Álgebra Linear
Exercícios de avaliação resolvidos

Setembro 2015

[Exercícios baseados em provas de avaliação a cursos leccionados por Amarino Lebre.]

Sistemas de Equações Lineares, Matrizes e Determinantes

Exercício 1 *[2005/6 - 2º Exame - V1 - Problema 11 - LEEC]*

Sejam $\mu \in \mathbb{R}$ e $A_\mu = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & \mu \\ 3 & \mu^2 & \mu \end{bmatrix}$. Determine:

a) o determinante de A_μ, em função de μ;

b) a característica de A_μ, em função de μ;

c) a inversa de A_μ para $\mu = 1$.

. . . .

Resolução:

a) Para calcular o determinante de A_μ usamos, por exemplo, a regra de Laplace por expansão segundo a primeira linha, obtendo-se:

$$\det A_\mu = -\begin{vmatrix} 1 & \mu \\ 3 & \mu \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & \mu^2 \end{vmatrix} = 2(\mu^2 + \mu - 12) = 2(\mu + 4)(\mu - 3).$$

b) De acordo com a alínea anterior, se $\mu \notin \{-4, 3\}$, então $\det A_\mu \neq 0$ e, consequentemente, A_μ é invertível, pelo que a sua característica é igual ao número de linhas ou de coluna de A_μ:

$$\operatorname{car} A_\mu = 3 \quad \text{se } \mu \notin \{-4, 3\}.$$

Se $\mu \in \{-4, 3\}$, a matriz A_μ é singular e, consequentemente a sua característica é inferior a 3. Para sabermos o valor exacto aplicamos a eliminação de Gauss a A_μ:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & \mu \\ 3 & \mu^2 & \mu \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 4 & \mu \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & \mu^2 & \mu \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 4 & \mu \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & \mu^2 - 12 & -2\mu \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 4 & \mu \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2(\mu^2 + \mu - 12) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & \mu \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

em que se usou o facto de ser $\mu^2 - 12 \neq 0$ para $\mu \in \{-4, 3\}$. Consequentemente

$$\operatorname{car} A_\mu = 2 \quad \text{se } \mu \in \{-4, 3\}.$$

uma vez que A_μ tem apenas dois pivôs.

Observe-se que o processo anterior permite determinar o valor da característica de A_μ para qualquer valor de μ, mas ter-se-ia de considerar separadamente os casos em que $\mu^2 - 12 = 0$.

c) Decorre da alínea (a) que, para $\mu = 1$, A_μ é invertível, pois $\det A_1 = -20 \neq 0$. Para calcular a inversa de A_1, determinamos a matriz dos cofactores de A_1 e usamos a expressão:

$$A_1^{-1} = \frac{1}{\det A_1} (\operatorname{cof} A_1)^t \; .$$

Tem-se

$$\operatorname{cof} A_1 = \operatorname{cof} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -11 \\ 1 & -6 & 3 \\ -7 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

e, portanto,

$$A_1^{-1} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} -3 & -1 & 7 \\ -2 & 6 & -2 \\ 11 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 2 *[2006/7 - 1° Teste - Problema 6 - MEC]*

Considere a matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ dada por $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Use o método de Gauss-Jordan para:

a) mostrar que A é invertível e para obter a sua inversa;

b) calcular o determinante de A.

....

Resolução:

a) Aplicamos o método de Gauss-Jordan à matriz aumentada $[A \vdots I]$, com a habitual convenção de notação: $X \xrightarrow{E} Y$ significa que $Y = EX$. Tem-se

$$
\begin{array}{rcl}
[A \vdots I] & = & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
(A \text{ invertível } \Leftarrow) & \xrightarrow{P} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \\
 & \xrightarrow{F_2} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{D^{-1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{array}\right] = [I \vdots B]
\end{array}
$$

em que

$$
E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.
$$

No final da 1ª fase, que coincide com o final da eliminação de Gauss, conclui-se que A é não-singular (ou invertível), pois a matriz A deu origem a uma matriz triangular superior sem zeros na diagonal principal. No final do processo, tem-se $B = D^{-1}F_2F_3PE$ é tal que $BA = I$. Como B é invertível, por ser o produto de matrizes elementares cada uma delas invertível, conclui-se que é a inversa de A,

$$
A^{-1} = B = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}
$$

b) Da igualdade

$$
D^{-1}F_2F_3PEA = I,
$$

tendo em conta que o determinante de um produto é o produto dos determinantes, que $\det D^{-1} = 1/\det D$ e que

$$
\det E = \det F_3 = \det F_2 = 1, \quad \det P = -1, \quad \det D = 4
$$

obtém-se

$$
\det A = -\det D = -4.
$$

Exercício 3 *[2008/9 - 1° Teste - Problema 7 - LEIC]*

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Mostre que A é invertível e determine a sua inversa;

b) Calcule o determinante de A;

c) Resolva a equação

$$A^2\, u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

. . . .

Resolução:

a):b) Resolvemos as duas primeiras alíneas por dois processos alternativos:
1° processo:

Aplicamos o método de Gauss-Jordan à matriz aumentada $[A \,\vdots\, I]$, com a habitual convenção de notação: $X \xrightarrow{E} Y$ significa que $Y = EX$. Tem-se

$$[A \,\vdots\, I] \quad = \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$(A \text{ invertível } \Leftarrow) \quad \xrightarrow{E_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{D^{-1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right] = [I \,\vdots\, B]$$

em que

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad F_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

No final da 1ª fase, que coincide com o final da eliminação de Gauss, conclui-se que A é não-singular (ou invertível), pois a matriz A deu origem a uma matriz triangular superior sem zeros na diagonal principal. No final do processo, tem-se $B = D^{-1}F_3E_2E_1$ é tal que $BA = I$. Como B é invertível, por ser o produto de matrizes elementares cada uma delas invertível, conclui-se que é a inversa de A,

$$A^{-1} = B = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Da igualdade

$$D^{-1}F_3E_2E_1A = I,$$

tendo em conta que o determinante de um produto é o produto dos determinantes, que $\det D^{-1} = 1/\det D$ e que

$$\det E_2 = \det E_1 = \det F_3 = 1, \quad \det D = -2$$

obtém-se

$$\det A = \det D = -2.$$

Uma outra forma de obter este resultado consiste em usar o facto de o método de eliminação sem troca de linhas (como é o caso) não alterar o determinante de uma matriz.

2° processo: Uma condição necessária e suficiente de invertibilidade de uma matriz é que o seu determinante seja diferente de zero. Se $\det A \neq 0$, a inversa de A pode ser calculada por via da matriz dos cofactores:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\big(\operatorname{cof} A\big)^t, \quad \operatorname{cof} A = [a'_{ij}], \quad a'_{ij} = (-1)^{i+j}\det A_{ij},$$

em que A_{ij} é a matriz que se obtém de A eliminando a linha i e a coluna j.

Para calcular o determinante de A podemos usar, por exemplo, a fórmula de Laplace por expansão segundo a 1ª linha, obtendo-se

$$\det A = a'_{11} + a'_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2.$$

Sendo $\det A \neq 0$, A é invertível. Para determinar a sua inversa basta calcular a matriz dos cofactores. Tem-se (dois dos cofactores da primeira linha já foram calculados)

$$a'_{11} = -1, \quad a'_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad a'_{13} = -1,$$

$$a'_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad a'_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad a'_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$a'_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad a'_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad a'_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

pelo que

$$\operatorname{cof} A = (\operatorname{cof} A)^t = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Em consequência

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

c) Comecemos por notar que a matriz dos coeficientes, A^2, é invertível, sendo a sua inversa $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2 = A^{-2}$. Efectivamente, da associatividade do produto de matrizes resulta que

$$(A^{-1})^2A^2 = (A^{-1}A^{-1})(AA) = A^{-1}(A^{-1}A)A = A^{-1}A = I.$$

Ora, sendo A^2 invertível, a equação $A^2u = b$ tem uma única solução dada por

$$u = (A^2)^{-1}b = A^{-2}b.$$

Neste caso

$$u = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}.$$

Exercício 4 *[2009/10 - 1° Teste - Problema 6 - MEC]*

Considere as seguintes matrizes de $\mathbb{R}^{3\times 3}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}.$$

1. Calcule sucessivamente:
   (a) a matriz dos cofactores de A, (b) o determinante de A, (c) a inversa de A (se existir).

2. Use o método de eliminação de Gauss para mostrar que, independentemente do vector $b \in \mathbb{R}^3$ considerado, a equação $Bu = b$ tem uma única solução.

3. Qual é a solução da equação $ABv = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$?

....

Resolução:

1. (a) A matriz dos cofactores de A, $\operatorname{cof} A$, é a dada por

$$\operatorname{cof} A = [a'_{ij}]_{i,j=1}^{3}, \quad a'_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij},$$

em que A_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ é a matriz de ordem 2 que se obtém de A eliminando a linha i e a coluna j. Assim temos:

$$\begin{array}{lll}
a'_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4, & a'_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2, & a'_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 6 = -3, \\
a'_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(-3) = 3, & a'_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1, & a'_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3, \\
a'_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2, & a'_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(-1) = 1, & a'_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2.
\end{array}$$

Consequentemente

$$\operatorname{cof} A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. (b) Uma vez que na alínea anterior já foram determinados os cofactores de A, para calcular o determinante de A vamos usar a regra de Laplace,

$$\det A = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} a'_{ij} = \sum_{i=1}^{3} a_{ij} a'_{ij}$$

por expansão segundo uma linha ou coluna de A que seja mais vantajosa (ou seja com o maior número possível de zeros, para que o cálculo seja o mais simples possível). Neste caso, tanto as linha 1 e 2 como as colunas 2 e 3 servem esse objectivo. Escolhendo, a título de exemplo, a linha $i = 1$, tem-se:

$$\det A = a'_{11} + a'_{13} = 4 - 3 = 1.$$

1. (c) É condição necessária e suficiente para que A seja invertível que $\det A \neq 0$. Como vimos na alínea anterior $\det A = 1 \neq 0$. Consequentemente, A é invertível. Para determinar a sua inversa podemos usar os resultados anteriores, já que a inversa de A, A^{-1}, pode ser calculada por

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\operatorname{cof} A)^t.$$

Neste caso, tem-se

$$A^{-1} = (\operatorname{cof} A)^t = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Seja $b = (b_1, b_2, b_3)$ um elemento arbitrário de $\mathbb{R}^3$, que escrevemos na forma de vector coluna. Aplicamos o método de eliminação de Gauss à matriz aumentada $\left[B \,\vdots\, b\right]$, com a habitual convenção de notação: $X \xrightarrow{E} Y$ significa que $Y = EX$.

$$[B \vdots b] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & b_1 \\ 3 & 2 & 1 & | & b_2 \\ 2 & 5 & 9 & | & b_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & b_1 \\ 0 & -4 & -8 & | & b_2 - 3b_1 \\ 0 & 1 & 3 & | & b_3 - 2b1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & b_1 \\ 0 & -4 & -8 & | & b_2 - 3b_1 \\ 0 & 0 & 1 & | & b_3 + b_2/4 - 11b_1/4 \end{bmatrix} = [U \vdots c]$$

em que

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1 \end{bmatrix}.$$

O método de eliminação de Gauss mantém invariante o conjunto das soluções de $Bu = b$ e, portanto, os sistemas $Bu = b$ e $Uu = c$ (U e c estão definidos acima e são, respectivamente, o resultado da eliminação de Gauss aplicado à matriz dos coeficientes e ao vector dos termos independentes) têm o mesmo conjunto de soluções. Como U é uma matriz triangular superior sem zeros na diagonal principal (ou seja, U tem tantos pivôs quantas as linhas ou colunas), a equação $Uu = c$ tem uma única solução, que pode ser obtida recursivamente. Sendo o processo válido para qualquer vector $b \in \mathbb{R}^3$, fica estabelecido o resultado pretendido.

3. Vimos na alínea 1 que a matriz A é invertível. Consequentemente, a única solução Bv de $ABv = e_3$, com $e_3 = (0, 0, 1)$ (escrito como vector coluna) é tal que $Bv = b$, em que b coincide com a terceira coluna de A^{-1}:

$$b = A^{-1}e_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, na alínea anterior vimos que o vector $v = (v_1, v_2, v_3)$, solução de $Bv = b$ se pode obter resolvendo o sistema mais simples $Uv = c$, cuja matriz aumentada é neste caso

$$[U \vdots c] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & -2 \\ 0 & -4 & -8 & | & 7 \\ 0 & 0 & 1 & | & 31/4 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo, obtém-se

$$\begin{cases} v_3 = 31/4 \\ -4v_2 - 8v_3 = 7 \\ v_1 + 2v_2 + 3v_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_3 = 31/4 \\ v_2 = -69/4 \\ v_1 = 37/4 \end{cases}$$

Em conclusão, a solução da equação $ABv = e_3$ é $v = 1/4(37, -69, 31)$.

Exercício 5 *[2010/11 - 1° Teste - V1 - Problema 3 - MEEC]*

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine sucessivamente:

a) A matriz dos cofactores de A;

b) O determinante de A;

c) (Todas) as soluções da equação $Au = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

. . . .

Resolução:

a) Usando a notação habitual: $\operatorname{cof} A = [a'_{ij}]$, com $a'_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$, em que a matriz A_{ij} se obtém de A eliminando a linha i e a coluna j, neste caso temos:

$$\begin{array}{lll} a'_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -1, & a'_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1, & a'_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1, \\ a'_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2, & a'_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2, & a'_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2, \\ a'_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1, & a'_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, & a'_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1, \end{array}$$

pelo que a matriz dos cofactores de A é

$$\operatorname{cof} A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

b) Uma vez que já conhecemos os cofactores de A o método mais simples para calcular o determinante consiste em usar a regra de Laplace, apesar de a matriz dada não ter nenhum zero. Usando a regra de Laplace, por expansão segundo a primeira linha (por exemplo), temos

$$\det A = a_{11}a'_{11} + a_{12}a'_{12} + a_{13}a'_{13} = a'_{11} + 2a'_{12} + a'_{13} = -1 + 2 - 1 = 0.$$

c) Como o segundo membro da equação a resolver coincide com a terceira coluna da matriz A, uma solução (particular) daquela equação é $u_p = (0, 0, 1)$. Resulta da alínea anterior que que a matriz A não é invertível (pois $\det A = 0$) e, portanto, a equação considerada tem infinitas soluções. A solução geral da equação em estudo é da forma $u = u_p + u_h$ em que $u_h \in N_A$, ou seja, $Au_h = 0$. Falta pois determinar as soluções desta equação (homogénea). Para tal podemos usar qualquer um dos dois processos a seguir indicados:

1 - Como se sabe, para qualquer matriz quadrada é válida a relação $A(\operatorname{cof} A)^t = (\det A)I$, em que I é a matriz identidade da ordem considerada. Por outro lado, vimos na alínea anterior que $\det A = 0$. Consequentemente, as colunas de $(\operatorname{cof} A)^t$ ou, o que é equivalente, as linhas de $\operatorname{cof} A$, contêm vectores que são soluções da equação $Au_h = 0$. Daqui resulta que as soluções desta equação são da forma $u_h = y(-1, 1, -1)$ com $y \in \mathbb{R}$ arbitrário.

2 - Usando o método de eliminação de Gauss:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

Daqui resulta que as soluções $u_h = (x, y, z)$ são tais que

$$\begin{cases} y + z & = 0 \\ x + 2y + z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -y \\ x = -y \end{cases}$$

e $y \in \mathbb{R}$ é arbitrário. Consequentemente, $u_h = y(-1, 1, -1), y \in \mathbb{R}$.

Tendo em conta as observações anteriores, concluímos finalmente que o conjunto das soluções da equação $Au = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é

$$\{u = (0, 0, 1) + y(-1, 1, -1) : y \in \mathbb{R}\} = \{u = (-y, y, 1 - y) : y \in \mathbb{R}\}.$$

Exercício 6 *[2012/13 - 1° Teste - V1 - Problema 4 - LEGM, MEC]*

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

e note que elas apenas diferem na primeira linha. Determine sucessivamente:

a) A matriz dos cofactores de A;

b) Os determinantes das matrizes A e B;

c) (Todas) as soluções da equação $ABu = \begin{bmatrix} 16 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

. . . .

Resolução:

a) Por definição a matriz dos cofactores de A é a matriz

$$\operatorname{cof} A = [a'_{ij}], \quad a'_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij},$$

em que A_{ij} se obtém de A eliminando a linha i e a coluna j. Neste caso particular temos:

$$\begin{aligned}
a'_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1, & a'_{12} &= -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1, & a'_{13} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1, \\
a'_{21} &= -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 9, & a'_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -10, & a'_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7, \\
a'_{31} &= \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -6, & a'_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 7, & a'_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5,
\end{aligned}$$

pelo que a matriz dos cofactores de A é

$$\operatorname{cof} A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 9 & -10 & 7 \\ -6 & 7 & -5 \end{bmatrix}.$$

b) Uma vez que já conhecemos os cofactores de A o método mais simples para calcular o determinante de A consiste em usar a regra de Laplace, apesar de a matriz dada não ter nenhum zero. Como, por outro lado, a matriz B só difere de A no elemento 13, os cofactores dos elementos da primeira linha (ou, em alternativa, da terceira coluna) são iguais para ambas as matrizes:

$$a'_{11} = b'_{11} = 1, \quad a'_{12} = b'_{12} = -1, \quad a'_{13} = b'_{13} = 1.$$

Então, usando a regra de Laplace, por expansão segundo a primeira linha, temos

$$\det A = a_{11}a'_{11} + a_{12}a'_{12} + a_{13}a'_{13} = a'_{11} + 3a'_{12} + 3a'_{13} = 1 - 3 + 3 = 1,$$

$$\det B = b_{11}b'_{11} + b_{12}b'_{12} + b_{13}b'_{13} = b'_{11} + 3b'_{12} + 2b'_{13} = 1 - 3 + 2 = 0.$$

c) Como vimos na alínea anterior o determinante de A é diferente de zero e, portanto, a matriz A é invertível. A sua inversa é dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\operatorname{cof} A)^t = (\operatorname{cof} A)^t = \begin{bmatrix} 1 & 9 & -6 \\ -1 & -10 & 7 \\ 1 & 7 & -5 \end{bmatrix}.$$

Sendo A invertível, a equação $ABu = \begin{bmatrix} 16 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ é equivalente a

$$Bu = A^{-1} \begin{bmatrix} 16 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad Bu = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Note-se agora que o segundo membro da última desta equações coincide com a primeira coluna da matriz B, pelo que uma solução particular desta equação é o vector $u_p = (1, 0, 0)$ escrito como vector coluna. Como se sabe, a solução geral u dessa equação é da forma

$$u = u_p + u_h, \quad \text{com } u_h \in N_B,$$

em que $N_B = \{u_h : Bu_h = 0\}$ é o núcleo da matriz B e pode ser facilmente determinado usando o método de eliminação de Gauss. Implementando-o, vem

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -7 & -7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde se conclui facilmente que $u_h = \alpha(1, -1, 1), \alpha \in \mathbb{R}$. Consequentemente a solução geral da equação considerada é da forma

$$u = (1, 0, 0) + \alpha(1, -1, 1) = (1 + \alpha, -\alpha, \alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Exercício 7 *[2013/14 - 1° Teste - V1 - Problema 4 - LEGM, MEC]*

Considere a matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ dada por $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -8 \end{bmatrix}$ e seja $b = \begin{bmatrix} 1 \\ \det A \\ 3 \end{bmatrix}$. Determine:

a) A matriz dos cofactores de A e o determinante de A; b) As soluções da equação $Au = b$; c) Dessas soluções a que pertence ao plano $P = \{\alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

d) Mostre que uma matriz quadrada não pode ser simultaneamente singular e invertível.

