afirmações:
I. Existe um valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\dim N_{A_\alpha} = 0$,
II. Existe um valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\dim N_{A_\alpha} = 1$,
III. Existe um valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\dim N_{A_\alpha} = 2$,
IV. Para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, $\dim N_{A_\alpha} \in \{0, 1\}$.
Qual é a lista completa de afirmações verdadeiras?

A) I e III, **B)** I e IV, **C)** I , II e III, **D)** I , II e IV.

Exercício 79 *[2007/8 - 1° Exame - MEC]*

V1. Seja A uma matriz quadrada de ordem $n \in \mathbb{N}$ e considere as seguintes afirmações:
I. $\dim N_A = \dim N_{A^t}$, II. $\dim C_A = \dim L_A$, III. $\dim N_A + \dim L_A = n$, IV. $\dim N_{A^t} + \dim L_A = n$, em A^t representa a transposta de A, L_A e C_A representam o espaço das linhas e das colunas de A, respectivamente, e N_X representa o núcleo (ou espaço nulo) da matriz X.
Qual é a lista completa de afirmações verdadeiras?

A) II e III, **B)** I e IV, **C)** II , III e IV, **D)** Todas.

Exercício 80 *[2007/8 - 2º Exame - MEC]*

V1. Considere em $\mathbb{R}^3$ a base ordenada $((1,0,-1),(1,1,0),(1,1,1))$.
Qual é o vector das componentes de $x=(1,2,3)$ nesta base?

A) (-1,0,2), **B)** (-1,2,2), **C)** (1,-2,2), **D)** (1,0,-2).

Exercício 81 *[2007/8 - 2º Exame - MEC]*

V1. Sejam $\mathcal{P}$ o espaço linear real dos polinómios definidos em $\mathbb{R}$, $\mathcal{S}$ o subespaço de $\mathcal{P}$ gerado pelos polinómios seguintes:

$$p_1(t)=1+t-t^2, \quad p_2(t)=1+2t-2t^2+t^3, \quad p_3(t)=1-t+t^2+t^3$$

e seja $q(t)=1-2t+2t^2+3t^3$, $t\in\mathbb{R}$. Considere as seguintes afirmações:

I. $\mathcal{S}$ tem dimensão 2, II. $\mathcal{S}$ tem dimensão 3, III. $q\in\mathcal{S}$, IV. $q\notin\mathcal{S}$.

Quais as afirmações verdadeiras?

A) I e III **B)** I e IV **C)** II e III **D)** II e IV

Exercício 82 *[2008/9 - 1º Teste - LEIC]*

V1. Qual das matrizes seguintes é tal que o conjunto das suas linhas é linearmente independente em $\mathbb{R}^3$?

A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$, **B)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, **C)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, **D)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$.

Exercício 83 *[2008/9 - 1º Teste - LEIC]*

V1. Qual das seguintes é uma equação cartesiana do plano de $\mathbb{R}^3$ gerado pelo conjunto $\{(1,1,2),(2,1,3)\}$?

A) $x+y-z=0$, **B)** $x-y+z=0$, **C)** $x-y-z=0$, **D)** $7x+5y-z=0$.

Exercício 84 *[2008/9 - 1º Teste - LEIC]*

V1. Sejam

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Qual é a dimensão do subespaço de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ gerado pelo conjunto $\{A,B,A^2,B^2\}$?

A) 1, **B)** 2, **C)** 3, **D)** 4.

Exercício 85 *[2008/9 - 1° Exame - LEIC]*

V1. Seja $\mathcal{S}$ o subespaço das matrizes reais de ordem 2 gerado por $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Qual das matrizes seguintes **não pertence** a $\mathcal{S}$?

A) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, **B)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, **C)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, **D)** $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Exercício 86 *[2008/9 - 1° Exame - LEIC]*

V1. Qual é a dimensão do subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vectores

$$(1,1,2,1), \quad (1,-1,2,1), \quad (3,1,6,1), \quad (7,-1,14,-1)?$$

A) 1, **B)** 2, **C)** 3, **D)** 4.

Exercício 87 *[2008/9 - 1° Exame - LEIC]*

V1. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $A_a = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & a+3 \end{bmatrix}$.

Pretende-se escolher o valor do parâmetro a por forma que o conjunto das soluções da equação $A_a u = 0$ seja um plano (de dimensão 2) em $\mathbb{R}^4$. Qual é a escolha certa?

A) -2, **B)** 1, **C)** 0, **D)**- 1.

Exercício 88 *[2008/9 - 2° Exame - LEIC]*

V1. Qual das seguintes matrizes A é tal que $C_A = \mathbb{R}^3$? (C_A representa o espaço das colunas de A)

A) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, **B)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 4 \end{bmatrix}$, **C)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, **D)** $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$.

Exercício 89 *[2008/9 - 2° Exame - LEIC]*

V1. Considere em $\mathbb{R}^3$ os vectores $v_1 = (1,1,-1)$, $v_2 = (1,0,1)$ e $v_3 = (0,0,1)$. Seja S o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores $v_1 + v_2$, $v_2 + v_3$ e $v_1 + 3v_2 + 2v_3$. Qual dos seguintes conjuntos é uma base de S?

A) $\{(1,0,2),(3,1,2)\}$, **B)** $\{(1,0,2),(3,2,2)\}$,
C) $\{(1,0,2),(3,1,2),(2,1,0)\}$, **D)** $\{(1,0,2),(3,2,2),(4,1,4)\}$.

Exercício 90 *[2009/10 - 1° Teste - MEC]*

V1. Considere novamente a matriz A_λ (com $\lambda \in \mathbb{R}$) definida no problema 37. Qual das seguintes afirmações é verdadeira? (L_{A_λ} representa o espaço das linhas da matriz A_λ)

A) Se $\lambda \in \mathbb{R}$, então $\dim L_{A_\lambda} = 3$;
B) Se $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, então $\dim L_{A_\lambda} = 3$;
C) Se $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, então $\dim L_{A_\lambda} = 3$;
D) Se $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, então $\dim L_{A_\lambda} = 3$.

Exercício 91 *[2009/10 - 1° Teste - MEC]*

V1. Considere em $\mathbb{R}^3$ os vectores

$$v_1 = (1, 2, 1), \quad v_2 = (1, 4, 2), \quad v_3 = (2, 4, 2), \quad v_4 = (2, 6, 3),$$

e os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$

$$S_1 = \{v_1, v_2, v_3\}, \quad S_2 = \{v_2, v_3, v_4\}, \quad S_3 = \{v_1, v_2, v_4\}$$

Qual é a afimação verdadeira?
A) S_1 e S_2 são linearmente independentes;
B) S_1 e S_3 são linearmente independentes;
C) S_1 é linearmente independente e S_3 é linearmente dependente;
D) S_2 e S_3 são linearmente dependentes.

Exercício 92 *[2009/10 - 1° Teste - MEC]*

V1. Seja $\mathbb{R}^{2\times 2}$ o espaço das matrizes reais com duas linhas e duas colunas. Considere em $\mathbb{R}^{2\times 2}$ a base ordenada seguinte:

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right).$$

Qual dos seguintes vectores de $\mathbb{R}^4$ é o vector das componentes da matriz $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$ na base $\mathcal{B}$?
A) $(1, 2, 0, -1)$, **B)** $(1, 2, 1, 0)$, **C)** $(1, 1, -2, 0)$, **D)** $(1, 0, 1, -2)$.