. . . .

Resolução:

(a) Por definição, a matriz dos cofactores de A, cof A, é a dada por

$$\text{cof}\, A = [a'_{ij}]_{i,j=1}^{3}, \quad a'_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij},$$

em que A_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ é a matriz de ordem 2 que se obtém de A eliminando a linha i e a coluna j. Assim temos:

$$\begin{aligned} a'_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} \\ &= -8 - 10 = -18 \end{aligned} ; \qquad \begin{aligned} a'_{12} &= -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} \\ &= -(-16 - 2) = 18 \end{aligned} ; \qquad \begin{aligned} a'_{13} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 10 - 1 = 9 \end{aligned} ;$$

$$\begin{aligned} a'_{21} &= -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} \\ &= -(-16 + 10) = 6 \end{aligned} ; \qquad \begin{aligned} a'_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} \\ &= -8 + 2 = -6 \end{aligned} ; \qquad \begin{aligned} a'_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ &= -(5 - 2) = -3 \end{aligned} ;$$

$$\begin{aligned} a'_{31} &= \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 4 + 2 = 6 \end{aligned} ; \qquad \begin{aligned} a'_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -(2 + 4) = -6 \end{aligned} ; \qquad \begin{aligned} a'_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 - 4 = -3 \end{aligned} .$$

Consequentemente,

$$\operatorname{cof} A = \begin{bmatrix} -18 & 18 & 9 \\ 6 & -6 & -3 \\ 6 & -6 & -3 \end{bmatrix}.$$

Uma vez que já foram determinados os cofactores de A, para calcular o determinante de A vamos usar a regra de Laplace,

$$\det A = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}a'_{ij} = \sum_{i=1}^{3} a_{ij}a'_{ij}$$

por expansão segundo uma linha ou coluna de A. Neste caso, não havendo elementos nulos na matriz A, não há escolha preferencial do ponto de vista do trabalho de cálculo. Escolhendo, a título de exemplo, a linha $i = 1$, tem-se:

$$\det A = a_{11}a'_{11} + a_{12}a'_{12} + a_{13}a'_{13} = 1 \times (-18) + 2 \times 18 - 2 \times 9 = 0.$$

(b) As soluções do sistema $Au = b$ podem ser obtidas pelo método de eliminação de Gauss. Neste caso, o segundo membro depende do valor do determinante da matriz dos coeficientes, que foi determinado anteriormente, $b = (1, 0, 3)$. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz aumentada do sistema $\left[A \vdots b\right]$, com a habitual convenção de notação: $X \xrightarrow{E} Y$ significa que $Y = EX$, vem

$$\left[A \vdots b\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -8 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[U \vdots c\right]$$

em que

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

O método de eliminação de Gauss mantém invariante o conjunto das soluções de $Au = b$ e, portanto, os sistemas $Au = b$ e $Uu = c$ (U e c estão definidos acima e são, respectivamente, o resultado da eliminação de Gauss aplicado à matriz dos coeficientes e ao vector dos termos independentes) têm o mesmo conjunto de soluções. Como U é uma matriz triangular superior com um zero na diagonal principal, na posição 33, sendo a linha 3 nula, e o vector c tem a 3ª componente nula, o sistema $Uu = c$ é possível e indeterminado. As soluções podem ser obtidas em função da incógnita livre (a terceira, a que corresponde à coluna sem pivô), por um processo recursivo. Usando $u = (x, y, z)$ para o vector solução, $z \in \mathbb{R}$ é arbitrário. Da segunda equação obtém-se: $-3y + 6z = -2 \Leftrightarrow y = 2z + 2/3$. Substituíndo este resultado na primeira equação: $x + 2y - 2z = 1$, vem $x = -2z - 1/3$. Estes resultados poderiam ser obtidos directamente pelo método de Gauss-Jordan se a eliminação prosseguisse, dispensando a determinação recursiva das incógnitas.

Assim se conclui que o conjunto S das soluções de $Au = b$ é dado por

$$\begin{aligned} S &= \{u \in \mathbb{R}^3 : u = (-1/3 - 2z, 2/3 + 2z, z), z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{u \in \mathbb{R}^3 : u = (-1/3, 2/3, 0) + z(-2, 2, 1), z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

(c) O plano P é caracterizado por ser formado por vectores de $\mathbb{R}^3$ com a terceira componente nula. Ora, das soluções anteriormente determinadas a única que satisfaz a esta condição é $(-1/3, 2/3, 0)$ (a solução particular, correspondente a tomar $z = 0$), pelo que $\alpha = -1/3, \beta = 2/3$. Consequentemente, $S \cap P = \{(-1/3, 2/3, 0)\}$.

Alternativamente, poderiamos ter usando o seguinte procedimento: Escrevendo os vectores de P na forma de vectores coluna e tendo em conta que

$$A\left(\alpha\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)=\alpha\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}2\\1\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\\1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix}$$

facilmente se conclui que o par (α,β) solução da equação

$$\begin{bmatrix}1&2\\2&1\\1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\\det A\\3\end{bmatrix}\qquad(\det A=0)$$

coincide com o par das duas primeiras componentes de vector $(-1/3,2/3,0)$, solução particular da equação considerada em b), i.e. $\alpha=-1/3,\beta=2/3$ (Verifique!).

(d) Efectivamente, supondo que a matriz quadrada A é invertível, com inversa A^{-1}, o sistema de equações $Au=0$ tem como única solução o vector zero, pois $u=(A^{-1}A)u=A^{-1}(Au)=A^{-1}0=0$. Por outro lado, supondo que a matriz quadrada A é singular, tal significa que a matriz triangular superior U que dela se obtém por eliminação de Gauss, tem (pelo menos) um zero na diagonal principal, sendo o sistema de equações $Uu=0$ possível e indeterminado, com grau de indeterminação maior ou igual a 1. Como os sistemas $Au=0$ e $Uu=0$ têm o mesmo conjunto de soluções, tal implica que $Au=0$ tem soluções não nulas. Daqui resulta que A não pode ser simultaneamente singular e invertível.

Exercício 8 *[2013/14 - Exame - V1 - Problema 6 - LEGM, MEC]*

Sejam $\mu\in\mathbb{R}$ e $A_\mu=\begin{bmatrix}0&3&-1\\1&5&\mu\\2&\mu^2&2(\mu+1)\end{bmatrix}$.

(a) Calcule o determinante de A_μ (em função de μ); (b) Determine a característica de A_μ (em função de μ); (c) Para $\mu=1$ determine a matriz dos cofactores de A_1 e use-a para obter a inversa de A_1; (d) Seja X uma matriz invertível, com inversa X^{-1}, X^t a sua transposta e $\operatorname{cof} X$ a matriz dos cofactores de X: mostre que (i) X^t é invertível e que (ii) $(\operatorname{cof} X)^t=\operatorname{cof}(X^t)$.

....

Resolução:

(a) e (b) Tendo em conta o que se pede na alínea (b), há vantagem em resolver simultaneamente (a) e (b), uma vez que o método de eliminação de Gauss também permite calcular o determinante de A_μ. Implementando-o, obtém-se:

$$A_\mu=\begin{bmatrix}0&3&-1\\1&5&\mu\\2&\mu^2&2(\mu+1)\end{bmatrix}\xrightarrow{P}\begin{bmatrix}1&5&\mu\\0&3&-1\\2&\mu^2&2(\mu+1)\end{bmatrix}\xrightarrow{E_1}\begin{bmatrix}1&5&\mu\\0&3&-1\\0&\mu^2-10&2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_2}\begin{bmatrix}1&5&\mu\\0&3&-1\\0&0&2+\frac{\mu^2-10}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&5&\mu\\0&3&-1\\0&0&\frac{(\mu-2)(\mu+2)}{3}\end{bmatrix}=U_\mu$$

Como se sabe, em consequência da regra do produto de determinantes, o método de eliminação de Gauss não altera o valor absoluto do determinante, apenas podendo alterar o sinal caso haja trocas de linhas, como foi o caso no primeiro passo. Então

$$\det A_\mu=-\det U_\mu=-(\mu-2)(\mu+2).$$

A característica de A_μ, $\operatorname{car} A_\mu$, é, por definição, o número de pivôs de U_μ, pelo que

$$\operatorname{car} A_\mu = \begin{cases} 2 & \text{se } \mu = \pm 2, \\ 3 & \text{se } \mu \neq \pm 2. \end{cases}$$

(c) Por definição, a matriz dos cofactores de A_1, $\operatorname{cof} A_1$, é a dada por

$$\operatorname{cof} A_1 = [a'_{ij}]_{i,j=1}^3, \quad a'_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_1)_{ij},$$

em que $(A_1)_{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ é a matriz de ordem 2 que se obtém de A_1 eliminando a linha i e a coluna j. Assim temos:

$$\begin{aligned} a'_{11} &= \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 20 - 1 = 19 \end{aligned} ; \quad \begin{aligned} a'_{12} &= -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= -(4-2) = -2 \end{aligned} ; \quad \begin{aligned} a'_{13} &= \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 - 10 = -9 \end{aligned} ;$$

$$\begin{aligned} a'_{21} &= -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= -(12+1) = -13 \end{aligned} ; \quad \begin{aligned} a'_{22} &= \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 0 + 2 = 2 \end{aligned} ; \quad \begin{aligned} a'_{23} &= -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -(0-6) = 6 \end{aligned} ;$$

$$\begin{aligned} a'_{31} &= \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3 + 5 = 8 \end{aligned} ; \quad \begin{aligned} a'_{32} &= -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -(0+1) = -1 \end{aligned} ; \quad \begin{aligned} a'_{33} &= \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 0 - 3 = -3 \end{aligned} .$$

Consequentemente,

$$\operatorname{cof} A_1 = \begin{bmatrix} 19 & -2 & -9 \\ -13 & 2 & 6 \\ 8 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

A inversa de A_1 obtém-se da matriz dos cofactores pela fórmula ${A_1}^{-1} = \frac{1}{\det A_1}(\operatorname{cof} A_1)^t$. Resulta da alínea a) que $\det A_1 = 3$, pelo que

$${A_1}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 19 & -13 & 8 \\ -2 & 2 & -1 \\ -9 & 6 & -3 \end{bmatrix}.$$

(d) Sendo X invertível com inversa X^{-1}, tem-se

$$XX^{-1} = X^{-1}X = I.$$

Por transposição das igualdades anteriores, segue-se que

$$(X^{-1})^t X^t = X^t (X^{-1})^t = I,$$

o que significa que X^t é invertível, com inversa $(X^{-1})^t$, ou seja $(X^t)^{-1} = (X^{-1})^t$, o que prova a primeira parte. Tomando Y em vez de X nas relações anteriores conclui-se que, se Y é invertível, então $(Y^t)^{-1} = (Y^{-1})^t$. Como se sabe e usámos na alínea anterior, a inversa de Y pode ser calculada por $Y^{-1} = \frac{1}{\det Y}(\operatorname{cof} Y)^t$. Então, tomando $X = Y^t$, X e Y são simultaneamente invertíveis, $\det X = \det Y$ e

$$X^{-1} = (Y^t)^{-1} = (Y^{-1})^t = \frac{1}{\det Y}\operatorname{cof} Y = \frac{1}{\det X}\operatorname{cof} X^t.$$

Tendo em conta que $X^{-1} = \frac{1}{\det X}(\operatorname{cof} X)^t$ e a unicidade da inversa de uma matriz, tal prova que

$$(\operatorname{cof} X)^t = \operatorname{cof} X^t.$$

Exercício 9 *[2014/15 - 1° Teste - V1 - Problema 4 - MEEC]*

Considere as matrizes reais: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -3 \\ -2 & 6 & 5 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Mostre que A é invertível e determine a sua inversa pelo método de Gauss-Jordan; (b) Sendo $b = (0,0,1)$, determine se existirem (todas) as soluções do SEL: $ABu = b$; (c) Alguma dessas soluções pertence ao plano $P = \{(x,y,z) : y = z\}$?

. . . .

Resolução:

(a) Aplicamos o método de Gauss-Jordan à matriz aumentada $[A \vdots I]$, com a habitual convenção de notação: $X \xrightarrow{E} Y$ significa que $Y = EX$. Tem-se

$$[A \vdots I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$(A \text{ invertível } \Leftarrow) \quad \xrightarrow{E_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -11 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{D^{-1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 2 & -1 \end{array}\right] = [I \vdots B]$$

em que

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad F_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

No final da 1ª fase, que coincide com o final da eliminação de Gauss, conclui-se que A é não-singular (ou invertível), pois a matriz A deu origem a uma matriz triangular superior sem zeros na diagonal principal. No final do processo, tem-se $B = D^{-1}F_3E_2E_1$ é tal que $BA = I$. Como B é invertível, por ser o produto de matrizes elementares cada uma delas invertível, conclui-se que é a inversa de A,

$$A^{-1} = B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ -6 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

(b) Vimos na alínea anterior que A é invertível. Consequentemente, a equação que se pretende resolver é equivalente à seguinte:

$$Bu = \tilde{b}, \text{ com } \tilde{b} = A^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

pois $Bu = A^{-1}(ABu) = A^{-1}b$. Note-se que o vector $\tilde{b}$ coincide com a terceira coluna de A^{-1}. Para resolver a equação anterior podemos usar o método de eliiminação de Gauss-Jordan, aplicado à matriz aumentada $[B \vdots \tilde{b}]$. Implementando-o, obtém-se

$$[B \vdots \tilde{b}] \quad = \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & -3 & 1 & \vdots & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & -2 & 0 & \vdots & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 1/2 \\ 0 & 2 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{D^{-1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix},$$

em que

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad F_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Daqui se conclui que o sistema em consideração é possível e indeterminado, sendo a terceira das incógnitas livre. Sendo $u = (x, y, z)$ (escrito como vector coluna), vem $x = 1/2 - z, y = 1/2, z \in \mathbb{R}$, pelo que a solução geral da equação original é dada por

$$u = (1/2, 1/2, 0) + z(-1, 0, 1), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Em alternativa, para determinar as soluções, poder-se-ia ter usado apenas a eliminação de Gauss.

(c) O plano P é caracterizado por ter as segunda e terceira componentes iguais. Ora, como as soluções anteriormente obtidas têm a segunda componente determinada, $y = 1/2$, a solução u_P que pertence ao plano P é aquela que se obtém da solução geral tomando $z = 1/2$, ou seja,

$$u_P = (0, 1/2, 1/2).$$

Exercício 10 *[2014/15 - Exame - V1 - Problema 6 - MEEC]*

Sejam $\mu \in \mathbb{R}$ e $A_\mu = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & \mu^2 \\ 2 & \mu+6 & 4 \end{bmatrix}$.

a) Calcule, em função de μ, a característica de A_μ; b) Calcule, em função de μ, o determinante de A_μ; c) Para $\mu = 2$, considere o sistema de equações lineares $A_2 u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ e determine as suas soluções (caso as haja).

. . . .

Resolução:

(a) Por definição, a característica de A_μ, car A_μ, é o número de pivôs da matriz que se obtém de A_μ por eliminação de Gauss; Implementando-o para este caso concreto, usando a habitual convenção de notação, vem

$$A_\mu = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & \mu^2 \\ 2 & \mu+6 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \mu^2-4 \\ 0 & \mu+2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{P} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & \mu+2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu^2-4 \end{bmatrix},$$

em que

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tendo em conta que $\mu^2 - 4 = (\mu - 2)(\mu + 2)$, conclui-se que

$$\operatorname{car} A_\mu = \begin{cases} 1 & , \text{ se } \mu = -2 \\ 2 & , \text{ se } \mu = 2 \\ 3 & , \text{ se } \mu \neq \pm 2 \end{cases} .$$

(b) Um dos métodos de cálculo de determinantes que vimos foi baseado no método eliminação de Gauss: O valor absoluto do determinante não é alterado por este, havendo apenas troca do sinal por cada troca de linhas efectuada ao longo do processo. Tendo em conta que no passo 2 trocámos as linhas 2 e 3, concluímos que:

$$\det A_\mu = -\det U_\mu = -(\mu + 2)(\mu^2 - 4) = -(\mu - 2)(\mu + 2)^2,$$

pois o determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos da diagonal principal.

(c) Uma vez que já implementámos a eliminação de Gauss para a matriz dos coeficientes, basta analisar como se altera o termo independente. Tem-se

$$c = PEb = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, a matriz aumentada do SEL considerado ($\mu = 2$) é transformada como se segue:

$$[A_2 \vdots b] \xrightarrow{PE} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 4 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} = [U_2 \vdots c].$$

Daqui resulta que o SEL é possível, pois as características das matrizes dos coeficientes e aumentada do SEL são iguais, que o sistema é indeterminado (havendo uma linha de zeros na matriz dos coeficientes, a terceira, a componente de ordem 3 do termo independente é nula), que não havendo pivô na terceira coluna a terceira incógnita é livre, e que as soluções $u = (x, y, z)$ do sistema com $z \in \mathbb{R}$, são tais que $y = 1/4$ e $x + 2y + 2z = 1$ (ou, o que é equivalente $x = -2z + 1/2$). Consequentemente, a solução geral do SEL considerado é

$$u = (-2z + 1/2, 1/4, z) = (1/2, 1/4, 0) + z(-2, 0, 1), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Exercício 11 *[2005/6 - 1° Teste - Problema 6 - LEEC]*

Considere a matriz $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ dada por $S = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 12 & 10 \end{bmatrix}$.

a) Use o método de Gauss-Jordan para mostrar que S é invertível e para obter a sua inversa.

b) Seja $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$ e suponha que S representa a matriz de mudança da base $\mathcal{B}$ para a base canónica de $\mathbb{R}^3$. Identifique a base $\mathcal{B}$ e determine as componentes do vector $x = (1, 2, 3)$ nesta base.

. . . .

__Resolução__:

a) Aplicamos o método de Gauss-Jordan à matriz aumentada $[S \vdots I]$, com a habitual convenção de notação: $X \xrightarrow{E} Y$ significa que $Y = EX$.

$$[S \vdots I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 12 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$(S \text{ invertível } \Leftarrow) \quad \xrightarrow{E_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 0 & -7 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{D^{-1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -1/2 \end{array}\right] = [I \vdots B]$$

No final da 1ª fase, que coincide com o final da eliminação de Gauss, conclui-se que S é não-singular (ou invertível), pois a matriz S deu origem a uma matriz triangular superior sem zeros na diagonal principal. No final do processo, tem-se $B = D^{-1}F_2F_3E_2E_1$ é tal que $BS = I$. Como B é invertível, por ser o produto de matrizes elementares cada uma delas invertível, conclui-se que é a inversa de S, $S^{-1} = B$.

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3/2 & -1/2 & 1/2 \\ -2 & 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

b) $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3) = ((-1, 3/2, -2), (2, -1/2, 1), (0, 1/2, -1/2))$

Justificação: Se S é a matriz de mudança da base $\mathcal{B}$ para a base canónica, então S^{-1} é a matriz de mudança da base canónica para a base $\mathcal{B}$ e, na coluna $j = 1, 2, 3$ desta matriz figuram as componentes do vector $v_j \in \mathcal{B}$ na base canónica.

Sendo y o vector coluna das componentes do vector $v = (1, 2, 3)$ na base $\mathcal{B}$ e $x = [1\ \ 2\ \ 3]^t$ então, por definição da matriz de mudança de base, é válida a relação $y = Sx$. Neste caso:

$$y = Sx = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 12 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 \\ -9 \\ 52 \end{bmatrix}$$

e, portanto,

$$v = (1, 2, 3) = -19\, v_1 - 9\, v_2 + 52\, v_3.$$

Exercício 12 *[2005/6 - 1° Teste - Problema 7 - LEEC]*

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e considere a matriz A_α dada por:

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ \alpha & 1 & -2 \\ 2 & 5 & \alpha \end{bmatrix}.$$

a) Calcule o determinante de A_α e indique todos os valores de α para os quais A_α é invertível.

b) Para $\alpha = 1$ indique a matriz dos cofactores de A_α, $\operatorname{cof} A_\alpha$, e use-a para determinar a inversa de A_α.

c) Para $\alpha = 2$ indique uma base para N_{A_α}, o núcleo ou espaço nulo de A_α.

. . . .

Resolução:

a) Usando, por exemplo, a fórmula de Laplace por expansão segundo a 1ª linha, obtém-se:

$$\begin{aligned} \det A_\alpha &= (-1)(-1)\begin{vmatrix} \alpha & -2 \\ 2 & \alpha \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \alpha^2 + 4 - (5\alpha - 2) \\ &= \alpha^2 - 5\alpha + 6 = (\alpha - 2)(\alpha - 3) \end{aligned}$$

uma vez que as raízes do polinómio $\det A_\alpha$ são: 2 e 3. A condição necessária e suficiente de invertibilidade de A_α é $\det A_\alpha \neq 0$. Sendo assim, A_α é invertível se e só se α é um número real distinto de 2 e de 3, ou ainda, A_α é invertível se e só se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$.

b) Já vimos que para $\alpha = 1$ A_α é invertível. Usando a expressão que define os cofactores dos elementos de $A := A_1 = [a_{ij}]_{i,j=1}^3$, $a'_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$, em que A_{ij} é a matriz que se obtém de A eliminando a linha i e a coluna j, obtém-se

$$\operatorname{cof} A = \begin{bmatrix} 11 & -5 & 3 \\ -4 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A inversa de A é dada por $A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\operatorname{cof} A)^t$. Como $\det A = 2$, vem

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 11 & -4 & 3 \\ -5 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Para $\alpha = 2$ já vimos que a matriz A_2 é singular e, portanto, não invertível. Consequentemente, temos para o núcleo de A_2: $N_{A_2} \neq \{0\}$. Vamos usar o método de eliminação de Gauss para determinar as soluções da equação homogénea $A_2 u = 0$:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{P_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_1} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_2} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

Obtivemos como era expectável uma linha nula. Escrevendo $u = (x\ y\ z)$ e tomando como incógnita livre z (que corresponde à coluna sem pivô, a terceira) as soluções de $A_2 u = 0$ e de $Uu = 0$ coincidem e são da forma $u = z(3/2, -1, 1)$ com $z \in \mathbb{R}$. Consequentemente, o núcleo de A_2 é gerado por um vector, $(3/2, -1, 1)$, constituindo este uma base de N_{A_2}.

Exercício 13 *[2005/6 - 1° Exame - V1 - Problema 11 - LEEC]*

Considere a matriz $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ dada por $S = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Mostre que S é invertível e obtenha a sua inversa.

b) Suponha que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ é uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$ em que as componentes do vector v_j, $j = 1, 2, 3$, na base canónica constituem a linha j da matriz S^2. Identifique a base $\mathcal{B}$ e determine as componentes do vector $v = (1, 1, 1)$ nesta base.

. . . .

Resolução:

a) S é invertível se e só se o seu determinante é diferente de zero. Sendo $\det S = 4$ a matriz S é invertível. Para determinar a inversa de S vamos usar a matriz dos cofactores de S, através da expressão:

$$S^{-1} = \frac{1}{\det S}(\operatorname{cof} S)^t.$$

Tem-se

$$\operatorname{cof} S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

e, portanto,

$$S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Alternativamente poder-se-ia ter usado outro processo quer para mostrar que S é invertível quer para determinar a sua inversa, por exemplo, o método de Gauss-Jordan.

b) Comecemos por identificar os vectores v_j, $j = 1, 2, 3$. Tem-se

$$S^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix},$$

pelo que

$$v_1 = (-1, -1, 3), \quad v_2 = (3, -1, -1) \quad v_3 = (-1, 3, -1).$$

A base pretendida é pois $\mathcal{B} = ((-1, -1, 3), (3, -1, -1), (-1, 3, -1))$.

Para determinar o vector $w = (\alpha, \beta, \gamma)$ das componentes do vector $v = (1, 1, 1)$ nesta base, ou seja $v = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$, resolvemos o sistema de equações:

$$(S^2)^t w = v \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

cuja solução é $\alpha = \beta = \gamma = 1$. Conclui-se assim que o vector v tem as mesmas componentes quer na base canónica quer na base $\mathcal{B}$.

Também aqui poder-se-ia ter usado outro processo para determinar o vector w, nomeadamente usando a matriz de mudança da base canónica para a base $\mathcal{B}$.

Exercício 14 *[2006/7 - 1° Teste - Problema 7 - MEC]*

1. Seja $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset \mathbb{R}^4$ com

$$v_1 = (1,1,2,3) \quad , \quad v_2 = (1,1,-2,-3) \quad , \quad v_3 = (1,1,4,6) \quad , \quad v_4 = (3,3,4,6) \quad .$$

   a) Indique a dimensão e determine uma base B do subespaço $L(S)$, o subespaço gerado por S;
   b) Mostre que o vector $u = (1,-1,0,0)$ não pertence a $L(S)$;
   c) Construa uma base de $\mathbb{R}^4$ que contém o conjunto B.

2. Sendo X uma matriz quadrada, representemos por cof X a matriz dos cofactores de X.
   Sejam A e B matrizes invertíveis da mesma ordem. Mostre que

$$\operatorname{cof}(AB) = \operatorname{cof} A \operatorname{cof} B \ .$$

....

Resolução:

1.a) Para saber qual o maior subconjunto de $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ que é linearmente independente em $\mathbb{R}^4$, consideramos, por exemplo, a matriz L cuja linha i contém as componentes do vector v_i, $1 = 1,2,3,4$, e consideramos o problema de obter uma base para o espaço das linhas desta matriz, o que pode ser feito aplicando a L o método de eliminação de Gauss:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U.$$

Como o método de eliminação de Gauss mantém invariante o espaço das linhas de uma matriz, conclui-se que o conjunto formado linhas 1 e 2 de U, o maior subconjunto das linhas de U linearmente independente, é uma base para o espaço das linhas de L. Assim, $\dim L(S) = 2$ e uma base B para o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por S é:

$$B = \{u_1, u_2\}, \quad u_1 = (1,1,2,3), \ u_2 = (0,0,-4,-6).$$

Alternativamente, podia indicar-se para B o conjunto das duas primeiras linhas de L, $B = \{v_1, v_2\}$, uma vez que este dá origem, por eliminação de Gauss, às linhas não nulas de U.

1.b) Pretende-se mostrar que $u = (1,-1,0,0) \notin L(B) = L(S)$. Para tal que basta mostrar que a característica da matriz cujas linhas contêm as componentes dos vectores u_1, u_2 e u é igual a 3, uma vez que já sabemos que a característica da submatriz formada pelas duas primeiras linhas é igual a 2, conclusão que se pode obter usando novamente eliminação de Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{P} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \end{bmatrix}.$$

Daqui se conclui que, efectivamente, a característica da matriz é igual a 3 e, portanto, que $u \notin L(B)$.

1.c) Para obter uma base de $\mathbb{R}^4$, basta considerar um conjunto linearmente independente formado por 4 elementos. Da alínea anterior decorre que o conjunto $B \cup \{u\}$, com 3 elementos, é linearmente independente em $\mathbb{R}^4$. Então para obter uma base de $\mathbb{R}^4$ que contém B basta acrescentar ao conjunto anterior mais um elemento, por forma que o conjunto resultante seja linearmente independente. Um elemento nestas condições é, por exemplo, $v = (0,0,0,1)$, uma vez que se acrescentarmos mais uma linha à matriz considerada na alínea anterior com as componentes deste vector, essa linha é invariante pela aplicação do método de eliminação de Gauss e, portanto, a característica dessa matriz é igual a 4. Tal significa que o conjunto $B \cup \{u, v\}$ é linearmente independente e, portanto, é uma base de $\mathbb{R}^4$ que contém B.

2. Sendo A e B matrizes invertíveis da mesma ordem, a prova da igualdade $\text{cof}\,(AB) = \text{cof}\,A\text{cof}\,B$ pode ser feita com base nas seguintes propriedades bem conhecidas, válidas para quaisquer duas matrizes invertíveis da mesma ordem:

$$(1)\ \det(XY) = \det X \det Y \neq 0, \quad (2)\ (XY)^t = Y^t X^t,$$
$$(3)\ (XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1}, \quad (4)\ X^{-1} = \frac{1}{\det X}(\text{cof}\,X)^t.$$

Efectivamente, usando (4) tem-se

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{\det(AB)}[\text{cof}\,(AB)]^t\ .$$

Por outro lado, usando sucessivamente (3), (4), (2) e (1), obtém-se

$$\begin{aligned}(AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{\det A \det B}(\text{cof}\,B)^t\,(\text{cof}\,A)^t \\ &= \frac{1}{\det(AB)}(\text{cof}\,A\,\text{cof}\,B)^t\end{aligned}$$

Comparando as expressões obtidas, concluímos que

$$[\text{cof}\,(AB)]^t = (\text{cof}\,A\,\text{cof}\,B)^t$$

e, portanto, por transposição, obtém-se o resultado pretendido:

$$\text{cof}\,(AB) = \text{cof}\,A\,\text{cof}\,B.$$

Exercício 15 *[2007/8 - 1º Teste - Problema 6 - MEC]*

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = BA.$$

1. Mostre que A é invertível, determine a sua inversa e resolva a equação $Au = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

2. Identifique o núcleo da matriz B.

3. Sem efectuar mais cálculos, indique uma base para o núcleo da matriz C.

....

Resolução:

1. Para estabelecer o resultado podemos usar um dos dois processos abaixo indicados.

1º Processo - Aplicamos o método de Gauss-Jordan à matriz aumentada $[A \vdots I]$, com a habitual convenção de notação: $X \xrightarrow{E} Y$ significa que $Y = EX$. Tem-se

$$[A \vdots I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$(A \text{ é invertível } \Leftarrow) \quad \xrightarrow{E_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 & 1/2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 & 1/2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{D^{-1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -2 \end{array}\right] = [I \vdots B]$$

em que

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

No final da 1ª fase, que coincide com o final da eliminação de Gauss, conclui-se que A é não-singular (ou invertível), pois a matriz A deu origem a uma matriz triangular superior sem zeros na diagonal principal. No final do processo, tem-se $B = D^{-1}F_3E_2E_1$ é tal que $BA = I$. Como B é invertível, por ser o produto de matrizes elementares cada uma delas invertível, conclui-se que é a inversa de A,

$$A^{-1} = B = \begin{bmatrix} -5 & -3 & -6 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

2º Processo - Como se sabe, é condição necessária e suficiente para que A seja invertível que o seu determinante seja diferente de zero. Ora,

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 5 - 3 \times 2 = -1,$$

pelo que A é invertível. Para calcular a sua inversa podemos recorrer à matriz dos cofactores,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} [\mathrm{cof}\, A]^t.$$

Neste caso $\mathrm{cof}\, A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Consequentemente

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & -3 & -6 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Para concluir falta apenas resolver a equação $Au = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, que, como A é invertível, tem uma única solução dada por

$$u = A^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. O método de eliminação de Gauss mantém invariante o núcleo de uma matriz. Aplicando a eliminação de Gauss a B, obtém-se

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

As soluções de $Uu = 0$ são da forma $u = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ com $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrário. Consequentemente,

$$N_B = \{u \in \mathbb{R}^3 : Bu = 0\} = \{u \in \mathbb{R}^3 : Uu = 0\} = \{\alpha(-1, 1, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\} = L(\{(-1, 1, 0)\}).$$

3. Usando a invertibilidade de A, o conhecimento que temos do núcleo de B e da solução de $Au = [-1\ 1\ 0]^t$, podemos estabelecer as equivalências seguintes:

$$u \in N_C \Leftrightarrow BAu = 0 \Leftrightarrow v = Au \wedge Bv = 0 \Leftrightarrow u = A^{-1}v \wedge v \in N_B \Leftrightarrow u = \alpha A^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

em que $\alpha \in \mathbb{R}$. Logo, uma base para o núcleo de C é $\{(2, 0, 1)\}$.

Exercício 16 *[2007/8 - 1º Teste - Problema 7 - MEC]*

1. Seja $R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Determine

   a) uma base para o espaço das colunas de R,

   b) uma base para o núcleo de R.

   c) Sem efectuar mais cálculos, diga se é possível existir uma matriz S tal que RS é invertível.

2. Designe por $\mathcal{S}$ o subespaço de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ gerado pelas quatro matrizes seguintes:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

   a) Qual é a dimensão de $\mathcal{S}$?

   b) Sendo $M = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -10 & 1 \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, mostre que $M \in \mathcal{S}$ e que $N \notin \mathcal{S}$.

....

Resolução:

1. O método de eliminação de Gauss permite obter quer uma base para o espaço das colunas quer uma base para o núcleo de uma matriz: uma base para o espaço das colunas de R é formada pelas p colunas de R (em que p é o número de pivôs) que dão origem (i.e. da mesma ordem) por eliminação de Gauss às colunas com pivô; uma base para o núcleo de R é formada pelo dos r vectores (em que r é o número de incógnitas livres ou o número de colunas sem pivô) que se obtêm dando, sucessivamente, a cada uma das incógnitas livres o valor 1, o valor zero às restantes e determinando as outras componentes por forma a que o vector resultante pertença ao núcleo da matriz.

Apliquemos então a R a eliminação de Gauss:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U.$$

1-a) Como os pivôs figuram nas duas primeiras colunas de U, uma base $\mathcal{B}_{C_R}$ para o espaço das colunas é o conjunto formado pelas duas primeiras colunas de R,

$$\mathcal{B}_{C_R} = \{(1, -1, 2, 1), (2, 0, -1, 1)\}.$$

1-b) As soluções de $Ru = 0$ são da forma

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2u_2 - 3u_3 - 4u_4 \\ -u_3 - u_4 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_3 - 2u_4 \\ -u_3 - u_4 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = u_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u_4 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad u_3, u_4 \in \mathbb{R}.$$

Consequentemente, uma base $\mathcal{B}_{N_R}$ para o núcleo de R é

$$\mathcal{B}_{N_R} = \{(-1, -1, 1, 0), (-2, -1, 0, 1)\}.$$

1-c) Da eliminação de Gauss aplicada a R conclui-se, em particular, que R é singular, ou seja, que $\det R = 0$. Como, para qualquer matriz S de ordem 4 se tem $\det(RS) = \det R \det S$, conclui-se que $\det(RS) = 0$. Por outro lado, se existisse S tal que RS fosse invertível, S seria uma matriz de ordem 4 e $\det(RS) \neq 0$ (uma matriz é invertível se e só se o seu determinante não se anula). Estabelecemos assim uma contradição e, consequentemente, não é possível existir uma matriz S tal que RS seja invertível.

2. Comecemos por notar que, considerando em $\mathbb{R}^{2\times 2}$ a base canónica, as componentes de A_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ em relação a esta base constituem a coluna j da matriz R da alínea anterior. Consequentemente, um subconjunto das matrizes dadas é linearmente independente se e só se o correspondente conjunto das colunas de R for linearmente independente em $\mathbb{R}^4$. Do mesmo modo, um subconjunto das matrizes dadas gera $\mathcal{S}$ se e só se o correspondente conjunto das colunas de R gera o espaço das colunas desta matriz.

2-a) Assim, a dimensão de $\mathcal{S}$ coincide com a dimensão do espaço das colunas de R, sendo

$$\dim \mathcal{S} = 2,$$

pois, como vimos em 1, o espaço das colunas de R tem uma base constituída por 2 elementos.