Exercício 93 *[2009/10 - 1° Exame - MEC]*

V1. Sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 & -5 \end{bmatrix},$$

dos seguintes pares de vectores $(x, y) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^3$ pretende-se identificar o único que satisfaz as condições $x \in N_A$ e $y \in C_A$. Qual é?
(Aqui N_A e C_A representam, respectivamente, o núcleo e o espaço das colunas de A).

A) $((1, 1, 1, 1), (4, 5, 9))$,
B) $((-2, 1, -2, 1), (4, 5, 7))$,
C) $((1, 0, 1, 0), (1, 2, 1))$,
D) $((0, 1, 0, -1), (4, 5, 9))$.

Exercício 94 *[2009/10 - 1° Exame - MEC]*

V1. Qual é a dimensão do subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vectores

$$(1, 1, 2, 1), \quad (1, -1, 2, 1), \quad (3, 1, 6, 1), \quad (7, -1, 14, -1)?$$

A) 1, **B)** 2, **C)** 3, **D)** 4.

Exercício 95 *[2009/10 - 1º Exame - MEC]*

V1. Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ com $m > n > 1$ e considere as seguintes afirmações:
I. $\dim N_{A^t} > \dim N_A$,
II. $\dim N_{A^t} < \dim N_A$,
III. $\dim C_A > \dim C_{A^t}$,
IV. $\dim L_A > \dim L_{A^t}$.
(Aqui N_A, L_A e C_A representam, respectivamente, o núcleo, o espaço das linhas e o espaço das colunas de A; A^t é a transposta de A).
Qual é a lista completa de afirmações verdadeiras?

A) I, **B)** II, **C)** I e III, **D)** II e IV.

Exercício 96 *[2009/10 - 2º Exame - MEC]*

V1. Seja S o subespaço de $\mathcal{P}_3$ gerado pelos quatro polinómios seguintes:

$$P_1(t) = (1-t)^2, \quad P_2(t) = t(1-t)^2, \quad P_3(t) = (1-t)(1-t^2), \quad P_4(t) = (1-t)^3, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Qual é a dimensão do subespaço S?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4.

Exercício 97 *[2010/11 - 2º Teste - MEEC]*

V1. Considere o subconjunto S de $\mathbb{R}^3$ formado pelos seguintes 5 vectores:

$$s_1 = (1,2,0), \quad s_2 = (1,3,1), \quad s_3 = (1,1,-1), \quad s_4 = (1,2,1,), \quad s_5 = (1,0,-2).$$

Qual dos seguintes subconjuntos de S é uma base de $\mathbb{R}^3$?

A) $\{s_1, s_2, s_3\}$, **B)** $\{s_1, s_2, s_4\}$, **C)** $\{s_1, s_3, s_5\}$, **D)** $\{s_2, s_3, s_5\}$.

Exercício 98 *[2010/11 - 2º Teste - MEEC]*

V1. Considere em $\mathbb{R}^3$ a base ordenada $\mathcal{B} = ((1,1,2),(0,1,2),(-2,-1,-1))$. Sabendo que $x \in \mathbb{R}^3$ tem $(1,2,3)$ como vector das componentes na base $\mathcal{B}$, qual é o vector das componentes de x na base canónica?

A) $(-1,2,-1)$, **B)** $(3,2,-1)$, **C)** $(-1,-2,-1)$, **D)** $(-5,0,3)$.

Exercício 99 *[2010/11 - Exame - MEEC]*

V1. Qual das matrizes seguintes é tal que as suas colunas constituem uma base de $\mathbb{R}^3$?

$$\textbf{A)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 6 & -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \textbf{B)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \textbf{C)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \textbf{D)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Exercício 100 *[2010/11 - Exame - MEEC]*

V1. Qual é a dimensão do subespaço de $\mathbb{R}^{3\times 3}$ formado por todas as matrizes simétricas que têm traço nulo?
(O traço de uma matriz quadrada é a soma dos elementos da diagonal principal.)

A) 3, **B)** 7, **C)** 4, **D)** 5.

Exercício 101 *[2000/1 - 1°Exame - LEC]*

V1. Seja $\mathcal{P}_3$ o espaço linear real dos polinómios de variável real com grau menor ou igual a 3, e considere as seguintes funções definidas e com valores em $\mathcal{P}_3$.

I. $T : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ tal que $T\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3\right) = -a_0 - a_2 x^2$.

II. $T : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ tal que $T\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3\right) = a_0 + a_1(x-1) + 2a_2(x-1)^2 + 3a_3(x-1)^3$.

III. $T : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ tal que $T\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3\right) = a_1 x + a_0\, a_1 + a_2 + a_2 x^2$.

IV. $T : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ tal que $T\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3\right) = a_0^2 - 4a_1^2 x + \frac{2}{3}a_2^2 x^2 - a_3^2 x^3$.

Enumere a lista completa das que são transformações lineares.

A) I e III **B)** I e II **C)** II e IV **D)** III

Exercício 102 *[2000/1 - 1°Exame - LEC]*

V1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ que representa uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ em relação à base $\{w_1, w_2\}$, onde $w_1 = (-1, 0)$ e $w_2 = (-4, 2)$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A) $T(4, -2) = (16, -8)$

B) $T(-1, 0) = (-8, 4)$

C) $T(-1, 0) = (-16, 6)$

D) $T(4, -2) = (8, -4)$

Exercício 103 *[2000/1 - 1°Exame - LEC]*

V1. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (7z,\, x + 3y,)$. Então a afirmação correcta é:

A) O vector $(0, 0)$ pertence ao núcleo de T e o vector $(-1, 1)$ pertence à imagem de T.

B) O vector $(3, 0)$ pertence ao núcleo de T e o vector $(0, 1, 1)$ pertence à imagem de T.

C) O vector $(-3, 1, 0)$ pertence ao núcleo de T e o vector $(1, -1)$ pertence à imagem de T.

D) O vector $(6, -2, 0)$ não pertence ao núcleo de T e o vector $(-1, 1)$ pertence à imagem de T.

Exercício 104 *[2000/1 - 2º Exame - LEC]*

V1. Considere os vectores $v_1 = (1, -2)$, $v_2 = (-2, 2)$, $w_1 = (2, 1)$ e $w_2 = (-1, -2)$. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma aplicação linear tal que $T(v_1) = w_1$ e $T(v_2) = w_2$. Considerando a mesma base à partida e à chegada, indique qual das matrizes seguintes representa a transformação linear T em relação à base $\{v_1, v_2\}$.

A) $\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -\frac{5}{2} & 3 \end{bmatrix}$ **B)** $\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -\frac{5}{2} & 2 \end{bmatrix}$ **C)** $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -\frac{5}{2} & 2 \end{bmatrix}$ **D)** $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -\frac{5}{2} & 2 \end{bmatrix}$

Exercício 105 *[2000/1 - 2º Exame - LEC]*

V1. Suponha que a matriz $A = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ representa uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ em relação à base $\{w_1, w_2\}$, onde $w_1 = (-4, 1)$ e $w_2 = (4, 1)$. Então a afirmação correcta é:

A) $T(-8, -2) = (0, 16)$

B) $T(8, 2) = (0, 8)$

C) $T(-8, -2) = (0, -16)$

D) $T(8, 2) = (-36, -1)$

Exercício 106 *[2005/6 - 2º Teste/1º Exame - LEEC]*

V1. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y) = (x + 3y, 2x, x - y)$. Então a afirmação correcta é :

A) O vector $(1, 0, 0)$ pertence ao núcleo de T e o vector $(4, 2, 0)$ pertence à imagem de T.