2-b) Resulta do que se disse atrás, que uma matriz $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ pertence a $\mathcal{S}$ se e só se o vector $x \in \mathbb{R}^4$ das suas componentes relativamente à base canónica pertence ao espaço das colunas de R. Assim, basta mostrar que $m = [5\,3\,-10\,1]^t \in C_R$ e que $n = [1\,0\,2\,0]^t \notin C_R$, o que pode ser feito usando os passos da eliminação de Gauss considerados em 1. Tem-se

$$\tilde{m} = E_2E_1m = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in C_U, \quad \tilde{n} = E_2E_1n = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \notin C_U,$$

pelo que $m \in C_R$ e $n \notin C_R$. Consequentemente, $M \in \mathcal{S}$ e $N \notin \mathcal{S}$. Alternativamente, poderia ter-se usado a relação

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -10 & 1 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = -3A_1 + 4A_2$$

para mostrar que $M \in \mathcal{S} = L(\{A_1, A_2\})$, e poderia usar-se o facto de de que não existe nenhum par $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \alpha_1A_1 + \alpha_2A_2,$$

para mostrar que $N \notin \mathcal{S} = L(\{A_1, A_2\})$.

Exercício 17 *[2007/8 - 1° Exame - V1 - Problema 11 - MEC]*

Usando a habitual convenção de escrever os elementos de $\mathbb{R}^n$ na forma de vectores coluna, considere um sistema de equações na forma matricial $Au = b$, em que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

1. Obtenha uma base para N_A, o núcleo da matriz A;

2. Mostre que o vector $u = (5, -2, 1, 2, -3)$ pertence a N_A e indique as suas componentes em relação à base que indicou em 1.;

3. Escolha da lista seguinte um vector b para o qual o sistema $Au = b$ seja possível e determine o conjunto das soluções deste sistema.

   (a) b=(2,3,2), (b) b=(2,3,1), (c) b=(1,0,2), (d) b=(1,1,2).

. . . .

Resolução:

1. Para caracterizar o núcleo de A, $N_A = \{u \in \mathbb{R}^5 : Au = 0\}$, usamos o método de eliminação de Gauss:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

Daqui se conclui que o núcleo de A tem dimensão 3 (o número de incógnitas livres ou o número de colunas de U sem pivô). As soluções de $Au = 0$, que são as mesmas de $Uu = 0$, são da forma

$$u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2z - w - 3t \\ -w \\ z \\ w \\ t \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad z, w, t \in \mathbb{R}.$$

Consequentemente, o conjunto

$$\{(-2, 0, 1, 0, 0), (-1, -1, 0, 1, 0), (-3, 0, 0, 0, 1)\}$$

gera o núcleo de A e, tratando-se claramente de um conjunto linearmente independente, constitui uma base para aquele subespaço de $\mathbb{R}^5$.

2. Tendo em conta o significado de cada um dos vectores que constituem a base do núcleo de A indicada na alínea anterior, basta notar que as 3 últimas componentes do vector $u = (5, -2, 1, 2, -3)$ permitem imediatamente identificar as componentes pretendidas, visto que

$$(5, -2, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \textbf{-3}) = \mathbf{1}\ (-2, 0, 1, 0, 0) + \mathbf{2}\ (-1, -1, 0, 1, 0) \,\textbf{-3}\ (-3, 0, 0, 0, 1).$$

Daqui resulta não só que $(5, -2, 1, 2, -3)$ pertence a N_A mas também que o vector $(1, 2, -3)$ é o vector das componentes de u em relação à base indicada na alínea anterior, considerada como base ordenada (com a ordem aí atribuída).

3. O método de elinação de Gauss usado na primeira alínea permite identificar uma base para o espaço das colunas de A, C_A, sendo esta constituída pelas 2 primeiras colunas de A (aquelas que dão origem às colunas de U com pivô). Os vectores b para os quais $Au = b$ tem solução são aqueles que pertencem ao espaço das coluna de A. Os vectores indicados em (b) e (c) pertencem a C_A, já que

$$(2, 3, 1) = (1, 1, 1) + (1, 2, 0), \quad (1, 0, 2) = 2(1, 1, 1) - (1, 2, 0),$$

enquanto que os vectores indicados em (a) e (d) não pertencem a C_A, visto que os sistemas

$$(2, 3, 2) = \alpha(1, 1, 1) + \beta(1, 2, 0), \quad (1, 1, 2) = \alpha(1, 1, 1) + \beta(1, 2, 0)$$

são impossíveis.

Como se sabe o conjunto $\mathcal{S}$ das soluções de $Au = b$ para $b \in C_A$ é da forma

$$\mathcal{S} = \{u_p\} + N_A,$$

em que u_p é uma solução particular e N_A é o núcleo de A. Como vimos,

$$N_A = L(\{(-2,0,1,0,0),(-1,-1,0,1,0),(-3,0,0,0,1)\})$$

e podemos (por exemplo) tomar

$$u_p = (1,1,0,0,0) \text{ se } b = (2,3,1), \quad u_p = (2,-1,0,0,0) \text{ se } b = (1,0,2)$$

que são as soluções particulares que se obtêm em cada um dos casos dando às incógnitas livres o valor 0 (estas podem obter-se através de $Uu = E_2E_1b$).

Exercício 18 *[2008/9 - 1° Teste - Problema 8 - LEIC]*

Seja

$$S = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z - w = 0\}.$$

a) Mostre que S é um subespaço de $\mathbb{R}^4$, calcule a sua dimensão e indique uma base de S; Designe essa base por $\mathcal{B}_S$.

b) Escolha uma base ordenada $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ que contenha $\mathcal{B}_S$.

c) Como se representa na base canónica o elemento de $\mathbb{R}^4$ cujo vector das componentes na base $\mathcal{B}$ (que indicou na alínea anterior) é (1,2,3,4)?

. . . .

Resolução:

a) Para mostrar que S é um subespaço de $\mathbb{R}^4$ basta mostrar que são fechadas em S as operações de adição e de multiplicação de escalares por elementos de S. Sejam então $u = (x,y,z,w)$ e $\tilde{u} = (\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z},\tilde{w})$ elementos arbitrários de S e $\alpha \in \mathbb{R}$. Tem-se

$$u + \tilde{u} = (x+\tilde{x}, y+\tilde{y}, z+\tilde{z}, w+\tilde{w}), \quad \alpha u = (\alpha x, \alpha y, \alpha z, \alpha w)$$

e

$$x + \tilde{x} - (y+\tilde{y}) + z + \tilde{z} - (w+\tilde{w}) = (x - y + z - w) + (\tilde{x} - \tilde{y} + \tilde{z} - \tilde{w}) = 0,$$

$$\alpha x - \alpha y + \alpha z - \alpha w = \alpha(x - y + z - w) = 0,$$

pelo $u + \tilde{u} \in S$ e $\alpha u \in S$. Consequentemente, aquelas operações são fechadas.

A equação que caracteriza os elementos $(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$ pertencentes ao plano é

$$x - y + z - w = 0,$$

que, usando a convenção habitual de escrever os vectores na forma de vectores coluna, pode ser escrita na forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = 0.$$

Assim, o plano S coincide com o núcleo da matriz linha $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$: $S = N_A$. Neste caso temos três incógnitas livres: y, z e w (as que correspondem na ordem às colunas de A sem pivô) e, portanto, $\dim S = \dim N_A = 3$. Para obter uma base de S, $\mathcal{B}_S = \{s_1, s_2, s_3\}$, basta determinar os vectores s_j que se obtêm dando a cada uma das incognitas livres o valor 1, às restantes incógnitas livres o valor 0 e determinando a primeira componente por forma que $s_j \in N_A$, obtendo-se:

$$s_1 = (1,1,0,0), \quad s_2 = (-1,0,1,0), \quad s_3 = (1,0,0,1).$$

Assim, uma base de S é o conjunto,

$$B_S = \{(1,1,0,0), (-1,0,1,0), (1,0,0,1)\}.$$

b) Como sabemos qualquer base de $\mathbb{R}^4$ é constituída por 4 elementos. Também sabemos que qualquer conjunto linearmente independente em $\mathbb{R}^4$, em particular $\mathcal{B}_S$ (a base de S determinada anteriormente) com 3 elementos, é um subconjunto de uma base de $\mathbb{R}^4$. Consequentemente, para obter uma base de $\mathbb{R}^4$ que contém $\mathcal{B}_S$ basta juntar a $\mathcal{B}_S$ um vector $s_4 = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \setminus S$. Ora, os vectores que satisfazem esta condição são aqueles para os quais

$$x - y + z - w \neq 0.$$

Sendo assim, por exemplo, o vector

$$s_4 = (1,0,0,0)$$

serve. Uma base ordenada de $\mathbb{R}^4$ que satisfaz os requesitos é

$$\mathcal{B} = (s_4, s_1, s_2, s_3) = ((1,0,0,0), (1,1,0,0), (-1,0,1,0), (1,0,0,1)).$$

c) Designando por $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ a base canónica de $\mathbb{R}^4$, pretende-se saber qual o vector $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ das componentes na base canónica do elemento $v \in \mathbb{R}^4$ cujo vector $y = (1,2,3,4)$ é o vector das componentes de v na base $\mathcal{B}$, já que $v = (1,2,3,4)_{\mathcal{B}}$. Como se sabe x e y, quando escritos como vectores coluna, estão relacionados por $x = Uy$, em que U, a matriz de mudança da base $\mathcal{B}_c$ para a base $\mathcal{B}$, é dada por

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

O vector v na base canónica é pois

$$(4,2,3,4).$$

Alternativamente, este vector podia ser determinado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3, x_4) &= s_4 + 2s_1 + 3s_2 + 4s_3 \\ &= (1,0,0,0) + 2(1,1,0,0) + 3(-1,0,1,0) + 4(1,0,0,1) \\ &= (1+2-3+4, 2, 3, 4) = (4,2,3,4). \end{aligned}$$

Exercício 19 *[2009/10 - 1º Teste - Problema 7 - MEC]*

Seja S o subconjunto de $\mathbb{R}^4$ formado pelos seguintes quatro vectores

$$v_1 = (1,1,2,3), \quad v_2 = (0,1,2,2), \quad v_3 = (2,-1,-1,0), \quad v_4 = (3,1,2,5).$$

1. Indique um subconjunto U de S, com três elementos, tal que

a) U é linearmente independente;

b) U é linearmente dependente.

2. Indique uma base para $L(S)$ — o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por S — e determine as componentes do vector $v_1 + v_2 - v_4$ nessa base.

3. Representando por A a matriz 4×4 cuja coluna j (j=1,2,3,4) é constituída pelas componentes (na base canónica) do vector v_j, determine uma base de N_A — o núcleo ou espaço nulo de A — e resolva a equação

$$Au = b, \quad b = v_1 + v_2 - v_4.$$

....

Resolução:

1. Como sabemos para analisar a dependência ou indepenência linear de um conjunto de vectores em $\mathbb{R}^4$ podemos fazê-lo dispondo as componentes desses vectores (na base canónica) nas colunas (ou nas linhas) de uma matriz e analisar a dependência ou independência linear dos conjuntos dessas colunas (ou linhas). O método de eliminação de Gauss fornece um critério para essa análise. No presente caso, optando pela representação por colunas temos:

$$A = [v_1 v_2 v_3 v_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -5 & -4 \\ 0 & 2 & -6 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [z_1 z_2 z_3 z_4] = Z$$

São linearmente independentes as colunas de Z que contêm os pivôs da eliminação de Gauss. Neste caso, o conjunto formado pelas 3 primeiras colunas de Z é linearmente independente. O conjunto das quatro colunas de Z é linearmente dependente, uma vez que a quarta coluna não contém pivô. Efectivamente, a quarta coluna é uma combinação linear das duas primeiras. $z_4 = 3z_1 - 2z_2$.

Relativamente à matriz original, o conjunto das 3 primeiras colunas é linearmente independente, por corresponderem (na ordem) às colunas de U com pivô. O conjunto das quatro colunas de A é linearmente dependente. Efectivamente, a quarta coluna,v_4, é tal que $v_4 = 3v_1 - 2v_2$.

Resulta desta análise que

a) Um subconconjunto U de S, com três elementos, linearmente independente é o conjunto $U = \{v_1, v_2, v_3\}$.

b) Um subconconjunto U de S, com três elementos, linearmente dependente é o conjunto $U = \{v_1, v_2, v_4\}$.

2. Uma base para o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por S é o conjunto formado pelo maior subconjunto das colunas da matriz A que é linearmente independente, que, de acordo com as conclusões da alínea anterior, é o conjuntos das 3 primeiras colunas. Assim, uma base ordenada de $L(S)$ é

$$\mathcal{B}_{L(S)} = (v_1, v_2, v_3).$$

Pretende-se agora representar na base anterior o vector $v = v_1 + v_2 - v_4$. Como mencionámos na alínea anterior, o vector v_4 é tal que $v_4 = 3v_1 - 2v_2$. Consequentemente, $v = v_1 + v_2 - (3v_1 - 2v_2) = -2v_1 + 3v_2$ e, portanto, $v = (-2, 3, 0)_{\mathcal{B}_{L(S)}}$. Assim $(-2, 3, 0) \in \mathbb{R}^3$ é o vector das componentes de v na base $\mathcal{B}_{L(S)}$.

3. Dada a circunstância de na alínea 1 já termos procedido à eliminação de Gauss para a matriz A e tendo em conta que o método de eliminação de Gauss não altera o núcleo de uma matriz, i.e. $N_A = N_Z$ (em que Z é a matriz definida em 1, que se obtém de A por eliminação de Gauss) podemos determinar imediatamente os vectores $u_h = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in N_A$, sendo que u_4 é a incógnita livre (pois corresponde na ordem à coluna sem pivô):

$u_3 = 0; \quad u_2 = 2u_4; \quad u_1 = -3u_4$.

Consequentemente $u_h = u_4(-3, 2, 0, 1)$, $u_4 \in \mathbb{R}$ e, portanto, $N_A = L\{(-3, 2, 0, 1)\}$.

Uma vez que o segundo membro da equação a resolver $Au = b$ é uma combinação linear das colunas de A, pois

$$b = 1.v_1 + 1.v_2 + 0.v_3 - 1.v_4,$$

uma solução particular daquela equação é pois o vector

$$u_p = (1, 1, 0, -1).$$

Como se sabe a solução geral u daquela equação é da forma:

$$u = u_p + u_h.$$

Assim, o conjunto das soluções de $Au = b$ é dado por

$$\{u \in \mathbb{R}^4 : u = (1, 1, 0, -1) + u_4(-3, 2, 0, 1), u_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Exercício 20 *[2009/10 - 1º Exame - Problema 11 - MEC]*

Considere as seguintes matrizes de $\mathbb{R}^{3\times 3}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & -1 \end{bmatrix}.$$

1. (a) Calcule $\det A$; (b) mostre que A é invertível e, posteriormente, (c) calcule a inversa de A.
2. Indique bases para o espaço das linhas, para o espaço das colunas e para o núcleo da matriz B.
3. Verifique que a equação
$$BAu = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
é possível e determine todas as soluções desta equação.

. . . .

Resolução:

1. a) Podemos usar vários métodos para o cálculo do determinante A, por exemplo, a eliminação de Gauss e a regra de Laplace. Dada a circunstância de haver um elemento nulo (linha 3, coluna 2), optou-se pela regra de Laplace, por expansão segundo a terceira linha, obtendo-se:

$$\det A = a'_{31} + 2a'_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 + 2(1 - 2) = -3,$$

em que se usou a notação habitual de representar por a'_{ij} o cofactor de a_{ij}, sendo $A = [a_{ij}]$.

b) Uma matriz é invertível se e só se o seu determinante é diferente de zero. Ora, resulta da alínea anterior que $\det A = -2 \neq 0$, pelo que A é invertível.

c) Também aqui temos várias alternativas: O método de Gauss-Jordan ou usar a matriz dos cofactores, através da expressão

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\text{cof } A)^t.$$

Optando por esta última via e notando que dois dos cofactores já foram determinados em a), temos:

$$a'_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad a'_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad a'_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

$$a'_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4, \quad a'_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad a'_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2,$$

$$a'_{31} = -1, \quad a'_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad a'_{33} = -1,$$

pelo que

$$\operatorname{cof} A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad A^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -4 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. O método de eliminação de Gauss permite-nos obter as bases pretendidas como se segue:

$$B \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -9 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U.$$

- O maior subconjunto das linhas de B linearmente independente é formado pelas linhas de B que dão origem às linhas de U com pivô. Consequentemente, uma base $\mathcal{B}_L$ para L_B (o espaço das linhas de B) é o conjunto

$$\mathcal{B}_L = \{(1,2,1),(1,-1,0)\}.$$

Alternativamente, como o método de eliminação de Gauss mantém invariante o espaço das linhas de uma matriz, poder-se-ia indicar como base o conjunto

$$\widetilde{\mathcal{B}}_L = \{(1,2,1),(0,-3,-1)\}.$$

- O maior subconjunto das colunas de B linearmente independente é formado pelas colunas de B que correspondem (na ordem) às colunas de U com pivô. Assim, uma base $\mathcal{B}_C$ para o espaço das colunas de B é o conjunto

$$\mathcal{B}_C = \{(1,1,2),(2,-1,-5)\}.$$

- Finalmente, como as equações $Bu = 0$ e $Uu = 0$ são equivalentes, tem-se

$$N_B = N_U = L(\{(-1,-1,3)\})$$

e, portanto, uma base para o núcleo de B é $\{(-1,-1,3)\}$.

3. Sendo $b = (2,1,1)$ escrito como vector coluna, a equação $BAu = b$ é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} Au = v \\ Bv = b \end{cases}.$$

Como A é invertível, a primeira destas equações é incondicionalmente solúvel e, o sistema anterior é equivalente ao seguinte

$$\begin{cases} u = A^{-1}v \\ Bv = b \end{cases}.$$

Assim, a equação original é possível se e só se o for a equação $Bv = b$ e, no caso afirmativo, as soluções u da equação original são da forma $u = A^{-1}v$ em que v é solução de $Bv = b$. Ora, como

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

em que os vectores no segundo membro são a primeira e terceira colunas de B, b pertence ao espaço das colunas de B e, portanto, a equação $Bv = b$ é possível. As suas soluções são dadas por

$$u = (1,0,1) + u_h \text{ com } u_h \text{ tal que } Bu_h = 0.$$

Tendo identificado o núcleo de B na alínea anterior, então

$$u = (1,0,1) + \alpha(-1,-1,3) = (1-\alpha, -\alpha, 1+3\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Exercício 21 *[2009/10 - 1º Exame - Problema 12 - MEC]*

1. Sejam
$$v_1 = (1,2,3), \quad v_2 = (1,1,1), \quad v_3 = (1,0,2).$$
   a) Mostre que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ é uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$.
   b) Determine o vector $y \in \mathbb{R}^3$ das componentes do vector $x = (1,1,2)$ na base $\mathcal{B}$.