B) O vector $(0, 0, 0)$ pertence ao núcleo de T e o vector $(1, -1)$ pertence à imagem de T.

C) O vector $(0, 0)$ pertence ao núcleo de T e o vector $(1, 2, 0)$ pertence à imagem de T.

D) O vector $(0, 0)$ pertence ao núcleo de T e o vector $(-1, 4, 3)$ pertence à imagem de T.

Exercício 107 *[2005/6 - 2º Teste/1º Exame - LEEC]*

V1. Considere em $\mathbb{R}^3$ a base ordenada $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$, em que:

$$v_1 = (-2, 1, 1) , \quad v_2 = (-3, 0, -1) , \quad v_3 = (1, 1, 0) .$$

Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear cuja representação matricial em relação à base $\mathcal{B}$ é a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} .$$

Um conjunto gerador da imagem ou contradomínio de T é:

A) $\{(-7, 8, -3), (6, 12, 18)\}$

B) $\{(-7, 8, -3), (-1, 20, 15)\}$

C) $\{(-7, 8, -3), (-11, 10, -3)\}$

D) $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

Exercício 108 *[2005/6 - 2º Exame - LEEC]*

V1. Considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ definida como se segue: sendo $p \in \mathcal{P}_2$ com $p(t) = p_0 + p_1\, t + p_2\, t^2$ então

$$T(p) = (p_0 + 2p_1 + 3p_2, -p_0 + 2p_1 + p_2, 2p_0 + 2p_2) \ ,$$

e as seguintes afirmações:

I. $\dim N(T) = 1$, II. T é injectiva , III. $\dim I(T) = 2$, IV. T não é invertível ,

em que $N(T)$ e $I(T)$ representam o núcleo e a imagem de T, respectivamente.

Qual é a lista completa de afirmações verdadeiras?

A) I **B)** I e III **C)** I,III e IV **D)** II e III

Exercício 109 *[2006/7 - 2º Teste/1º Exame - LEC/MEC]*

V1. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(x, y, z) = (x + 2y + z, x + 3y + 2z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

e considere as seguintes afirmações:

I. T é injectiva,
II. T não é sobrejectiva,
III. T não é injectiva e $(1, -1, 1) \in N(T)$,
IV. T é sobrejectiva e $(1, -1, 1) \in N(T)$,

onde $N(T)$ representa o núcleo de T.

Qual é a lista completa de afirmações verdadeiras?

A) I **B)** I e II **C)** II e III **D)** III e IV

Exercício 110 *[2006/7 - 2º Teste/1º Exame - LEC/MEC]*

V1. Em $\mathbb{R}^3$ considere a base ordenada $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (1, -1, 0), (1, 1, 1))$ e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear que é representada nesta base pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Qual é a imagem do vector $(-1, 0, 1)$ pela transformação T?

A) (0,0,0) **B)** (0,1,1) **C)** (1,0,1) **D)** (1,2,3)

Exercício 111 *[2006/7 - 2º Exame - LEC/MEC]*

V1. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x, y, z) = (x + y, x + y + z),$$

e as seguintes afirmações:

I. T é injectiva,

II. T é sobrejectiva,
III. Existe um vector $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ para o qual a equação $T(x,y,z) = (a,b)$ é impossível,
IV. Para qualquer vector $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ a equação $T(x,y,z) = (a,b)$ é possível e indeterminada.

Qual é a lista completa de afirmações falsas?

A) I **B)** I e II **C)** I e III **D)** II e IV

Exercício 112 *[2006/7 - 2º Exame - LEC/MEC]*

V1. Considere a base ordenada de $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ com $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,-1,0)$, $v_3 = (1,0,0)$. seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear que na base $\mathcal{B}$ é representada pela matriz diagonal

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Então a expressão correcta é:

A) $T(x,y,z) = (-2x - y + 4z, y + 2z, z)$ **B)** $T(x,y,z) = (-2x - y + 4z, -y + 2z, z)$
C) $T(x,y,z) = (-2x + y + 4z, y + 2z, x + z)$ **D)** $T(x,y,z) = (x, -y, -2z)$

Exercício 113 *[2007/8 - 2º Teste/1º Exame - MEC]*

V1. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ definida por

$$T(a,b,c) = \begin{bmatrix} a+c & a-b \\ b-c & a-c \end{bmatrix}, \quad (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,$$

e as seguintes afirmações:
I. $\dim \mathcal{N}(T) = 1$, II. T é injectiva, III. T é sobrejectiva, IV. T é invertível,
onde $\mathcal{N}(T)$ representa o núcleo (ou espaço nulo) de T.
Qual é a lista completa de afirmações *falsas*?

A) I, **B)** I e III, **C)** I e IV, **D)** II, III e IV.

Exercício 114 *[2007/8 - 2º Exame - MEC]*

V1. Sejam $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ as transformações lineares definidas por

$$S(x,y,z) = (x+y, y-z), \ \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad T(u,v) = (u+v, u-v), \ \ (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Qual das seguintes matrizes representa a transformação composta $TS = T \circ S$ nas bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$?

A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, **B)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, **C)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, **D)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Exercício 115 *[2007/8 - 2º Exame - MEC]*

V1. Seja α um número real considere a transformação linear dependente do parâmetro α, $T_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T_\alpha(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y + 2z, x + \alpha y + \alpha^2 z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Qual é o conjunto de todos os valores de α para os quais T_α não é bijectiva?

A) {1}, **B)** {-1,1}, **C)** {0,1}, **D)** {-1,0,1}.

Exercício 116 *[2008/9 - 2º Teste/1º Exame -LEIC]*

V1. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação definida por

$$T(x, y, z) = (2x + y, 2y + z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Representando por $N(T)$ e $I(T)$ o núcleo e a imagem (ou contradomínio) de T, respectivamente, qual é a afirmação **falsa**?

A) $(1, -2, 4) \in N(T)$ e $(3, 3) \in I(T)$, **B)** $(1, -2, 4) \in N(T)$ e $I(T) = \mathbb{R}^2$,
C) $(1, 2, -4) \in N(T)$ e T é sobrejectiva, **D)** T não é injectiva e $(0, 0) \in I(T)$.

Exercício 117 *[2008/9 - 2º Teste/1º Exame -LEIC]*

V1. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear que é representada em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ pela matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & 1 & 2 \\ \beta & \gamma & 1 \end{bmatrix}.$$

Pretende-se determinar o terno (α, β, γ) por forma que a representação matricial S de T em relação à base ordenada $\mathcal{B} = \big((1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\big)$ seja simétrica (i.e. $S^t = S$).

Qual é a escolha certa para o terno (α, β, γ)?

A) $(1, 8, 12)$, **B)** $(8, 12, 1)$, **C)** $(1, 12, 8)$, **D)** $(2, 3, 2)$.

Exercício 118 *[2008/9 - 2º Exame -LEIC]*

V1. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definida como se segue: sendo $v = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$,

$$Tv = (x - y + z - w, x + y - z - w, x + y + z - w, x + y + z + w).$$

Qual é a afirmação verdadeira?

A) T é invertível, **B)** T é injectiva mas não sobrejectiva,
C) T é sobrejectiva mas não injectiva, **D)** T não é injectiva.

Exercício 119 *[2008/9 - 2º Exame -LEIC]*

V1. Considere a trnsformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (x + z, 6x - 2y - 7z, -2x + y + 4z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Qual das seguintes é a base <u>ordenada</u> de $\mathbb{R}^3$ relativamente à qual T é representada pela matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}?$$

A) $((1, 0, 0), (1, -1, 1), (0, 0, 1))$, **B)** $((1, 0, 1), (2, -1, 2), (1, 2, 0))$,
C) $((1, 0, 1), (1, -1, 1), (1, 2, 0))$, **D)** $((1, 0, 1), (1, -1, 1), (1, 2, -1))$.

Exercício 120 *[2009/10 - 1º Exame - MEC]*

V1. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que é representada em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ pela matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A) T é bijectiva;
B) T é sobrejectiva, mas não injectiva;
C) T é injectiva, mas não sobrejectiva;
D) T não é injectiva nem sobrejectiva.

Exercício 121 *[2009/10 - 2º Exame - MEC]*

V1. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que é representada em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ pela matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Qual das expressões seguintes é valida para todo o vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$?

A) $T(x, y, z) = (x + y + 2z, 3x + y + z, x + 3y + 7z)$,
B) $T(x, y, z) = (x + y + 2z, x + 3y + z, 3x + y + 7z)$,
C) $T(x, y, z) = (z + 3y + x, 3z + y + x, 7z + y + 2x)$,
D) $T(x, y, z) = (z + 3y + x, z + y + 3x, 7z + y + 2x)$.

Exercício 122 *[2009/10 - 2º Exame - MEC]*

V1. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (x + y + 2z, x + 2y + 3z, 2x + 3y + 5z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Representando por $N(T)$ e $I(T)$ o núcleo de T e a imagem (ou contradomínio) de T, respectivamente, qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A) $(1, 1, -1) \in N(T)$ e $(0, 1, 2) \in I(T)$, **B)** $(1, 1, -1) \in N(T)$ e $(1, 5, 6) \in I(T)$,
C) $(1, 1, -1) \in N(T)$ e $(1, 5, 5) \in I(T)$, **D)** $(1, -1, -1) \in N(T)$ e $(1, 5, 5) \in I(T)$.

Exercício 123 *[2010/11 - 2º Teste - MEEC]*

V1. Seja $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que:

$$T(1,0,0) = (1,2); \quad T(1,1,0) = (2,4); \quad T(1,1,1) = (3,4).$$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A) T é injectiva e sobrejectiva; **B)** T é invertível mas não sobrejectiva;
C) T não é injectiva mas é sobrejectiva; **D)** T não é injectiva nem sobrejectiva.

Espaços Euclideanos

Exercício 124 *[2000/1 - 1° Exame - LEC]*

V1. Qual a distância em $\mathbb{R}^3$ entre o ponto $P = (-3,\ 0,\ 1\,)$ e a recta definida pelo sistema de equações

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_2 & = & 0 \\ x_3 & = & 0 \end{array} \right. \quad ?$$

A) $\sqrt{3}$ **B)** $\sqrt{2}$ **C)** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **D)** 1

Exercício 125 *[2000/1 - 2° Exame - LEC]*

V1. Qual dos seguintes conjuntos constitui uma base ortogonal para o subespaço de $\mathbb{R}^3$ que é ortogonal à recta de equação cartesiana

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 - x_2 & = & 0 \\ x_1 - x_3 & = & 0 \end{array} \right. \quad ?$$

A) $\{(1,1,0),(1,-1,0)\}$

B) $\{(1,-1,0),(1,1,-2)\}$

C) $\{(1,1,1),(1,1,-2)\}$

D) $\{(1,1,0),(2,-2,1)\}$

Exercício 126 *[2000/1 - 2° Exame - LEC]*

V1. Sejam $\mathbf{u} = (u_1,u_2,u_3)$ e $\mathbf{v} = (v_1,v_2,v_3)$. Enumere a lista completa das funções que definem um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

I. $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \sqrt{2}u_1v_1 + \frac{2}{5}u_2v_2 + 7u_3v_3$

II. $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_3^2v_3^2$

III. $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = 2u_1v_1 + 4u_3v_3$

IV. $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = u_1v_1 - u_2v_2 + u_3v_3$

A) I e III **B)** IV **C)** I **D)** II

Exercício 127 *[2000/1 - 2° Exame - LEC]*

V1. Qual a distância em $\mathbb{R}^3$ entre o ponto $P = (-2,\ 0,\ 0\,)$ e a recta definida pelo sistema de equações

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3\,x_1 + 3\,x_2 - x_3 & = & 0 \\ -3\,x_2 & = & 0 \end{array} \right. \quad ?$$

A) $3\sqrt{\frac{2}{5}}$ **B)** $\frac{3}{\sqrt{5}}$ **C)** 2 **D)** $\sqrt{\frac{21}{5}}$

Exercício 128 *[2005/6 - 2º Teste/1º Exame - LEEC]*

V1. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Considerando em $\mathbb{R}^4$ o produto interno usual, qual dos seguintes conjuntos constitui uma base ortogonal de C_A, o espaço das colunas de A?

A) $\{(1,-1,1,2),(1,1,-2,1)\}$ **B)** $\{(1,-1,1,2),(1,1,-2,1),(1,3,2,0)\}$
C) $\{(1,-1,1,2),(1,1,-2,1),(-3,1,0,2)\}$ **D)** $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$

Exercício 129 *[2005/6 - 2º Teste/1º Exame - LEEC]*

V1. Considere o plano $\mathbb{P}$ de $\mathbb{R}^3$ que contém os pontos p, q e r dados por

$$p = (1,0,0)\ , \quad q = (-3,-1,2)\ , \quad r = (0,2,-1)\ .$$

Escrevendo um elemento genérico de $\mathbb{R}^3$ na forma (x,y,z), qual é a equação cartesiana do plano $\mathbb{P}$?

A) $x+2y+3z=1$ **B)** $x-y-z=1$ **C)** $-x+2y+4z=-1$ **D)** $x+y+z=1$

Exercício 130 *[2005/6 - 2º Exame - LEEC]*

V1. Considere o plano $\mathbb{P}$ de $\mathbb{R}^3$ que contém os pontos:

$$p_1 = (1,0,0), \quad p_2 = (2,1,2), \quad p_3 = (1,2,3).$$

Designando por (x,y,z) um elemento genérico de $\mathbb{R}^3$, qual é a equação cartesiana de $\mathbb{P}$?

A) $x+3y-2z=-1$ **B)** $x+3y-2z=1$ **C)** $x-3y+2z=-1$ **D)** $x-3y-2z=-1$

Exercício 131 *[2005/6 - 2º Exame - LEEC]*

V1. Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno não usual definido por

$$< x, y >= x_1y_1 + x_2y_2 + 4x_3y_3 + x_1y_3 + x_3y_1$$

em que $x = (x_1,x_2,x_3), y = (y_1,y_2,y_3)$.