2. Considere a matriz de permutação
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
a seja $\mathcal{S}$ o subconjunto de $\mathbb{R}^{3\times 3}$ formado pelas matrizes A tais que
$$PA = AP.$$
Mostre que $\mathcal{S}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^{3\times 3}$ e indique uma base para $\mathcal{S}$, bem como a sua dimensão.

....

<u>**Resolução**</u>:

1. a) Uma base de $\mathbb{R}^3$ é um conjunto linearmente independente e que gera $\mathbb{R}^3$. Como $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ e qualquer conjunto linearmente independente é um subconjunto de uma base, qualquer conjunto linearmente independente com 3 elementos é uma base de $\mathbb{R}^3$. Basta pois ver se $\mathcal{B}$ é linearmente independente, para o que se pode usar o método e eliminação de Gauss aplicado à matriz que tem nas colunas (alternativamente, as linhas) as componentes de $\mathcal{B}$:
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = U,$$
em que
$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$
Daqui se conclui que as colunas de $\mathcal{B}$ formam um conjunto linearmente independente, pois U não tem zeros na diagonal principal.

b) Representando os elementos de $\mathbb{R}^3$ como vectores coluna, o vector $y = (y_1, y_2, y_3)$ das componentes de x na base $\mathcal{B}$ é a solução da equação
$$By = x \quad \big(y = B^{-1}x\big)$$
em que B é a matriz de mudança da base canónica para a base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ e foi escrita na alínea anterior. Como $E_2E_1B = U$, a equação anterior ´é equivalente a
$$Uy = E_2E_1x \quad \Leftrightarrow \quad Uy = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
cuja solução é fácil de obter, pois U é triangular superior, vindo
$$y = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Consequentemente $x = (1,1,2) = (1/3,1/3,1/3)_{\mathcal{B}}$, ou seja $y = (1/3,1/3,1/3)$.

2. Começemos por mostrar que $\mathcal{S}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$. Para tal basta mostrar que as operações de adição e multiplicação de escalares por matrizes são fechadas em $\mathcal{B}$. Sendo$A, \widetilde{A} \in \mathcal{B}$ e, portanto $PA = AP$ e $P\widetilde{A} = \widetilde{A}P$, e $\alpha \in \mathbb{R}$, das propriedades das operações com matrizes resulta que

$$P(A + \widetilde{A}) = PA + P\widetilde{A} = AP + \widetilde{A}P = (A + \widetilde{A})P, \quad P(\alpha A) = \alpha(PA) = (\alpha A)P$$

pelo que aquelas operações são fechadas em $\mathcal{S}$.

Escrevendo um elemento genérico A de $\mathbb{R}^3$ na forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

tem-se

$$PA = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad AP = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

Consequentemente

$$PA = AP \quad \Leftrightarrow \quad a_{12} = a_{13}, a_{21} = a_{31}, a_{22} = a_{33}, a_{23} = a_{32}.$$

Daqui resulta que $A \in \mathcal{S}$ se e só se

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}E_{11} + a_{12}(E_{12}+E_{13}) + a_{21}(E_{21}+E_{31}) + a_{22}(E_{22}+E_{33}) + a_{23}(E_{23}+E_{32})$$

em que os escalares indicados são arbitrários e E_{ij} representam os elementos da base canónica de $\mathbb{R}^3$, caracterizados por terem todos os elementos nulos à excepção do elemento de ordem ij que tem o valor 1. Como o conjunto

$$\{E_{11}, E_{12} + E_{13}, E_{21} + E_{31}, E_{22} + E_{33}, E_{23} + E_{32}\}$$

é claramente linearmente independente (efectivamente, se na expressão acima fizermos $A = 0$, vem $a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = a_{23} = 0$), segue-se que este conjunto é uma base de $\mathcal{S}$, pelo que

$$\dim \mathcal{S} = 5.$$

Exercício 22 *[2010/11 - Exame - V1 - Problema 6 - MEEC]*

Usando a habitual convenção de escrever os elementos de $\mathbb{R}^4$ na forma de vectores coluna, considere um sistema de equações na forma matricial $Au = b$, em que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & -7 & 7 \end{bmatrix}.$$

a) Obtenha uma base para N_A, o núcleo da matriz A;

b) Mostre que o vector $u = (-5, 2, 2, 1)$ pertence a N_A e indique as suas componentes em relação à base que indicou em a);

c) Escolha da lista seguinte um vector b para o qual o sistema $Au = b$ seja possível e determine o conjunto das soluções deste sistema.

(A) b=(3,1,0,7), (B) b=(3,1,0,-7), (C) b=(3,1,1,-7), (D) b=(1,-1,-4,5).

. . . .

Resolução:

a) Por definição N_A, o núcleo de A, é formados pelos vectores $u = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ tais que $Au = 0$. Para resolver este sistema de equações podemos usar o método de eliminação de Gauss: com a habitual convenção de notação: $X \stackrel{E}{\longrightarrow} Y$ significa que $Y = EX$, temos

$$A \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & -7 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & -6 & 9 & -6 \\ 0 & 4 & -6 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

em que

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Daqui se conclui que há apenas dos pivôs, havendo duas incógnitas livres, a terceira e a quarta (respectivamente, z e w). Consequentemente, $\dim N_A = 2$. Como os sistemas $Au = 0$ e $Uu = 0$ são equivalentes, qualquer solução u das equações anteriores é tal que

$$\begin{cases} -2y + 3z - 2w = 0 \\ x + 2y - z + 3w = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3/2z - w \\ x = -2z - w \end{cases}$$

com $z, w \in \mathbb{R}$. Para obter dois vectores que constituem uma base de N_A procedemos do seguinte modo: o primeiro, u_1, obtém-se tomando $z = 1$ e $w = 0$ e determinando as duas primeiras componentes do sistema anterior, vindo $u_1 = (-2, 3/2, 1, 0)$.; o segundo, u_2, obtém-se tomando $z = 0$ e $w = 1$ e determinando as duas primeiras componentes do sistema anterior, vindo $u_2 = (-1, -1, 0, 1)$. Uma base de N_A é pois

$$\{u_1, u_2\} = \{(-2, 3/2, 1, 0), (-1, -1, 0, 1)\}.$$

b) Para mostrar que $u = (-5, 2, 2, 1)$ pertence a N_A basta mostra que $Au = 0$. Efectivamente, tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & -7 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(-5) + 2(2) - 1(2) + 3(1) \\ 1(-5) + 0(2) + 2(2) + 1(1) \\ 2(-5) - 2(2) + 7(2) + 0(1) \\ 1(-5) + 6(2) - 7(2) + 7(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para obter o vector (α, β) das componentes de u na base ordenada (u_1, u_2) de N_A, resolvemos o sistema de equações

$$\alpha u_1 + \beta u_2 = u \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3/2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

cuja solução é

$$(\alpha, \beta) = (2, 1).$$

Assim,

$$u = 2u_1 + u_2 \quad \Leftrightarrow \quad (-5, 2, 2, 1) = 2(-2, 3/2, 1, 0) + (-1, -1, 0, 1)$$

c) Para saber para quais dos vectores b dados a equação $Au = b$ tem solução ou, o que é equivalente, quais dos vectores b dados pertencem à imagem (ou espaço das colunas) da matriz A, dispomo-los nas coluna de uma matriz e usamos os mesmo passos da eliminação de Gauss que para a matriz A.

Aqueles que tiverem a terceira e quartas componentes nulas pertencem à imagem de A os outros não. Temos

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 7 & -7 & -7 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_1} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ -6 & -6 & -5 & -6 \\ 4 & -10 & -10 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_2} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -14 & 0 \end{bmatrix},$$

pelo que apenas os vectores dados em (A) e (D) pertencem ao espaço das colunas de A. Escolhendo, por exemplo, (A) ou seja $b = (3, 1, 0, 7)$, como já temos a eliminação de Gauss para a matriz aumentada $[A|b]$, cujo resultado é $[U|c]$, com $c = (3, -2, 0, 0)$, as soluções $u = (x, y, z, w)$ são tais que

$$\begin{cases} -2y + 3z - 2w = -2 \\ x + 2y - z + 3w = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 + 3/2z - w \\ x = 1 - 2z + 5w \end{cases}$$

Como se sabe qualquer solução deste sistema é da forma

$$u = u_p + zu_1 + wu_2,$$

em que u_p é uma solução particular, por exemplo, a que se obtém do sistema anterior com $z = w = 0$,

$$u_p = (1, 1, 0, 0),$$

e (u_1, u_2) é a base de N_A determinada na alínea a). Consequentemente, qualquer solução de $Au = b$ é da forma

$$u = (1, 1, 0, 0) + z(-2, 3/2, 1, 0) + w(-1, -1, 0, 1), \quad z, w \in \mathbb{R}.$$

Exercício 23 *[2012/13 - Exame - V1 - Problema 6 - LEGM, MEC]*
Considere a matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ definida por

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & -5 \end{bmatrix}.$$

Determine:

a) A matriz dos cofactores de A; use-a para obter o determinante de A, pela regra de Laplace;

b) Bases para os subespaços N_A, L_A e C_A de $\mathbb{R}^3$, respectivamente, o núcleo, o espaço das linhas e o espaço das colunas de A, indicando também as respectivas dimensões;

c) Uma base ordenada $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ com as seguintes características: o primeiro e o segundo elementos de $\mathcal{B}$ pertencem a N_A e a C_A, respectivamente; represente o vector $(2,-1,2)$ nesta base.

. . . .

Resolução:

a) Usando a notação habitual: $\operatorname{cof} A = [a'_{ij}]$, com $a'_{ij} = (-1)^{i+j}\det A_{ij}$, em que a matriz A_{ij} se obtém de A eliminando a linha i e a coluna j, neste caso temos:

$$\begin{aligned}
a'_{11} &= \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = -3, \quad a'_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = 6, \quad a'_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -3,\\
a'_{21} &= -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = 1, \quad a'_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = -2, \quad a'_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 1,\\
a'_{31} &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1, \quad a'_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2, \quad a'_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1,
\end{aligned}$$

pelo que a matriz dos cofactores de A é

$$\operatorname{cof} A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Uma vez que já conhecemos os cofactores de A o método mais simples para calcular o determinante consiste em usar a regra de Laplace, apesar de a matriz dada não ter nenhum zero. Usando a regra de Laplace, por expansão segundo a primeira linha (por exemplo), temos

$$\det A = a_{11}a'_{11} + a_{12}a'_{12} + a_{13}a'_{13} = -3 + 12 - 9 = 0.$$

b) O método de eliminação de Gauss permite obter bases para qualquer dos subespaços em causa. Por razões que se tornarão claras mais adiante, implementamos o método de eliminação de Gauss para a matriz aumentada $[A \vdots v]$ em que $v = (a,b,c)$ é um vector arbitrário de $\mathbb{R}^3$ representado como vector coluna, obtendo-se

$$A = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 3 & 4 & b \\ -1 & -3 & -5 & c \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -1 & -2 & b-2a \\ 0 & -1 & -2 & c+a \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -1 & -2 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & 3a-b+c \end{array}\right] = U$$

Daqui resulta que as soluções $u_h = (x,y,z)$ de $Au_h = 0$ são tais que

$$\begin{cases} y + 2z &= 0 \\ x + 2y + 3z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2z \\ x = z \end{cases}$$

e $z \in \mathbb{R}$ é arbitrário. Consequentemente, $u_h = z(1,-2,1), z \in \mathbb{R}$ e, portanto, $\{(1,-2,1)\}$ é uma base para N_A, o núcleo de A, que tem dimensão 1.

O método de eliminação de Gauss mantém invariante o espaço das linhas de uma matriz, pelo que uma base para L_A, o espaço das linhas de A, pode ser obtida a partir de uma base para o espaço das linhas da matriz triangular U. Assim, uma base $\mathcal{B}_{L_A}$ para L_A é constituída pelas linhas não nulas de U: $\mathcal{B}_{L_A} = \{(1,2,3),(0,-1,-2)\}$. Consequentemente, $\dim L_A = 2$.

Como se sabe , sendo C_A o espaço das colunas de A, tem-se $\dim L_A = \dim C_A$ (resultado válido com generalidade), pelo que também $\dim C_A = 2$. No entanto, C_A não é invariante pelo método de eliminação de Gauss, mas são linearmente independentes em A as colunas da mesma ordem das linearmente independentes em U. Assim, uma base $\mathcal{B}_{C_A}$ de C_A é formada pelas duas primeiras colunas de A: $\mathcal{B}_{C_A} = \{(1,2,-1),(2,3,-3)\}$.

c) Passemos à determinação da base pretendida, digamos $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ com $v_1 \in N_A$ e $v_2 \in C_A$. Vimos na alínea anterior que $N_A = L(\{(1,-2,1)\})$, pelo que podemos tomar $v_1 = (1,-2,1)$. O segundo elemento da base, v_2, é qualquer vector de $C_A \setminus N_A$. Resulta do que fizemos na alínea a), que a equação cartesiana de C_A é

$$3a - b + c = 0,$$

pelo que $C_A \cap N_A = \{0\}$ e podemos tomar para v_2 qualquer vector de C_A, por exemplo, $v_2 = (1,2,-1)$ que é um dos seus geradores. Finalmente, o terceiro elemento de $\mathcal{B}$, v_3, é qualquer vector de $\mathbb{R}^3$ que não pertença ao espaço (plano) gerado por v_1 e v_2. Continuando a escrever os vectores de $\mathbb{R}^3$ na forma (a,b,c), a equação cartesiana deste plano é

$$2c + b = 0,$$

como se pode concluir, por eliminação de Gauss, tal como na alínea a). Assim, podemos tomar para v_3 qualquer vector de componentes (a,b,c) com $2c + b \neq 0$, por exemplo, $(0,0,1)$. Em conclusão,

$$\mathcal{B} = \big((1,-2,1),(1,2,-1),(0,0,1)\big)$$

é uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$ satisfazendo as propriedades requeridas.

Pretende-se representar o vector $(2,-1,2)$ na base $\mathcal{B}$, ou seja, a sua representação na forma $(2,-1,2) = xv_1 + yv_2 + zv_3$. Tendo em conta que

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = Bu,$$

em que $u = (x,y,z)$ é representado como vector coluna e B é a matriz com representação por colunas $B = [v_1\ v_2\ v_3]$, tal é equivalente a resolver a equação

$$Bu = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Usando, por exemplo, o método de eliminação de Gauss, facilmente se conclui que

$$u = \frac{1}{4}(5,3,6).$$

Exercício 24 *[2014/15 - 2º Teste - V1 - Problema 4 - MEEC]*

Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ que é representada nas bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^{2\times 2}$ pela matriz A: (a) Obtenha bases para o núcleo e para o espaço das colunas de A; (b) Determine uma base para a imagem (ou contradomínio) de T e indique as componentes de B nessa base; (c) Mostre que o conjunto P das soluções da equação $Tu = B$ pode ser escrito na forma $P = \{v\} + S$, explicitando o vector $v \in \mathbb{R}^4$ e uma equação cartesiana para o subespaço S de $\mathbb{R}^4$; (d) Identifique $P \cap U$ em que $U = L(\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,1)\})$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ -1 & 1 & -1 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 10 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

....

Resolução:

a) O método de eliminação de Gauss permite obter bases para os subespaços em causa: Seja U a matriz que se obtém por eliminação de Gauss de A; Uma base para o espaço das colunas de A, digamos B_{C_A}, é constituída pelas suas colunas que correspondem na ordem às colunas de U com pivô; Identificadas as colunas sem pivô e as correspondentes (na ordem) incógnitas livres, uma base para o núcleo, digamos B_{N_A}, é formada pelos vectores que se obtêm dando à vez o valor 1 a cada uma das incógnitas livres e o valor zeros às restantes incógnitas livres e determinando as restantes componentes por forma a que sejam elementos do núcleo. Em face do pedido nas alíneas seguintes, implementamos a eliminação de Gauss para a matriz aumentada $[A\vdots\theta]$ com $\theta = (x, y, z, w)$, obtendo-se:

$$A = \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 4 & 6 & \vdots & x \\ -1 & 1 & -1 & 6 & \vdots & y \\ 1 & 3 & 5 & 10 & \vdots & z \\ 2 & 1 & 5 & 0 & \vdots & w \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 4 & 6 & \vdots & x \\ 0 & 3 & 3 & 12 & \vdots & y+x \\ 0 & 1 & 1 & 4 & \vdots & z-x \\ 0 & -3 & -3 & -12 & \vdots & w-2x \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 4 & 6 & \vdots & x \\ 0 & 3 & 3 & 12 & \vdots & y+x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \frac{3x-4x-y}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & w-x+y \end{array}\right]$$

Considerando as bases ordenadas, conclui-se assim que $B_{C_A} = (v_1, v_2)$ com $v_1 = (1, -1, 1, 2)$, $v_2 = (2, 1, 3, 1)$ e que $B_{N_A} = (s_1, s_2)$ com $s_1 = (-2, -1, 1, 0)$, $s_2 = (2, -4, 0, 1)$.

b) Fixando em $\mathbb{R}^{2\times 2}$ e $\mathbb{R}^4$ as bases canónicas, os subespaços $I(T) \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$ e $C_A \subset \mathbb{R}^4$ são isomorfos, sendo um isomorfismo aquele faz corresponder a cada matriz de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ o vector de $\mathbb{R}^4$ das suas componentes na base canónica $B_{2\times 2}$. Consequentemente, uma base para $I(T)$, digamos $B_{I(T)} = (B_1, B_2)$, é dada por $B_1 = (1, -1, 1, 2)_{B_{2\times 2}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B_2 = (2, 1, 3, 1)_{B_{2\times 2}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Para $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, seja $b = (3, 0, 4, 3)$ o vector das suas componentes na base canónica. Determinar a sua representação na base $B_{I(T)}$ consiste em resolver para o par (α, β) a equação

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = b.$$

Uma vez que v_1 e v_2, os vectores das componentes de B_1 e B_2 na base canónica, constituem as duas primeiras coluna de A, tal consiste em resolver para $u = (\alpha, \beta, 0, 0)$ o sistema de equações $Au = b$. Tendo em conta a eliminação de Gauss, facilmente se obtém $\alpha = 1$ e $\beta = 1$. Logo $B = B_1 + B_2$.

c) Uma vez que $B \in I(T)$, sendo $Tu = B$ uma equação linear, as soluções são da forma

$$u = v + v_h \text{ com } v_h \in N(T),$$

em que v é uma (qualquer) solução particular. Fixando em $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^{2\times 2}$ as bases canónicas e identificando os vectores de $\mathbb{R}^4$ com os correspondentes vectores coluna, a equação $Tu = B$ é equivalente a $Au = b$. Podemos pois escrever para o conjunto P das soluções de $Tu = B$,

$$P = \{v\} + S \text{ com } S = N(T) = N_A,$$

tomando para $v = (1, 1, 0, 0)$ (a solução particular tomando as incógnitas livres iguais a zero) e, como vimos,

$$S = L(\{s_1, s_2\} = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : z(-2, -1, 1, 0) + w(2, -4, 0, 1)\}.$$

Tendo em conta que as linhas ℓ_j, $j = 1, \ldots, 4$, de A são tais que $\ell_j^t u = 0$ para $u = (x, y, z, w) \in N_A$, uma equação cartesiana de N_A é a que se obtém tomando duas linhas linearmente independentes (por exemplo as duas primeiras):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ -1 & 1 & -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 4z + 6w = 0 \\ -x + y - z + 6w = 0 \end{array} \right. .$$

c) O plano U é caracterizado por ser constituído por vectores que têm as duas últimas componentes iguais, ou seja,

$$U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : z = w\}.$$

Tendo em conta a descrição de P dada anteriormente e que $v \in U$, vem

$$P \cap U = \{v\} + S \cap U = \{(1, 1, 0, 0)\} + L\{(0, -5, 1, 1)\},$$

pois $(-2, -1, 1, 0) + (2, -4, 0, 1) = (0, -5, 1, 1)$. Uma equação cartesiana de $P \cap U$ poderia obter-se usando a equação cartesiana de S previamente obtida.