Qual o ângulo formado pelos vectores $v_1 = (1,1,1)$ e $v_2 = (-1,1,1)$, com este produto interno?

A) 0 **B)** $\pi/4$ **C)** $\pi/2$ **D)** $-\pi/4$

Exercício 132 *[2006/7 - 2º Teste/1º Exame - LEC/MEC]*

V1. Em $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual, qual a melhor aproximação do vector (7,7,3) por elementos do subespaço gerado pelos vectores (1,-1,1) e (1,1,6)?

A) (-2,4,2) **B)** (0,2,5) **C)** (-3,5,2) **D)** (-3,-1,4)

Exercício 133 *[2006/7 - 2º Teste/1º Exame - LEC/MEC]*

V1. Qual das seguintes é uma equação cartesiana do plano P de $\mathbb{R}^3$ que contém o ponto (1,1,1) e que é gerado pelos vectores (1,1,0) e (1,-1,1)?

A) $x - y - 2z = -2$ **B)** $x - y + 2z = -2$ **C)** $x - y - 2z = 2$ **D)** $-x + y + 2z = -2$

Exercício 134 *[2006/7 - 2º Exame - LEC/MEC]*

V1. Em $\mathbb{R}^3$, qual é o ponto de intersecção da recta que passa pelos pontos (1,1,1) e (3,5,7) com o plano $P = \{(x, y, z) : x + y + z = 9\}$?

A) (1,2,6) **B)** (2,2,5) **C)** (2,3,4) **D)** (1,5,3)

Exercício 135 *[2006/7 - 2º Exame - LEC/MEC]*

V1. A distância (medida na norma usual de $\mathbb{R}^3$) do vector $(1, -1, 0)$ ao conjunto das soluções do sistema de equações homogéneo

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

é:

A) $\sqrt{6}$ **B)** $\sqrt{2}$ **C)** $2\sqrt{2}$ **D)** $\sqrt{3}$

Exercício 136 *[2007/8 - 2º Teste/1º Exame - MEC]*

V1. Sejam V um espaço euclideano e $F = L(\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\})$, em que os vectores v_j, $j = 1, \ldots 5$ são não nulos e satisfazem as seguintes condições:

$$1) <v_1, v_2>=<v_1, v_5>= 0, \quad 2)\ v_3 \in L(\{v_1, v_2\}), \quad 3)\ v_1 + v_2 = v_3 + v_4.$$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira para todos os subespaços F gerados por cinco vectores nas condições acima indicadas:

A) $\dim F = 2$, **B)** $2 \leq \dim F \leq 3$, **C)** $\dim F = 3$, **D)** $\dim F \geq 4$.

Exercício 137 *[2007/8 - 2º Teste/1º Exame - MEC]*

V1. Sejam $x = (1, 3, 1)$ e $\mathcal{S}$ o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores $s_1 = (1, 0, 1)$ e $s_2 = (2, 2, 0)$. Qual é o valor de $d(x, \mathcal{S})$ (a distância de x ao subespaço $\mathcal{S}$)?

A) 1, **B)** $\sqrt{2}$, **C)** $\sqrt{3}$, **D)** $\sqrt{5}$.

Exercício 138 *[2007/8 - 2º Exame - MEC]*

V1. Considere $\mathbb{R}^3$ o produto interno usual e seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

Qual dos seguintes vectores pertence a $C_A^\perp$, o (complemento) ortogonal dos espaço das colunas de A?

A) (1,2,1), **B)** (1,-2,1), **C)** (1,2,-3), **D)** (1,-2,3).

Exercício 139 *[2007/8 - 2º Exame - MEC]*

V1. Considere $\mathbb{R}^2$ o produto interno definido por

$$<u,v>= u^t \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} v,$$

em que se considera a representação dos elementos de $\mathbb{R}^2$ como vectores coluna e os seguintes vectores:

$$x = (1,2), \quad y = (3,4), \quad z = (5,-4), \quad w = (5,-2).$$

Qual dos seguintes conjuntos é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^2$ com este produto interno?

A) $\{x,y\}$, **B)** $\{x,z\}$, **C)** $\{y,z\}$, **D)** $\{y,w\}$.

Exercício 140 *[2008/9 - 2º Teste/1º Exame - LEIC]*

V1. Seja S o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores $(1,2,3)$ e $(3,2,1)$. Qual dos seguintes conjuntos é uma base ortogonal de S?
A) $\{(1,2,3),(-3,0,1)\}$, **B)** $\{(3,2,1),(-1,1,1)\}$,
C) $\{(4,5,-4),(1,0,1)\}$, **D)** $\{(2,0,-2),(1,1,1)\}$.

Exercício 141 *[2008/9 - 2º Teste/1º Exame - LEIC]*

V1. Sejam $x = (1,4,1)$ e S subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores $(0,2,4)$ e $(1,3,5)$. Considerando em $\mathbb{R}^3$ o produto interno usual, qual dos seguintes pares de vectores y, z é o que corresponde à decomposição

$$x = y + z \text{ com } y \in S \text{ e } z \in S^{\perp}?$$

A) $y = (2,2,2), z = (-1,2,-1)$, **B)** $y = (3,3,3), z = (-2,1,-2)$,
C) $y = (0,6,0), z = (1,-2,1)$, **D)** $y = (0,0,0), z = (1,4,1)$.

Exercício 142 *[2008/9 - 2º Exame - LEIC]*

V1. Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno não usual definido como se segue: sendo $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$,

$$< x, y >= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Qual dos seguintes vectores é ortogonal ao vector $(1,0,-1)$? (A noção de ortogonalidade é a determinada pelo produto interno considerado).

A) $(1,2,-1)$, **B)** $(-1,-3,4)$, **C)** $(-2,3,2)$, **D)** $(2,2,1)$.

Exercício 143 *[2008/9 - 2º Exame - LEIC]*

V1. Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno usual. Sendo $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3$ o plano cuja equação cartesiana é $3x + 2y + z = 0$, qual dos seguintes pontos de $\mathcal{P}$ está mais próximo do vector $(1,1,-1)$?

A) $(-3,5,-1)$, **B)** $(2,-3,0)$, **C)** $(-2,1,4)$, **D)** $(-1,3,-3)$.

Exercício 144 *[2008/9 - 2º Exame - LEIC]*

V1. Para $n \in \mathbb{N}$, considere em $\mathbb{R}^n$ o produto interno usual. Seja $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz simétrica e represente por N_S, L_S e C_S o núcleo de S, o espaço das linhas de S e o espaço das colunas de S, respectivamente. Considere as seguintes afirmações:

I. $N_S = \{0\}$, II. $L_S = C_S$, III. ${N_S}^{\perp} = C_S$, IV. $\dim N_S + \dim L_S = n$.

Qual é a lista completa das afirmações verdadeiras para qualquer matriz nas condições mencionadas?

A) I e IV, **B)** I, II e IV, **C)** II, III e IV, **D)** II e IV.

Exercício 145 *[2009/10 - 1º Exame - MEC]*

V1. Considere a função $F : \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como se segue: sendo $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, então

$$F(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + 2(x_2y_1 + x_1y_2).$$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A) F não é linear na primeira variável,
B) F não é simétrica (ou seja, existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $F(x, y) \neq F(y, x)$),
C) F não é positiva (ou seja, $F(x, x) \leq 0$ para algum $x \neq (0, 0)$),
D) F é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

Exercício 146 *[2009/10 - 1º Exame - MEC]*

V1. Seja S o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos três vectores seguintes:

$$v_1 = (1, 1, -1), \quad v_2 = (1, 2, 1), \quad v_3 = (1, 5, 7).$$

Qual dos seguintes conjuntos contém simultaneamente uma base ortogonal de S e uma base de $S^{\perp}$?

A) $\{(1, 1, -1), (1, 4, 5), (3, -2, 1)\}$,
B) $\{(1, 1, -1), (5, -4, 1), (1, 2, 3)\}$,
C) $\{(1, 1, -1), (1, 4, -5), (3, -2, 1)\}$,
D) $\{(1, 2, 1), (2, 1, -4), (2, 0, 1)\}$.

Exercício 147 *[2009/10 - 2º Exame - MEC]*

V1. Seja S o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos três vectores seguintes:

$$v_1 = (1, 1, -1), \quad v_2 = (1, 2, 1), \quad v_3 = (1, 5, 7).$$

Qual dos seguintes conjuntos é uma base ortogonal de S?

A) $\{(1, 1, -1), (1, 4, 5), (3, -2, 1)\}$,
B) $\{(1, 1, -1), (1, 4, 5), (-3, 2, 1)\}$,
C) $\{(1, 1, -1), (3, -2, 1)\}$,
D) $\{(1, 2, 1), (2, 1, -4)\}$.

Exercício 148 *[2009/10 - 2º Exame - MEC]*

V1. Seja S o subespaço definido no problema anterior. Qual é a distância do vector $(2,-3,2)$ ao subespaço S?

A) $\sqrt{2}$, **B)** $\sqrt{7}$, **C)** $\sqrt{14}$, **D)** $\sqrt{21}$.

Exercício 149 *[2010/11 - 3º Teste - MEEC]*

V1. Considere em $\mathbb{R}^4$ o produto interno usual e os seguintes subconjuntos:
$S_1 = \{(0,0,1,-1),(0,0,1,1),(1,1,1,-1),(1,1,0,0)\}$
$S_2 = \{(0,0,1,-1),(1,1,0,0),(1,-1,0,0),(1,1,1,0)\}$
$S_3 = \{(0,0,1,-1),(0,0,1,1),(1,-1,0,0),(1,1,0,0)\}$
$S_4 = \{(0,0,1,-1),(1,1,0,0),(1,-1,1,0),(1,-1,0,0)\}$.
Qual deles constitui uma base ortogonal de $\mathbb{R}^4$?

A) S_1, **B)** S_2, **C)** S_3, **D)** S_4.

Exercício 150 *[2010/11 - 3º Teste - MEEC]*

V1. Seja R a recta de $\mathbb{R}^3$ gerada pelo vector $(1,1,1)$.

Considerando os vectores de $\mathbb{R}^3$ escritos na forma (x,y,z), qual das seguintes é a equação cartesiana do plano P tal que $P \perp R$ e $(1,1,1) \in P$?

A) $x-y+z=3$, **B)** $x+y+z=3$, **C)** $x+y+z=-3$, **D)** $x-y+2z=3$.

Exercício 151 *[2010/11 - 3º Teste - MEEC]*

V1. Considere em $\mathbb{R}^{2\times 2}$ o produto interno usual e seja S o subespaço de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ definido por

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} : a,b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Qual das seguintes matrizes é a melhor aproximação (ou aproximação óptima) de matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ por elementos de S?

A) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, **B)** $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, **C)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, **D)** $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$.

Exercício 152 *[2010/11 - Exame - MEEC]*

V1. Considere a base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ constituída pelos vectores :

$$v_1 = (1,2,-2),\ v_2 = (2,1,2),\ v_3 = (-2,2,1).$$

Qual das seguintes é uma equação cartesiana do subespaço $S = L\{v_1, v_3\}$?

A) $4x-y+z=0$; **B)** $2x+y+2z=0$; **C)** $2x-2y-z=0$; **D)** $2x-3y-2z=0$.

Exercício 153 *[2010/11 - Exame - MEEC]*

V1. Nas condições do problema anterior, calcule a projecção ortogonal do vector $u = v_1 - v_2 + v_3$ no subespaço S.

A resposta correcta é:

A) $Proj_S(u) = (3, 0, -3)$; **B)** $Proj_S(u) = (0, 6, -3)$;

C) $Proj_S(u) = (-1, 4, -1)$; **D)** $Proj_S(u) = (4, 2, -5)$.

Exercício 154 *[2010/11 - Exame - MEEC]*

V1. Qual dos quatro vectores seguintes está mais próximo do plano $\mathbb{P} = L(\{(1, 1, 1), (1, 2, 3)\})$?

A) $(0, 1, 0)$, **B)** $(1, 0, 1)$, **C)** $(1, 1, 3)$, **D)** $(2, 3, 5)$.

Valores e vectores próprios

Exercício 155 *[2000/1 - 1°Exame - LEC]*

V1. Seja A uma matriz $3{\times}3$ com os valores próprios -9 , 6 e 7 . Considere as seguintes afirmações:

I. Para todo o vector $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ o sistema $(A - 6\,I)\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ admite uma solução $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

II. A matriz $A + I$ tem característica menor que 3 .

III. A transformação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida pela matriz $A - 7\,I$ não é injectiva.

IV. Para todo o vector $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ em $\mathbb{R}^3$, $A\,\mathbf{y} \neq 3\,\mathbf{y}$.

Qual a lista completa de afirmações correctas?

A) Nenhuma **B)** I , II , III e IV **C)** I e II **D)** III e IV

Exercício 156 *[2005/6 - 2° Teste/1° Exame - LEEC]*

V2. Seja $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ cujos valores próprios são -3 , 4 e 9 . Considere as seguintes afirmações:

I. Para um certo vector $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ o sistema $(A + 2\,I)\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ não admite soluções $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

II. Para todo o vector $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ em $\mathbb{R}^3$, $A\,\mathbf{y} \neq 9\,\mathbf{y}$.

III. A matriz $A - 4\,I$ é invertível.

IV. A transformação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x) = (A + 3\,I)x$ não é injectiva.

Qual a lista completa de afirmações correctas?

A) I , II e III **B)** I , II , III e IV **C)** II **D)** IV

Exercício 157 *[2005/6 - 2° Exame - LEEC]*

V1. Seja A uma matriz quadrada que tem o número 3 como valor próprio.
Sendo I a matriz identidade de ordem 3, qual dos seguintes determinantes pode garantir que se anula?

A) $\det(A^2 - 3A + 6I)$ **B)** $\det(A^2 - 4A - 6I)$ **C)** $\det(A^2 - 3I)$ **D)** $\det(A^2 - 3A)$

Exercício 158 *[2005/6 - 2° Exame - LEEC]*

V1. Qual é a forma de Jordan da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$?