Exercício 25 *[2005/6 - 1° Exame - V1 - Problema 12 - LEEC]*

Considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ definida como se segue: sendo $p \in \mathcal{P}_2$ com $p(t) = p_0 + p_1\, t + p_2\, t^2$ então

$$T(p) = (p_0 + 2p_1 + 3p_2, -p_0 + 2p_1 + p_2, 2p_0 + 2p_2)\ .$$

a) Determine a matriz A que representa T em relação às bases canónicas de $\mathcal{P}_2$ e de $\mathbb{R}^3$.

b) Indique justificadamente quais das seguintes afirmações são verdadeiras:
1. $\dim N(T) = 1$, 2. T é injectiva , 3. $\dim I(T) = 2$, 4. T não é invertível ,
em que $N(T)$ e $I(T)$ representam o núcleo e a imagem de T, respectivamente.

. . . .

<u>**Resolução**</u>:

a) Para determinar a matriz A que representa T em relação às bases canónicas de $\mathcal{P}_2$ e de $\mathbb{R}^3$, precisamos de calcular as imagens dos vectores (neste caso polinómios) da base canónica de $\mathcal{P}_2$ por meio da transformação T. Tem-se, designando por 1, t e t^2 os elementos da base canónica de $\mathcal{P}_2$ (abusando da notação, como habitualmente),

$$T(1) = (1, -1, 2), \quad T(t) = (2, 2, 0), \quad T(t^2) = (3, 1, 2)$$

pelo que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

b) Como sabemos para uma transformação linear T definida e com valores em espaços lineares da mesma dimensão, que é o caso da transformação em análise, são equivalentes as seguintes proposições:

(i) o núcleo de T é constituído pelo vector nulo,

(ii) T é injectiva,

(iii) T é sobrejectiva,

(iv) T é invertível.

Por outro lado, para T é válida a relação $\dim N(T) + \dim I(T) = \dim \mathcal{P}_2 = 3$.

Assim, para responder à questão colocada, basta determinar o núcleo de T, por exemplo. Ora, o núcleo de T é gerado pelos polinómios cujas componentes constituem os vectores u que pertencem ao núcleo da matriz A. Usando, por exemplo, a eliminação de Gauss aplicada à matriz A, conclui-se que A é singular, tendo o núcleo dimensão 1 (há uma coluna sem pivô), pelo que o núcleo de T tem também dimensão 1, por ser isomorfo ao núcleo de A. Assim, em face das equivalências atrás mencionadas, podemos concluir da veracidade de cada uma das afirmações dadas:

1. $\dim N(T) = 1$, é verdadeira, como resultado do acima descrito,

2. T é injectiva, é falsa, pois como vimos $N(T) \neq \{0\}$,

3. $\dim\, I(T) = 2$ é verdadeira, pois $\dim I(T) = 3 - 1 = 2$,

4. T não é invertível, é verdadeira, pois $N(T) \neq \{0\}$.

Exercício 26 *[2006/7 - 1° Exame - V1 - Problema 12 - MEC]*

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $T_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$T(x,y,z) = (x+2y-3z, x+3y+z, \alpha y + \alpha^3 z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Determine todos os valores de α para os quais T_α é invertível.
2. Tomando $\alpha = 2$,

a) existe algum vector $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ para o qual a equação $T_\alpha(x,y,z) = (a,b,c)$ é impossível?
b) resolva a equação $T_\alpha(x,y,z) = (1,2,2)$.

....

Resolução:

1. Sendo T_α uma transformação linear definida e com valores no mesmo espaço de dimensão 3, T_α é invertível se e só se for invertível a matriz A_α que a representa em relação à base canónica, que, neste caso, é a matriz

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha^3 \end{bmatrix}.$$

Como A_α é invertível se e só se é não singular, podemos usar o método de eliminação de Gauss para averiguar da invertibilidade de A_α. Em face da alínea seguinte, consideramos desde já a matriz aumentada do sistema $A_\alpha u = v$ associado à equação linear $T_\alpha(x,y,z) = (a,b,c)$ com $u = [x\ y\ z]^t$ e $v = [a\ b\ c]^t$:

$$[A_\alpha \mid v] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 1 & 3 & 1 & b \\ 0 & \alpha & \alpha^3 & c \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & 1 & 4 & b-a \\ 0 & \alpha & \alpha^3 & c \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & 1 & 4 & b-a \\ 0 & 0 & \alpha^3 - 4\alpha & c - \alpha(b-a) \end{array}\right] = [U_\alpha \mid \tilde{v}]$$

Daqui se conclui que

$$A_\alpha \text{ é invertível} \quad \Leftrightarrow \quad U_\alpha \text{ é invertível} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^3 - 4\alpha \neq 0.$$

Como $\alpha^3 - 4\alpha = \alpha(\alpha^2 - 4) = \alpha(\alpha - 2)(\alpha + 2)$, então

$$A_\alpha \text{ é invertível} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}.$$

2. Para $\alpha = 2$ já sabemos que T_α não é invertível ou, o que é equivalente, que T_α não é sobrejectiva.

a) Como o método de eliminação de Gauss preserva o conjunto das soluções de um sistema de equações lineares, temos

$$\begin{aligned} T_\alpha(x,y,z) = (a,b,c) \text{ é impossível} \quad &\Leftrightarrow \quad A_\alpha u = v \text{ é impossível} \\ &\Leftrightarrow \quad U_\alpha u = \tilde{v} \text{ é impossível} \quad \Leftrightarrow \quad c - 2(b-a) \neq 0. \end{aligned}$$

b) Sendo $(a,b,c) = (1,2,2)$, tem-se $c - 2(b-a) = 0$, pelo que $T_\alpha(x,y,z) = (a,b,c)$ é possível ((a,b,c) pertence à imagem de T_α) e indeterminado (o núcleo de T_α tem dimensão 1). Podemos obter as soluções por via do sistema $U_\alpha u = \tilde{v}$ com $\alpha = 2$, obtendo-se para as duas primeiras componentes (x e y) em função da terceira (z), que podemos tomar para incógnita livre:

$$x = -1 + 11z, \quad y = 1 - 4z.$$

Assim, as soluções da equação $T(x,y,z) = (1,2,2)$ são dadas por

$$(x,y,z) = (-1,1,0) + z(11,-4,1), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Exercício 27 *[2008/9 - 1° Exame - Problema 13 - LEIC]*

Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (x + 2y + 3z, x - y, 2x + y + 3z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

a) Represente T em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$;

b) T é injectiva? T é sobrejectiva?

c) Resolva a equação $Tu = (1, 1, 2)$.

. . . .

Resolução:

13-a) A matriz A que representa T em relação à base canónica $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ é aquela que tem na coluna $j(j = 1, 2, 3)$ as componentes da imagem por T do vector e_j. Neste caso,

$$\begin{aligned} Te_1 = T(1,0,0) &= (1,1,2) \\ Te_2 = T(0,1,0) &= (2,-1,1) \\ Te_3 = T(0,0,1) &= (3,0,3) \end{aligned}$$

pelo que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ex1-13-b) A injectividade e/ou a sobrejectividade de uma transformação linear pode ser estudada usando o método de eliminação de Gauss aplicado à matriz que a representa em relação a uma base previamente fixada (neste caso, a base canónica). A transformação T é injectiva se e só se o núcleo da matriz A for trivial, o que após a eliminação significa que A deu origem a uma matriz não triangular superior sem zeros na diagonal principal. Por outro lado, tratando-se de uma transformação definida e com valores em espaços da mesma dimensão finita (neste caso, é o mesmo espaço) T é sobrejectiva se e só se for injectiva. Vejamos qual é a situação, por aplicação da eliminação de Gauss a A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \overset{E_1}{\to} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \overset{E_2}{\to} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0. \end{bmatrix} = U,$$

em que

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Daqui se conclui que matriz U (e, consequentemente A) é singular, por se tratar de uma matriz triangular superior com um zero na diagonal principal. Em face do exposto acima a transformação T não é injectiva nem sobrejectiva.

Ex1-13-c) A solução geral da equação linear $Tu = b$ com $b = (1, 1, 2)$ tem a forma

$$u = u_p + u_h$$

em que u_p é uma soluccão particular e u_h é solução da equação homogénea $Tu = 0$. Como b coincide com a primeira coluna de A uma solução particular é

$$u_p = e_1 = (1, 0, 0).$$

Por outro lado, como $Tu = 0 \Leftrightarrow Au = 0 \Leftrightarrow Uu = 0$ as soluções $u_h = (x, y, z)$ desta equação são tais que (z é a incógnita livre)

$$x = y = -z,$$

pelo que

$$u_h = z(-1, -1, 1), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Conclui-se então que as soluções de $Tu = (1, 1, 2)$ são os vectores da forma

$$u = (1, 0, 0) + z(-1, -1, 1) = (1 - z, -z, z), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Exercício 28 *[2009/10 - 2º Exame - V1 - Problema 11 - MEC]*

Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$T(x, y, z, w) = (x - y + z, x - y + w, w - z), \quad (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4.$$

1. Comece por calcular as imagens por T dos vectores da base canónica de $\mathbb{R}^4$ e use-as para escrever a matriz que representa T em relação às bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$.

2. Indique uma base e a dimensão de $N(T)$ - o núcleo ou espaço nulo de T;

3. Indique uma base e a dimensão de $I(T)$ - a imagem ou contradomínio de T;

4. Indique um valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ para o qual a equação

$$Tv = (1, 2, \alpha)$$

é possível e, para esse valor de α, determine as soluções daquela equação.

....

Resolução:

1. Sejam $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ e $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = (f_1, f_2, f_3)$ as bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente, com

$$e_1 = (1, 0, 0, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, 0),\ e_3 = (0, 0, 1, 0),\ e_4 = (0, 0, 0, 1),$$

$$f_1 = (1, 0, 0),\ f_2 = (0, 1, 0),\ f_3 = (0, 0, 1).$$

Pela definição da transformação T, tem-se

$$Te_1 = (1, 1, 0) = f_1 + f_2; \quad Te_2 = (-1, -1, 0) = -f_1 - f_2;$$

$$Te_3 = (1, 0, -1) = f_1 - f_3; \quad Te_4 = (0, 1, 1) = f_2 + f_3.$$

Por definição, a matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ que representa T em relação às bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$ é aquela cuja coluna $j(= 1, 2, 3, 4)$ contém as componentes (na base canónica de $\mathbb{R}^3$) da imagem por T do vector e_j. Assim, de acordo com os cálculos anteriores, conclui-se que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.-3. O método de eliminação de Gauss permite obter de uma só vez uma base para o núcleo N_A e uma base para o espaço das colunas C_A de A. Usando a identificação habitual de representar os vectores de $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) como vectores colunas, os núcleos de A e T coincidem e também coincidem o espaço das colunas de A e a imagem (ou contradomínio) de T.

Apliquemos, pois, o método de eliminação de Gauss a A:

$$A \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U.$$

Como U é uma matriz em escada de linhas (com 2 incógnitas livres, a segunda e a quarta) é fácil obter uma base para o núcleo de U (que coincide com o núcleo de A) e tem dimensão 2, vindo

$$\mathcal{B}_{N_A} = \{(1,1,0,0), (-1,0,1,1)\}$$

sendo o primeiro elemento calculado dando à segunda e quarta incógnitas os valores 1 e 0, respectivamente, e determinando as restantes componentes de forma a que o vector pertença ao núcleo de U. Analogamente o segundo elemento obtém-se dando à segunda e quarta incógnitas os valores 0 e 1, respectivamente, e determinando as restantes componentes de forma a que o vector pertença ao núcleo de U.

Relativamente ao espaço das colunas de A, este tem como base as colunas linearmente independentes de A, que são a primeira e a terceira. Assim, este espaço tem dimensão 2 e uma base é o conjunto

$$\mathcal{B}_{C_A} = \{(1,1,0), (1,0,-1)\}.$$

4. O vector $(1,2,\alpha)$ pertence à imagem de T (ou, ao espaço das colunas de A) se existirem números reais c_1 e c_2 tais que

$$(1,2,\alpha) = c_1(1,1,0) + c_2(1,0,-1) = (c_1 + c_2, c_1, -c_2).$$

Conclui-se, pois, que só para $\alpha = 1$ o vector $(1,2,\alpha)$ pertence à imagem de T e, nesse caso, $c_1 = 2$ e $c_2 = -1$. Consequentemente, apenas para $\alpha = 1$ a equação considerada é possível e, nesse caso, como $Te_1 = (1,1,0)$ e $Te_3 = (1,0,-1)$, tem-se

$$T(2e_1 - e_3) = (1,2,1),$$

pelo que $v_p = 2e_1 - e_3 = (2,0,-1,0)$ é uma solução particular daquela equação. Sendo T uma transformação linear, a solução geral v da equação considerada é da forma

$$v = v_p + v_h, \quad v_h \in N(T),$$

ou seja, de acordo com as alíneas anteriores,

$$v = (2,0,-1,0) + a(1,1,0,0) + b(-1,0,1,1) = (2+a-b, a, -1+b, b), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Exercício 29 *[2009/10 - 1º Exame - Problema 13 - MEC]*

Seja $\mathcal{P}_2$ o espaço linear real dos polinómios $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de grau menor ou igual a dois e considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ definida como se segue: sendo $p \in \mathcal{P}_2$ dado por $p(t) = a + bt + ct^2, t \in \mathbb{R}$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, então

$$T(p) = (a + b - 2c, 2a + 3b + 4c, 5a + 6b - 2c).$$

1. Obtenha a representação matricial A de T em relação às bases canónicas de $\mathcal{P}_2$ e de $\mathbb{R}^3$.

2. Seja U uma matriz que se obtém por eliminação de Gauss a partir da matriz A. Use-a para determinar se T é injectiva e/ou sobrejectiva.

3. a) Mantendo em $\mathcal{P}_2$ a base canónica, determine uma base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ por forma que a representação matricial de T (em relação ao novo par de bases) seja a matriz U, que identificou na alínea anterior.

b) Resolva a equação
$$T(p) = b_1$$
em que b_1 é o primeiro elemento da base $\mathcal{B}$.

....

Resolução:

1. Por definição a representação matricial A de T em relação às bases canónicas $\mathcal{B}_{\mathcal{P}_2} = (1, t, t^2)$ (em que se usa o abuso de notação habitual) de $\mathcal{P}_2$ e $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = (e_1, e_2, e_3)$ (com $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$) é a matriz de $\mathbb{R}^{3\times 3}$ que tem na coluna $j = 1,2,3$ as componentes (na base canónica de $\mathbb{R}^3$) da imagem por T do elemento de ordem j da base canónica de $\mathcal{P}_2$. Calculando, obtém-se
$$T(1) = (1,2,5), \quad T(t) = (1,3,6), \quad T(t^2) = (-2,4,-2).$$
pelo que
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

2. Apliquemos o método de eliminação de Gauss à matriz A:
$$A \xrightarrow{E_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U,$$
em que
$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$
Como se sabe, designando por x o vector (representado como vector coluna) das componentes do polinómio p na base canónica de $\mathcal{P}_2$, tem-se
$$T(p) = y \quad \Leftrightarrow \quad Ax = y$$
em que na segunda destas relações se representa y também como vector coluna. Daqui resulta que T é injectiva, ou o que é equivalente $N(T) = \{0\}$, se e só se $N_A = \{0\}$ e que T é sobrejectiva (i.e. $I(T) = \mathbb{R}^3$) se e só se $C_A = \mathbb{R}^3$.

Da eliminação de Gauss resulta que A tem apenas duas colunas linearmente independentes, $\dim C_A = 2$ e que $\dim N_A = 1$. Consequentemente, T não é injectiva nem sobrejectiva.

3. a) Mantendo em $\mathcal{P}_2$ a base canónica e considerando em $\mathbb{R}^3$ uma nova base $\mathcal{B}$, a relação entre a matriz $\widetilde{A}$ que representa T em relação ao novo par de bases é a matriz A é dada por
$$\widetilde{A} = S^{-1}A,$$
em que S é a matriz de mudança da base canónica de $\mathbb{R}^3$ para a base $\mathcal{B}$. Pretende-se tomar $\widetilde{A} = U$ e como, pela eliminação de Gauss se tem $E_2E_1A = U$, deverá ser
$$S = (E_2E_1)^{-1} = E_1^{-1}E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
Assim a nova base $\mathcal{B}$ é formada pelos vectores cujas componentes figuram nas colunas da matriz S, i.e. $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ com
$$b_1 = (1,2,5), \quad b_2 = (0,1,1), \quad b_3 = (0,0,1).$$

b) Considerando em $\mathcal{P}_2$ a base canónica e em $\mathbb{R}^3$ a base $\mathcal{B}$, como T é representada pela matriz U, tem-se, em particular, $T(1) = b_1 = (1, 2, 5)$, pelo que a equação considerada é possível. Além disso, como $\dim N(T) = \dim N_U$ e, resulta da alínea a) que $\dim N_U = 1$, a solução geral daquela equação é

$$p = 1 + p_h \quad \text{com } p_h \text{ tal que } T(p_h) = 0.$$

Ora, como $N_U = L(\{(10, -8, 1)\})$, tem-se $N(T) = L(\{10 - 8t + t^2 : \ t \in \mathbb{R}\})$ e, portanto, a solução geral da equação $T(p) = b_1$ é da forma

$$p(t) = 1 + \alpha(10 - 8t + t^2), \quad \alpha, t \in \mathbb{R}.$$

Exercício 30 *[2010/11 - 2º Teste - V1 - Problema 4 - MEEC]*

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

a) Obtenha uma base para o espaço das colunas da matriz A.

b) Seja $\mathcal{P}_2$ o espaço linear real dos polinómios definidos em $\mathbb{R}$ de grau menor ou igual a 2 e considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2$ que é representada pela matriz A em relação às bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e de $\mathcal{P}_2$. Mostre que qualquer solução x da equação

$$Tx = p,$$

em que $p(t) = t + 2t^2, t \in \mathbb{R}$, pode ser escrita na forma $x = v_1 + \alpha v_0$ com $\alpha \in \mathbb{R}$ e identifique os vectores v_0 e v_1.

c) Qual das soluções da equação anterior pertence ao plano de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores $(1, 0, -1)$ e $(0, 1, -1)$.