A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **B)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ **C)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **D)** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Exercício 159 *[2006/7 - 2º Teste/1º Exame - LEC/MEC]*

V1. Seja $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que os valores próprios de A são -1, 0 e 1. Considere as seguintes afirmações, em que I representa a matriz identidade de ordem 3:

I. A é invertível;
II. O espaço das colunas de A tem dimensão 2;
III. O núcleo de $A - I$ tem dimensão 1;
IV. $A - I$ é invertível.
Qual é a lista completa de afirmações verdadeiras?

A) II **B)** II e III **C)** I e IV **D)** II, III e IV

Exercício 160 *[2006/7 - 2º Exame - LEC/MEC]*

V1. Qual o conjunto dos valores de α reais para os quais a forma quadrática associada à matriz

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 3 & \alpha \end{bmatrix}$$

é definida positiva?

A) $]2, +\infty[$ **B)** $]-\infty, -2[$ **C)** $]-2, 2[$ **D)** $[-2, 2]$

Exercício 161 *[2007/8 - 2º Teste/1º Exame - MEC]*

V1. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ e Q_A a forma quadrática em $\mathbb{R}^2$ associada a A.

Qual das seguintes afimações é verdadeira?

A) Q_A é definida positiva,
B) Q_A é semi-definida positiva,
C) Q_A é semi-definida negativa,
D) Q_A é indefinida.

Exercício 162 *[2007/8 - 2º Teste/1º Exame - MEC]*

V1. Sabe-se que uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tem apenas um valor próprio, λ, que o espaço próprio associado a λ, $E(\lambda)$, contém o vector $(1, 1, 0)$, que T é representada em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ por uma matriz triangular superior e que $T(1, 1, 1) = (2, 2, 1)$. Então, para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, a expressão correcta é:

A) $T(x, y, z) = (x + y + z, y + z, z)$,
B) $T(x, y, z) = (x + y, y + z, y + z)$,
C) $T(x, y, z) = (x + z, y + z, z)$,
D) $T(x, y, z) = (x + y, y + z, z)$.

Exercício 163 *[2007/8 - 2º Exame - MEC]*

V1. Qual é o conjunto dos valores próprios da matriz $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$?

A) $\{1, 3\}$, **B)** $\{-1, 1, 5\}$, **C)** $\{0, 1, 4\}$, **D)** $\{1, 2, 3\}$.

Exercício 164 *[2007/8 - 2º Exame - MEC]*

V1. Qual das matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 20 & -11 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ 20 & -9 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 14 & -8 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

não é diagonalizável?

A) A, **B)** B, **C)** C, **D)** D.

Exercício 165 *[2008/9 - 2º Teste/1º Exame - LEIC]*

V1. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$T(x, y, z) = (2x + y + z, 2x + 3y + 4z, -x - y - 2z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

e considere os vectores de $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (0, 1, -1), \quad v_2 = (1, -1, 1), \quad v_3 = (-1, 1, 0), \quad v_4 = (-2, -3, 1), \quad v_5 = (2, 3, -2).$$

Qual dos seguintes conjuntos só contém vectores próprios de T?

A) $\{v_1, v_2, v_3\}$, **B)** $\{v_1, v_3, v_5\}$, **C)** $\{(0, 0, 0), v_1, v_3\}$, **D)** $\{v_1, v_3, v_4\}$.

Exercício 166 *[2008/9 - 2º Teste/1º Exame - LEIC]*

V1. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Qual das seguintes formas quadráticas definidas em $\mathbb{R}^2$ é definida positiva?

A) Q_A, **B)** Q_B, **C)** Q_C, **D)** Q_D.

Exercício 167 *[2008/9 - 2º Exame - LEIC]*

V1. Seja $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ a transformação definida por

$$T(z, w) = (z - w, z + w), \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

Qual é o conjunto dos valores próprios de T?

A) $\{0, 1\}$, **B)** $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$, **C)** $\{1 - i, 1 + i\}$, **D)** $\{1 - i\sqrt{2}, 1 + i\sqrt{2}\}$.

Exercício 168 *[2008/9 - 2º Exame - LEIC]*

V1. Seja $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ que tem como valores próprios $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 2$. Considere as seguintes afirmações:

I. A é singular, II. A é diagonalizável, III. $\dim L_A < 3$, IV. $L_A \perp N_A$.

(L_A e N_A representam o espaço das linhas e o núcleo de A, respectivamente, e supõe-se $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual.)

Qual é a lista completa de afirmações verdadeiras?

A) I e III, **B)** I, II e III, **C)** I, II e IV, **D)** I, II, III e IV.

Exercício 169 *[2009/10 - 1° Exame - MEC]*

V1. Seja $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ uma transformação linear cuja representação em relação à base canónica $\mathcal{B}_C = (1, t, t^2)$ de $\mathcal{P}_2$ é a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Qual dos seguintes polinómios é vector próprio (ou função própria) de T?

A) $1 + 4t - t^2$, **B)** $1 + 2t + t^2$, **C)** $1 - 3t + t^2$, **D)** $1 - 2t + t^2$, $(t \in \mathbb{R})$.

Exercício 170 *[2009/10 - 1° Exame - MEC]*

V1. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (4x + 2y + z, 3x + 7y + 2z, 2x + 4y + 5z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Sabendo que $\lambda = 3$ é valor próprio de T, qual é o espaço próprio associado a este valor próprio?

A) $L(\{(2, -1, 2)\})$, **B)** $L(\{(0, -1, 2)\})$, **C)** $L(\{(2, -1, 0)\})$, **D)** $L(\{(2, 0, -3)\})$.

Exercício 171 *[2009/10 - 2° Exame - MEC]*

V1. Sejam

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

e Q_{A_1}, Q_{A_2} as formas quadráticas em $\mathbb{R}^2$que lhes estão associadas, respectivamente.

Qual das seguintes é a afirmação verdadeira?
A) Q_{A_1} e Q_{A_2} são (ambas) definidas positivas,
B) Q_{A_1} e Q_{A_2} são (ambas) indefinidas,
C) Q_{A_1} é definida positiva e Q_{A_2} é definida negativa,
D) Q_{A_1} é definida positiva e Q_{A_2} é indefinida.

Exercício 172 *[2009/10 - 2° Exame - MEC]*

V1. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear, que tem $\{2, 3\}$ como conjunto de valores próprios e cujos espaços próprios associados são, respectivamente,

$$E(2) = L(\{(1, 2)\}), \quad E(3) = L(\{(1, 3)\}).$$

Qual das seguintes é a expressão analítica de T, válida para qualquer par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$?

A) $T(x, y) = (y, -6x + 5y)$, **B)** $T(x, y) = (-x + y, -6x + 5y)$,
C) $T(x, y) = (-6x + 5y, x)$, **D)** $T(x, y) = (2x + y, -3x + 5y)$.

Exercício 173 *[2010/11 - 3º Teste - MEEC]*

V1. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$. Sabendo que $\lambda = 7$ é valor próprio de A qual dos seguintes conjuntos contém os outros valores próprios?

A) $\{2, 3\}$, **B)** $\{-1, 4\}$, **C)** $\{0, 1\}$, **D)** $\{-2, 6\}$.

Exercício 174 *[2010/11 - 3º Teste - MEEC]*

V1. Sejam

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}; \quad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Destas apenas uma não é diagonalizável, nem quando considerada como matriz complexa. Qual é?