. . . .

Resolução:

a) O método de eliminaçãoo de Gauss (MEG) permite obter uma base para o espaço das colunas de uma matriz: essa base é formada pelas colunas da matriz original que dão origem (i.e. da mesma ordem) às colunas da matriz em escada de linhas que se obtém pelo referido método. Neste caso, a implementação do MEG, com a habitual convenção de notação: $X \xrightarrow{E} Y$ significa que $Y = EX$, conduz a:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U,$$

em que

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Consequentemente, uma base - $\mathcal{B}_{C_A}$ - para o espaço das coluna da matriz A é formada pelas suas duas primeiras colunas,

$$\mathcal{B}_{C_A} = \{[1 \ 1 \ 1]^t, [1 \ 2 \ 3]^t\}.$$

b) Fixadas as bases em $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{P}_2$, neste caso as bases canónicas de ambos os espaços, designando por $u = [a \ b \ c]^t$ o vector coluna das componentes de x na base canónica de $\mathbb{R}^3$ e por $z = [0 \ 1 \ 2]^t$ o vector coluna das componentes de p na base canónica de $\mathcal{P}_2$, as equações $Tx = p$ e

$$Au = z$$

são equivalentes. Podemos usar o MEG, aplicado à matriz aumentada $[A|z]$ para obter (caso exista) a solução desta última equação. Tendo em conta que na alínea anterior o MEG já foi aplicado à matriz A, basta saber qual é o vector w resultante da aplicação do MEG ao vector z:

$$w = E_2E_1v = [0\ \ 1\ \ 0]^t.$$

Considerando o SEL cuja matriz aumentada é $[U|w]$, concluímos que este é possível e inderterminado, com grau de indeterminação 1. Consequentemente, Qualquer solução de $Au = z$ pode ser escrita na forma

$$u = u_1 + \alpha u_0, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

em que $u_0 \in N_A$ (N_A designa o núcleo de A) e u_1 é uma solução particular de $Au = z$, ambos na forma de vector coluna. Daqui se conclui que as soluções da equação original $Tx = p$ são da forma

$$x = v_1 + \alpha v_0, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

em que v_0 (respectivamente, v_1) são os vectores de $\mathbb{R}^3$ cujas componentes figuram no vector coluna u_0 (u_1).

Como $Au = z$ e $Uu = w$ são equivalentes, resolvendo este último com a convenção habitual de escolher como incógnita livre a que corresponde à coluna sem pivô, neste caso c a terceira incógnita, obtém-se:

$$\begin{cases} b = 1 - c \\ a = -b - 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 - c \\ a = -1 - c \end{cases}$$

sendo $c \in \mathbb{R}$. Do que atrás ficou dito, conclui-se então que

$$x = (a, b, c) = (-1 - c, 1 - c, c) = (-1, 1, 0) + c(-1 - 1, 1), \quad c \in \mathbb{R},$$

que é o resultado pretendido com $v_1 = (-1, 1, 0)$, $v_0 = (-1 - 1, 1)$ e $\alpha = c \in \mathbb{R}$.

c) Como vimos as soluções de $Tx = p$ representam uma recta - R - cuja equação vectorial é $R = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = (-1, 1, 0) + \alpha(-1 - 1, 1), \alpha \in \mathbb{R}\}$. Por outro lado, o plano dado - P - tem como equação vectorial $P = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = \beta(1, 0, -1) + \gamma(0, 1, -1)\}$. Consequentemente, os vectores $x \in R \cap P$ são os que pondem ser escritos em qualquer das formas:

$$x = (-1, 1, 0) + \alpha(-1 - 1, 1) = \beta(1, 0, -1) + \gamma(0, 1, -1).$$

Usando a última igualdade e escrevendo-a como um SEL em que as incógnitas são β, γ e α, tem-se para a matriz aumentada desse sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Resolvendo-o, por exemplo pelo MEG como exemplificado na alínea anterior, conclui-se que $\alpha = 0, \beta = -1, \gamma = 1$. Consequentemente, a solução de $Tx = p$ que pertence ao plano P é a solução particular v_1 atrás identificada:

$$x = v_1 = (-1, 1, 0).$$

Exercício 31 *[2010/11 - Exame - V1 - Problema 7 - MEEC]*

Seja $\mathcal{P}_2$ o espaço linear real dos polinómios de grau menor ou igual a 2 e suponha que

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

representa a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ relativamente à base canónica.

a) Qual é a matriz que representa T em relação à base ordenada $\mathcal{B} = (p_1, p_2, p_3)$, em que

$$p_1(t) = 1 - t + t^2, \quad p_2(t) = -1 + t + t^2, \quad p_3(t) = 1 + t - t^2, \quad t \in \mathbb{R}?$$

b) T é invertível ?
Se respondeu SIM, determine a inversa de T; Se respondeu NÃO, identifique o núcleo de T.
c) Resolva a equação $Tp = q$, em que $q(t) = -1 + t + t^2, t \in \mathbb{R}$.

....

Resolução:

a) Há várias vias para obter a matriz que representa a transformação T. Optamos aqui por obtê-la com recurso à definição: a matriz que representa a transformação T em relação à base $\mathcal{B}$ é aquela que tem nas suas colunas as componentes da imagem por T de cada um dos elementos da base $\mathcal{B}$, quando representada nessa base. Como T é representada pela matriz A em relação à base canónica de $\mathcal{P}_2$ já sabemos que:

$$T(1) = 3 + 3t - 3t^2 = 3(1 + t - t^2); \quad T(t) = 2 + 4t - 2t^2 = 2(1 + 2t - t^2); \quad T(t^2) = -1 + t + t^2.$$

Logo, para qualquer $t \in \mathbb{R}$,

$$Tp_1(t) = T(1) - T(t) + T(t^2) = 3(1 + t - t^2) - 2(1 + 2t - t^2) - 1 + t + t^2 = 0;$$

$$Tp_2(t) = -T(1) + T(t) + T(t^2) = -3(1 + t - t^2) + 2(1 + 2t - t^2) - 1 + t + t^2 = -2 + 2t + t^2 = 2p_2(t);$$

$$Tp_3(t) = T(1) + T(t) - T(t^2) = 3(1 + t - t^2) + 2(1 + 2t - t^2) + 1 - t - t^2 = 6 + 6t - 6t^2 = 6p_3(t).$$

Consequentemente, a matriz que representa T na base $\mathcal{B}$ é a matriz diagonal

$$\Lambda = \operatorname{diag}\{0, 2, 6\}.$$

b) A transformação T não é invertível, porque sendo representada por uma matriz diagonal com um zero na diagonal tem o núcleo com dimensão 1 (este é o espaço gerado pelo polinómio p_1) e, portanto não é nem injectiva, nem invertível, nem sobrejectiva.

c) Como para qualquer equação linear, sempre que houver soluções de $Tp = q$ (o que acontece sempre que q pertencer à imagem ou contradomínio de T) , estas são da forma

$$p = p_p + p_h$$

em que p_p é uma solução particular e $p_h \in N(T)$. Ora $q(t) = -1 + t + t^2 = p_2(t), t \in \mathbb{R}$ e, como vimos na alínea a), $T(1/2p_2) = p_2$, pelo que a equação considerada tem soluções e podemos tomar

$$p_p = 1/2p_2.$$

Por outro lado, o núcleo de T é gerado pelo polinómio p_1 (ver alínea anterior). Então as soluções da equação $Tp = q$ são da forma

$$p = 1/2p_2 + \alpha p_1, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

ou, para qualquer $t \in \mathbb{R}$,

$$p(t) = 1/2(-1 + t + t^2) + \alpha(1 - t + t^2) = \alpha - 1/2 + (1/2 - \alpha)t + (\alpha + 1/2)t^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Exercício 32 *[2012/13 - 2º Teste - V1 - Problema 4 - LEGM, MEC]*

Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^4$ definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+b, c+d, a+d, b+c), \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

a) Obtenha a matriz que representa T em relação às bases canónicas de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ e de $\mathbb{R}^4$;

b) Determine uma base para o núcleo de T e uma base para a imagem de T;

c) Das duas equações seguintes apenas uma é possível,

$$T(X) = (1, -1, 1, -1); \quad T(Y) = (1, 1, 1, -1);$$

Identifique-a e resolva-a.

....

Resolução:

a) Como $\dim \mathbb{R}^4 = \dim \mathbb{R}^{2\times 2} = 4$, a matriz $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ que representa T em relação às bases canónicas de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ e de $\mathbb{R}^4$ é aquela cuja coluna $j = 1, 2, 3, 4$ contém as componentes da imagem da matrix de ordem j da base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ por meio da transformação T quando expressa na base canónica de $\mathbb{R}^4$. Ora,

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = (1, 0, 1, 0); \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = (1, 0, 0, 1);$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = (0, 1, 0, 1); \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = (0, 1, 1, 0),$$

pelo que será

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) O núcleo e a imagem (ou contradomínio) de T são isomorfos ao núcleo e imagem (ou espaço das colunas) da matriz A e estes podem ser facilmente obtidos por eliminação de Gauss. Por outro lado, os vectores na imagem de T são os elementos $v = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ que quando representados como vectores coluna pertencem à imagem ou espaço das colunas da matriz A, ou seja aqueles para os quais a equação $Au = v$ tem solução. Procedendo à eliminacção de Gauss para a matriz aumentada $[A \vdots v]$, obtemos:

$$[A \vdots v] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \vdots & x \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \vdots & y \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \vdots & z \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \vdots & w \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \vdots & x \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \vdots & y \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \vdots & z-x \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \vdots & w \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \vdots & x \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \vdots & w \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \vdots & z-x \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \vdots & y \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \vdots & x \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \vdots & w \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \vdots & w+z-x \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \vdots & y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \vdots & x \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \vdots & w \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \vdots & w+z-x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & x+y-z-w \end{bmatrix} = [U \vdots \tilde{v}]$$

Daqui se conclui o seguinte:

- $\dim N_A = \dim N_U = 1$ (=número de colunas sem pivô). O vectores de $N_A = N_U$ são os elementos $u = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{R}^4$ tais que $u_3 = -u_4$, $u_2 = -u_3$, $u_1 = -u_2$, ou seja $N_A = L(\{-1, 1, -1, 1)\})$. O núcleo de T é isomorfo a N_A e é gerado pela matriz cujas componentes relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ são $(-1, 1, -1, 1)$, ou seja pela matriz

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

constituindo esta uma base de $N(T)$, $\{B\}$.

- $\dim C_A = \dim C_U = 3$ (=número de pivôs). Uma base de C_A é constituída pelo maior subconjunto das colunas de A linearmente independente, este conjunto é constituído pelas primeiras três colunas de A, aquelas que dão origem às colunas de U com pivô. Usando a identificação habitual de $\mathbb{R}^4$ com $\mathbb{R}^{4\times 1}$, que consiste em representar os vectores de $\mathbb{R}^4$ como vectores coluna, uma base de $I(T)$ é pois

$$\mathcal{B}_{I(T)} = \{(1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1)\}.$$

c) A introdução do vector v na eliminação de Gauss anteriormente realizada permite obter uma equação cartesiana para o contradomínio de T: pertencem a este subespaço os vectores $(x, y, v, w) \in \mathbb{R}^4$ tais que

$$x + y = z + w,$$

que é a condição de existência de solução da equação $Au = v$. Usando este resultado podemos imediatamente afirmar que a primeira das equações é possível e que a segunda é impossível, uma vez que a primeira temos $x+y = 1-1 = 0 = z+w = 1-1$ e para a segunda $x+y = 1+1 = 2 \neq z+w = 1-1 = 0$. Em tudo o que se segue consideraremos apenas a primeiras destas equações.

Tratando-se de uma equação linear a forma geral das suas soluções é

$$X = X_p + X_h$$

em que X_p é uma solução particular e $X_h \in N(T)$, ou seja $TX_h = 0$. Na alínea anterior identificámos o núcleo de T, pelo que

$$X_h = \alpha B = \alpha \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Por outro lado, o segundo membro da equação considerada é tal que

$$(1, -1, 1, -1) = c_1 - c_3,$$

em que c_j é a coluna j de A e, portanto, uma solução particular de $Au = v$ é $v = (1, 0, -1, 0)$ (já que $Av = x\,c_1 + y\,c_2 + z\,c_3 + w\,c_4$). Consequentemente, uma solução particular X_p de $TX = (1, -1, 1, -1)$ é a matriz cuja representação na base canónica $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ é

$$X_p = (1, 0, -1, 0)_{\mathcal{B}_c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A solução geral da equacção $T(X) = (1, -1, 1, -1)$ é pois da forma

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ -1-\alpha & \alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Exercício 33 *[2012/13 - Exame - V1 - Problema 7 - LEGM, MEC]*

Considere os seguintes vectores de $\mathbb{R}^3$,

$$v_1 = (1, 0, 0), \quad v_2 = (1, 1, 0), \quad v_3 = (1, 1, 2),$$

e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que

$$Tv_1 = v_2 + v_3, \quad Tv_2 = v_2, \quad Tv_3 = v_3.$$

a) Mostre que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ é uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$ e, representando os elementos de $\mathbb{R}^3$ como vectores coluna e sendo B a matriz cuja representação por colunas é $B = [v_1\ v_2\ v_3]$, determine a inversa de B;

b) Mostre que T está bem definida e determine a sua representação matricial na base $\mathcal{B}$. T é injectiva e/ou sobrejectiva?;

c) Qual é a expressão analítica de T? (ou seja, sendo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, quais são as componentes de $T(x, y, z)$ na base canónica de $\mathbb{R}^3$?)

. . . .

Resolução:

a) Tendo em conta que qualquer base de $\mathbb{R}^3$ tem 3 elementos e que B tem 3 elementos, para mostrar que $\mathcal{B}$ é uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$ basta mostrar que o conjunto constituído por v_1, v_2 e v_3 é linearmente independente. Representando aqueles vectores como vectores coluna e sendo

$$B = [v_1 v_2 v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ é linearmente indentendente se e só se a única solução da equação $Bu = 0$ for $u = 0$. Ora, como B é triangular superior e não tem zeros na diagonal principal, tem-se $Bu = 0$ se e só se $u = 0$, pelo que v_1, v_2 e v_3 é linearmente independente e, portanto, $\mathcal{B}$ é uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$. Não é explicitado nenhum método para o cálculo da inversa de B, sendo claro que qualquer dos métodos gerais (Gauss-Jordan ou por via da matriz dos cofactores) é aplicável. No entanto, tendo em conta que B é triangular superior sem zeros na diagonal principal, a sua inversa será também triangular superior e terá na diagonal principal os inversos dos que figuram na diagonal principal de B. Assim, recorrendo à definição de inversa de um matriz é fácil ver que:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

b) Sendo claro que $\mathbb{R}^3$ é o espço de chegada de T, para mostrar que T está bem definida basta ver que o seu domínio é também $\mathbb{R}^3$. Tendo-se concluído na alínea anterior que $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$, qualquer vector de $u \in \mathbb{R}^3$ pode ser representado univocamente como combinação linear dos elementos de $\mathcal{B}$, digamos

$$u = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3,$$

pelo que, sendo T linear, virá

$$Tu = \alpha T v_1 + \beta T v_2 + \gamma T v_3 = \alpha(v_2 + v_3) + \beta v_2 + \gamma v_3 = (\alpha + \beta)v_2 + (\alpha + \gamma)v_3.$$

Daqui resulta que T tem, efectivamente, $\mathbb{R}^3$ como domínio.

A matriz $\widetilde{A}$ que representa T na base $\mathcal{B}$ é aquela cuja coluna $j = 1, 2, 3$ contém as componentes de Tv_j quando representado na base $\mathcal{B}$. Ora, como,

$$Tv_1 = 0v_1 + 1v_2 + 1v_3, \quad Tv_2 = 0v_1 + 1v_2 + 0v_3, \quad Tv_3 = 0v_1 + 0v_2 + 1v_3,$$

segue-se que

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uma transformação linear definida e com valores no mesmo espaço de dimensão finita é injectiva se e só se for sobrejectiva, pelo que basta analisar a injectividade. Por outro lado, uma transformação linear é injectiva se e só se o seu núcleo for constituído pelo vector zero. Sendo T representada pela matriz $\widetilde{A}$ em relação à base $\mathcal{B}$, T é injectiva se e só se o núcleo de $\widetilde{A}$ for constituído pelo vector zero. Ora, sendo $\widetilde{A}$ triangular com uma linha nula, o seu núcleo contém vectores não nulos (as soluções não nulas de $\widetilde{A}u = 0$). Consequentemente, T não é injectiva e, portanto, também não é sobrejectiva.

c) Seja A a matriz que representa T em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ com $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$. Usando a representação dos elementos de $\mathbb{R}^3$ como vectores coluna, a matriz A, pela sua definição, tem a representação por colunas $A = [Te_1\ Te_2\ Te_3]$.