A) A_1, **B)** A_2, **C)** A_3, **D)** A_4.

Exercício 175 *[2010/11 - Exame - MEEC]*

V1. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que $T(1, 0) = (5, 1)$. Admita ainda que $(1, 1)$ é um vector próprio de T associado ao valor próprio $\lambda = 1$. Nestas condições calcule $T(0, 1)$.
A resposta correcta é:

A) $T(0, 1) = (-5, 0)$; **B)** $T(0, 1) = (-4, 0)$; **C)** $T(0, 1) = (-3, 0)$; **D)** $T(0, 1) = (-2, 0)$.

Exercício 176 *[2010/11 - Exame - MEEC]*

V1. Nas condições do problema anterior, qual dos seguintes conjuntos contém todos os valores próprios de T?

A) $\{-5, 1, 2\}$; **B)** $\{-4, 1, 3\}$; **C)** $\{-3, 1, 4\}$; **D)** $\{-2, 1, 5\}$.

Soluções

Exercício	V1	V2	V3	V4
1	A	B	D	A
2	C	A	A	D
3	A	D	A	C
4	A	C	A	B
5	C	C	C	A
6	A	A	D	D
7	C	B	A	B
8	A	D	B	A
9	B	C	B	C
10	D	A	C	B
11	A	D	D	C
12	B	C	B	C
13	D	C	B	A
14	C	B	C	B
15	C	A	B	D
16	B	D	D	B
17	C	B	B	A
18	A	D	C	D
19	D	D	B	A
20	C	A	C	A
21	A	B	B	C
22	B	C	A	B
23	D	C	B	D
24	D	A	D	A
25	A	D	A	C
26	B	C	D	C
27	C	D	D	A
28	C	B	C	B
29	D	A	B	C
30	B	D	A	A
31	D	C	B	D
32	B	B	B	C
33	B	D	D	A
34	A	C	D	B
35	B	D	B	C
36	B	C	B	C
37	B	A	C	C
38	C	D	A	B
39	B	C	B	C
40	A	D	A	D
41	B	C	A	D
42	A	C	B	B
43	C	D	C	D
44	C	B	A	C
45	B	D	C	B
46	A	C	B	D
47	C	B	D	C
48	D	A	C	B
49	C	C	D	C
50	D	B	A	C

Exercício	V1	V2	V3	V4
51	A	A	B	D
52	A	D	C	A
53	D	C	D	D
54	C	A	D	D
55	B	C	D	D
56	B	C	D	B
57	D	C	B	B
58	B	B	A	D
59	D	A	D	D
60	C	B	C	B
61	B	B	A	A
62	C	A	D	B
63	A	C	B	D
64	C	B	A	D
65	D	C	A	B
66	C	B	C	D
67	D	A	D	A
68	A	D	C	C
69	D	A	A	C
70	C	D	B	D
71	B	C	A	B
72	B	C	B	C
73	C	D	A	B
74	B	B	A	A
75	C	A	C	B
76	C	D	C	C
77	B	B	D	C
78	C	D	C	D
79	D	A	A	A
80	A	B	A	D
81	C	D	A	B
82	D	C	D	C
83	A	A	C	D
84	C	B	D	B
85	A	B	D	C
86	C	B	B	C
87	D	D	C	B
88	D	D	D	A
89	A	B	A	A
90	D	C	C	C
91	D	D	C	C
92	B	C	D	D
93	B	C	C	D
94	C	B	B	C
95	A	B	C	B
96	B	A	B	C
97	B	C	C	B
98	D	B	C	A
99	B	C	A	A
100	D	B	C	C

Soluções

Exercício	V1	V2	V3	V4
101	B	A	D	A
102	B	D	B	C
103	C	C	D	D
104	B	A	D	D
105	A	A	A	A
106	D	B	C	C
107	C	B	A	D
108	C	C	A	B
109	D	B	C	D
110	A	C	C	B
111	C	C	D	D
112	B	B	B	A
113	B	D	B	D
114	D	A	C	B
115	C	A	B	D
116	C	C	A	A
117	B	C	D	A
118	A	D	A	D
119	C	A	D	B
120	D	D	D	A
121	C	B	C	B
122	B	C	A	D
123	C	D	D	B
124	D	D	A	B
125	B	C	B	D
126	C	B	D	B
127	A	A	D	D
128	B	C	B	C
129	A	D	D	A
130	B	D	A	C
131	B	D	C	A
132	B	A	D	C
133	A	B	D	A
134	C	C	A	D
135	B	A	A	D
136	B	C	A	D
137	C	B	D	A
138	B	C	C	C
139	B	D	C	A
140	D	A	A	D
141	A	C	D	B
142	D	B	C	D
143	B	C	A	D
144	C	B	B	C
145	C	A	C	A
146	A	C	A	B
147	D	B	C	A
148	C	D	B	A
149	C	B	D	A
150	B	A	C	D

Exercício	V1	V2	V3	V4
151	A	B	C	D
152	B	C	A	B
153	C	A	D	B
154	D	D	B	C
155	D	D	C	D
156	D	D	C	D
157	D	C	C	D
158	C	B	B	C
159	B	D	B	B
160	A	D	B	C
161	D	B	D	B
162	C	A	C	B
163	C	A	B	A
164	D	B	B	D
165	D	D	B	A
166	B	A	C	D
167	C	B	C	B
168	D	A	C	A
169	D	B	D	A
170	B	A	A	B
171	D	D	D	D
172	A	A	C	B
173	C	A	B	D
174	C	D	C	D
175	B	D	C	A
176	C	A	B	D
177				
178				
179				
180				
181				
182				
183				
184				
185				
186				
187				
188				
189				
190				
191				
192				
193				
194				
195				
196				
197				
198				
199				
200				

Respostas

Exercício	V1	V2	V3	V4
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				
21				
22				
23				
24				
25				
26				
27				
28				
29				
30				
31				
32				
33				
34				
35				
36				
37				
38				
39				
40				
41				
42				
43				
44				
45				
46				
47				
48				
49				
50				

Exercício	V1	V2	V3	V4
51				
52				
53				
54				
55				
56				
57				
58				
59				
60				
61				
62				
63				
64				
65				
66				
67				
68				
69				
70				
71				
72				
73				
74				
75				
76				
77				
78				
79				
80				
81				
82				
83				
84				
85				
86				
87				
88				
89				
90				
91				
92				
93				
94				
95				
96				
97				
98				
99				
100				

Respostas

Exercício	V1	V2	V3	V4
101				
102				
103				
104				
105				
106				
107				
108				
109				
110				
111				
112				
113				
114				
115				
116				
117				
118				
119				
120				
121				
122				
123				
124				
125				
126				
127				
128				
129				
130				
131				
132				
133				
134				
135				
136				
137				
138				
139				
140				
141				
142				
143				
144				
145				
146				
147				
148				
149				
150				

Exercício	V1	V2	V3	V4
151				
152				
153				
154				
155				
156				
157				
158				
159				
160				
161				
162				
163				
164				
165				
166				
167				
168				
169				
170				
171				
172				
173				
174				
175				
176				
177				
178				
179				
180				
181				
182				
183				
184				
185				
186				
187				
188				
189				
190				
191				
192				
193				
194				
195				
196				
197				
198				
199				
200				