Para obter a expressão analítica de T basta conhecer A, pois sendo T linear virá, para qualquer $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$T(x,y,z) = T(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xTe_1 + yTe_2 + zTe_3.$$

Como vimo em b), T é representada por $\widetilde{A}$ na base $\mathcal{B}$. Por outro lado, sabe-se da teoria geral das transformações lineares que as matrizes A e $\widetilde{A}$ se relacionam por

$$\widetilde{A} = S^{-1}AS \quad \Leftrightarrow \quad A = S\widetilde{A}S^{-1},$$

em que S é a matriz (de mudança da base canónica para a base $\mathcal{B}$) cujas colunas contêm as componentes dos vectores da base $\mathcal{B}$ escritos na base canónica. Assim, $S = B$, de acordo com a definição desta matriz. Consequentemente,

$$A = B\widetilde{A}B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Daqui resulta que $Te_1 = (2,2,2), \quad Te_2 = (-1,-1,-2), \quad Te_3 = (1,1,1)$, e, consequentemente,

$$T(x,y,z) = x(2,2,2) + y(-1,-1,-2) + z(0,0,1) = (2x - y, 2x - y, , 2x - 2y + z),$$

que é a expressão pretendida. Alternativamente, poder-se-ia ter obtido a matriz A exprimindo os vectores da base canónica na base $\mathcal{B}$,

$$e_1 = v_1, \quad e_2 = v_2 - v_1, \quad e_3 = 1/2(v_3 - v_2)$$

e a definição de T, para obter $Te_1 = T(v_2 + v_3) = v_2 + v_3 = (2,2,2), \quad Te_2 = T(v_2 - v_1) = -v_3 = (-1,-1,-2), \quad Te_3 = T(1/2(v_3 - v_2) = (0,0,1)$.

Exercício 34 *[2013/14 - 2º Teste - V1 - Problema 4 - LEGM, MEC]*

(a) Sejam $s_1 = (1,2,3),\ s_2 = (1,-1,2), u = (3,4,4)$. Mostre que $\mathcal{B} = (s_1, s_2, u)$ é uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$ (vectores definidos no Problema 1), (b) Obtenha as componentes de $y = (-1,-3,1)$ na base $\mathcal{B}$; (c) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que $Ts_1 = s_1 + s_2$, $Ts_2 = s_2 + u$, $Tu = u$. Mostre que T está bem definida e determine a representação matricial de T na base $\mathcal{B}$, (d) Resolva a equação $Tx = y$ e apresente a solução na base canónica de $\mathbb{R}^3$.

....

Resolução:

(a)-(b) Como veremos há toda a vantagem em considerar simultaneamente as duas alíneas. Seja S a matriz cujas colunas contêm as componentes do vectores s_1, s_2, u. Para mostrar que $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$, basta mostrar que $\mathcal{B}$ é linearmente independente (ou que gera $\mathbb{R}^3$), pois tem 3 elementos (a dimensão de $\mathbb{R}^3$). Tal corresponde a mostrar que as colunas de S são linearmente independentes ou que após a eliminação de Gauss se obtém uma matriz com 3 pivôs. Por outro lado, representando y na forma de vector coluna, se, como se afirma, $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$, então a representação de y na base $\mathcal{B}$, digamos $y = (\alpha, \beta, \gamma)_{\mathcal{B}}$ pode ser obtida resolvendo para $w = (\alpha, \beta, \gamma)$ a equação

$$Sw = y,$$

pois

$$Sw = S\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix} = \alpha s_1 + \beta s_2 + \gamma u \quad \text{e} \quad y = \begin{bmatrix}-1\\ -3\\ 1\end{bmatrix}.$$

Sendo assim, para obter as respostas às questões colocadas, usamos o método de eliminação de Gauss aplicado à matriz aumentada $[S \vdots y]$. Implementando-o, obtém-se:

$$[S \vdots y] = \begin{bmatrix}1 & 1 & 3 & | & -1\\ 2 & -1 & 4 & | & -3\\ 3 & 2 & 4 & | & 1\end{bmatrix} \xrightarrow{E_1} \begin{bmatrix}1 & 1 & 3 & | & -1\\ 0 & -3 & -2 & | & -1\\ 0 & -1 & -5 & | & 4\end{bmatrix} \xrightarrow{E_2} \begin{bmatrix}1 & 1 & 3 & | & -1\\ 0 & -3 & -2 & | & -1\\ 0 & 0 & -13/3 & | & 13/3\end{bmatrix} = [U \vdots c]$$

em que

$$E_1 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ -3 & 0 & 1\end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1/3 & 1\end{bmatrix}.$$

Daqui se conclui que a matriz U, resultante da eliminação de Gauss aplicada a S, tem 3 pivôs e, portanto, de acordo com o descrito anteriormente, $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$. Para obter as componentes de y na base $\mathcal{B}$, tendo em conta que o método de eliminação de Gauss não altera o conjunto das soluções de um sistema de equações lineares, basta resolver sistema simplificado $Uw = c$, obtendo-se: $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = -1$, pelo que

$$y = (-1, -3, 1) = s_1 + s_2 - u, \qquad \text{ou} \qquad y = (1, 1, -1)_{\mathcal{B}}.$$

(c) Para ver que T está bem definida mostramos que o seu domínio é $\mathbb{R}^3$ e que a sua imagem (ou contradomínio) está contido em $\mathbb{R}^3$. Como $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$, dado um vector arbitrário w deste espaço podemos representá-lo nequela base, digamos

$$w = (x, y, z)_{\mathcal{B}} = xs_1 + ys_2 + zu.$$

Sendo T linear, virá

$$\begin{aligned} Tw &= T(xs_1 + ys_2 + zu) = xTs_1 + yTs_2 + zTu = x(s_1 + s_2) + y(s_2 + u) + zu \\ &= x(2, 1, 5) + y(4, 3, 6) + z(3, 4, 4) = (2x + 4y + 3z, x + 3y + 4z, 5x + 6y + 4z) \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

pelo que efectivamente o seu domínio é todo o $\mathbb{R}^3$ e a sua imagem está contida em $\mathbb{R}^3$.

De acordo com a definição de T, tem-se

$$Ts_1 = 1s_1 + 1s_2 + 0u, \quad Ts_2 = 0s_1 + 1s_2 + 1u, \quad Tu = 0s_1 + 0s_2 + 1u,$$

pelo que a matriz B que representa T na base $\mathcal{B}$, sendo aquela que tem em cada uma das suas colunas as componentes na base $\mathcal{B}$ da imagem por T dos vectores dessa base (segundo a ordem em que os vectores figuram na base) é dada por

$$B = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

d Sendo $x = (x_1, x_2, x_3)_{\mathcal{B}}$, ponhamos $s = [x_1\ x_2\ x_3]^t$. Vimos anteriormente que $y = (-1, -3, 1)$ é representado na base $\mathcal{B}$ como $y = s_1 + s_2 - u = (1, 1, -1)_{\mathcal{B}}$. Seja $t = [1\ 1\ -1]^t$. Vimos na alínea anterior que a matriz B que representa T na base $\mathcal{B}$ é triangular inferior sem zeros na diagonal principal. Consequentemente, B é invertível (e, portanto, também a transformação T é invertível). Daqui resulta que a equação $Tx = y$, sendo equivalente a $Bs = t$, tem uma única solução. A solução s pode ser obtida quer por eliminação de Gauss:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \vdots & 1\\ 1 & 1 & 0 & \vdots & 1\\ 0 & 1 & 1 & \vdots & -1\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \vdots & 1\\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0\\ 0 & 1 & 1 & \vdots & -1\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \vdots & 1\\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1\end{bmatrix} \Rightarrow s = \begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix},$$

quer usando a inversa da matriz B:

$$s = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = B^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Consequentemente

$$x = (1, 0, -1)_{\mathcal{B}} = s_1 - u = (1, 2, 3) - (3, 4, 4) = (-2, -2, -1).$$

Note-se ainda que o recurso à eliminação de Gauss ou à inversão de B não é indispensável para a resolução do problema, uma vez que da definição de T e tendo em conta a representação de y na base $\mathcal{B}$, se pode concluir que

$$T(s_1 - u) = Ts_1 - Tu = s_1 + s_2 - u = (-1, -3 - 1) = y,$$

donde, tendo em conta a unicidade da solução, resulta que $x = s_1 - u = (-2, -2, -1)$.

Exercício 35 *[2013/14 - Exame - V1 - Problema 7 - LEGM, MEC]*
Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z, w) = (x + 2z + w, x + 2y + 2z + 3w, x + y + 2z + 2w), \quad (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4.$$

(a) Determine bases para o núcleo de T, $N(T)$, e para a imagem de T; (b) Mostre que $(-3, 1, 2, -1)$ pertence a $N(T)$ e determine as suas componentes na base indicada anteriormente; (c) Mostre que a equação $Tu = (-1, 1, 0)$ é possível e determine o conjunto das suas soluções.

. . . .

Resolução:

a) Começamos por representar T em relação às bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$. Como

$$T(1, 0, 0, 0) = (1, 1, 1); \quad T(0, 1, 0, 0) = (0, 2, 1); \quad T(0, 0, 1, 0) = (2, 2, 2); \quad T(0, 0, 0, 1) = (1, 3, 2),$$

a matriz A que representa T naquelas bases é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

e o estudo da transformação T pode reduzir-se ao estudo da matriz A, sendo identificados o núcleo e a imagem de T com o o núcleo e o espaço das colunas de A, respectivamente. Para a determinação destes podemos recorrer ao método de eliminação de Gauss. Implementando-o, obtém-se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U.$$

Como se sabe o maior subconjunto das colunas de A linearmente independente em $\mathbb{R}^3$ é formado pelas colunas de A que correspondem (na ordem) às colunas de U com pivô, sendo esse conjunto uma base para o espaço das colunas de A, C_A. Assim, uma vez que U tem pivôs nas colunas 1 e 2, uma base (ordenada) de $I(T)$ ou de C_A é formada pelas duas primeiras colunas de A:

$$\mathcal{B}_{I(T)} = \big((1, 1, 1), (0, 2, 1)\big).$$

O método de eliminação de Gauss mantém inalterado o conjunto das soluções do sistema homogéneo em que a matriz A figura como matriz dos coeficientes, i.e. os sistemas $Av = 0$ e $Uv = 0$ têm o mesmo conjunto de soluções. Essas soluções são da forma $v = (-2z - w, -w, z, w) = z(-2, 0, 1, 0) + w(-1, -1, 0, 1)$, em que z e w são as incógnitas livres, $z, w \in \mathbb{R}$. Consequentemente, uma base (ordenada) do núcleo de T ou de A é

$$\mathcal{B}_{N(T)} = \big((-2, 0, 1, 0), (-1, -1, 0, 1)\big).$$

b) É claro que $(-3, 1, 2, -1) \in N(T)$, pois $T(-3, 1, 2, -1) = (-3 + 2 \times 2 - 1, -3 + 2 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times (-1), -3 + 1 + 2 \times 2 + 2 \times (-1)) = (0, 0, 0)$ ou $A[-3\ 1\ 2\ \ -1]^t = [0\ 0\ 0]^t$. A representação

$$(-3, 1, 2, -1) = \alpha(-2, 0, 1, 0) + \beta(-1, -1, 0, 1)$$

é imediata com $\alpha = 2$ e $\beta = -1$.

c) Ponhamos $s = (-1, 0, 1)$. Para mostrar que $Tu = s$ é possível basta mostrar que $s \in I(T)$, ou seja que existem $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tais que $s = \gamma(1, 1, 1) + \delta(0, 2, 1)$, o que facilmente se reconhece ser verdadeiro, com $\gamma = -1$ e $\delta = 1$. Tendo em conta, o significado das duas primeiras colunas de A, vem

$$s = (-1, 0, 1) = -1(1, 1, 1) + (0, 2, 1) = -T(1, 0, 0, 0) + T(0, 1, 0, 0) = T(-1, 1, 0, 0),$$

pelo que $u_p = (-1, 1, 0, 0)$ é uma solução particular de $Tu = s$.

Sendo T uma transformação linear, as soluções de $Tu = s$ são da forma $u = u_p + u_h$, em que u_p é uma solução particular e $u_h \in N(T)$. Como na alínea a) já caracterizámos o núcleo de T, segue-se que o conjunto S das soluções de $Tu = s$ é

$$S = \{u_p\} + N(T) = \{(-1, 1, 0, 0) + z(-2, 0, 1, 0) + w(-1, -1, 0, 1) : z, w \in \mathbb{R}\}.$$

Exercício 36 *[2014/15 - Exame - V1 - Problema 7 - MEEC]*

Sejam S e U os subespaços de $\mathbb{R}^{2\times2}$ das matrizes simétricas e anti-simétricas, respectivamente ($A \in S$, se $A = A^t$ e $A \in U$, se $A = -A^t$, em que A^t é a transposta de A).

a) Mostre que S e U têm dimensão 3 e 1, respectivamente, e explicite uma base para cada um deles; b) Mostre que $S \cap U = \{O\}$ (em que O é a matriz nula) e que $\mathbb{R}^{2\times2} = S + U$; c) Sendo $B_c = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ a base canónica de $\mathbb{R}^{2\times2}$ e $B_S = (s_1, s_2, s_3)$, $B_U = (u)$ as bases identificadas na alínea anterior para S e U, respectivamente, considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^{2\times2} \to \mathbb{R}^{2\times2}$ tal que

$$Te_j = s_j, \text{ se } j = 1, 2, 3, \quad Te_4 = u$$

c1) Como se representa T na base canónica de $\mathbb{R}^{2\times2}$? c2) Como se representa T na base $B = (s_1, s_2, s_3, u)$ de $\mathbb{R}^{2\times2}$? c3) Mostre que T é invertível e obtenha a representação matricial da sua inversa numa das bases, que escolherá, B_c ou B.

. . . .

Resolução:

a) Consideremos uma matriz arbitrária A de $\mathbb{R}^{2\times2}$, i.e.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Então

$$A^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, \quad -A^t = \begin{bmatrix} -a & -c \\ -b & -d \end{bmatrix}.$$

Consequentemente, $A \in S \Leftrightarrow c = b$ e $A \in U \Leftrightarrow a = d = 0$ e $b = -c$, pelo que

$$A \in S \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} = ae_1 + b(e_2 + e_3) + de_4, \quad a, b, d \in \mathbb{R},$$

$$A \in U \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} = b(e_2 - e_3), \quad b \in \mathbb{R},$$

em que $B_c = (e_1.e_2, e_3, e_4)$ com $e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $e_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, é a base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Daqui resulta que os conjuntos $\{e_1, e_2 + e_3, e_4\}$ e $\{e_2 - e_3\}$ geram S e U, respectivamente, e, sendo linearmente independentes, constituem bases daqueles subespaços. Convencionaremos que

$$s_1 = e_1, \quad s_2 = e_2 + e_3, \quad s_3 = e_4, \quad u = e_2 - e_3$$

e consideraremos as bases ordenadas de S e U, respectivamente,

$$B_S = (s_1, s_2, s_3), \quad B_U = (u).$$

Sendo a dimensão de um subespaço não nulo o número de elementos de uma base é claro que $\dim S = 3$ e $\dim U = 1$.

b) Resulta do que fizemos anteriormente que $S \cap U = \{O\}$ em que O é a matriz nula. Por outro lado, de

$$A = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t) = A_s + A_u$$

com $A_s = (A + A^t)/2 \in S$ e $A_u = (A - A^t)/2 \in U$, conclui-se que $S + U = \mathbb{R}^{2\times 2}$, uma vez que a decomposição anterior é válida para qualquer matriz de ordem 2.

c) De acordo com convenção tomada para as bases de S e U, tem-se

$$Te_1 = s_1 = e_1, \quad Te_2 = s_2 = e_2 + e_3, \quad Te_3 = s_3 = e_4, \quad Te_4 = u = e_2 - e_3,$$

pelo que a matriz $M(T, B_c)$ que representa T na base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ é

$$M(T, B_c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Note-se que pela forma como foi definida a transformação T esta matriz é a chamada matriz de mudança da base canónica (B_c) para a base B. Tendo em conta a forma como se altera a representação matricial de uma transformação linear (com igual espaço de partida e de chegada) por via da alteração da base do espaço, imediatamente se conclui que a representação matricial de T na base B é a mesma que na base canónica (B_c). Além disso, como qualquer matriz de mudança de base é invertível, T é invertível, sendo representada em qualquer das duas bases pela matriz inversa de $M(T, B_c)$. Ora, facilmente se conclui, por qualquer dos métodos leccionados ou mesmo por inspeção (uma vez que se trata de um matriz com muitos elementos nulos), que a inversa de $M(T, B_c)$ é

$$(M(T, B_c))^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

o que encerra a resposta ao problema colocado, uma vez que a inversa de T tem a mesma representação matricial em qualquer das duas bases consideradas.

Exercício 37 *[2005/6 - 1° Exame - V1 - Problema 13 - LEEC]*

Sejam $v_1 = (1, -1, 2)$ $v_2 = (4, 2, 3)$, $v_3 = (2, 4, -1)$ e A a matriz
cuja representaço por colunas é $A = [\, v_1\, v_2\, v_3\,]$.

a) Indique as dimensões de N_A e C_A, respectivamente o núcleo de A e o espaço das colunas de A, e obtenha bases ortogonais para estes subespaços de $\mathbb{R}^3$,

b) determine a equação cartesiana do plano $\mathbb{P}$ em $\mathbb{R}^3$ que contém a origem e é ortogonal ao subespaço N_A,

c) Mostre que $L_A = \mathbb{P}$, em que L_A representa o espaço das linhas de A, e indique uma base ortogonal deste subespaço.

. . . .

Resolução:

a) Começamos por aplicar o método de eliminação de Gauss à matriz A, com a habitual convenção de notação: $X \xrightarrow{E} Y$ significa que $Y = EX$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_1} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_2} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

donde se conclui que $\dim N_A = 1$ (a terceira coluna não tem pivô) e que $\dim C_A = 2$ (o número de pivôs). Resolvendo a equação $Uu = 0$ conclui-se que o núcleo de A é gerado pelo vector $u = (2, -1, 1)$, que constitui uma base ortogonal de N_A. Por outro lado, da eliminação de Gauss conclui-se que C_A é o subespaço gerado pelos vectores v_1 e v_2. Para obter uma base ortogonal de C_A usamos o método de ortogonalização de Gram-Schmidt, sendo uma base constituída pelos vectores v_1 e $\tilde{v}_2$, em que

$$\tilde{v}_2 = v_2 - \frac{< v_2, v_1 >}{||v_1||^2} v_1 = (4, 2, 3) - \frac{4}{3}(1, -1, 2) = \frac{1}{3}(8, 10, 1).$$

b) Escrevendo os elementos de $\mathbb{R}^3$ na forma (x, y, z), uma equação cartesiana do plano $\mathbb{P}$ é da forma $ax + by + cz = d$ em que (a, b, c) é um vector que gera o núcleo de A e $d = 0$, pois o plano $\mathbb{P}$ contém a origem. No presente caso $(a, b, c) = (2, -1, 1)$, pelo que uma equação cartesiana de $\mathbb{P}$ é

$$2x - y + z = 0.$$

c) Pelo teorema da projecção ortogonal $\mathbb{R}^3 = N_A \oplus N_A^\perp = N_A \oplus \mathbb{P}$. Por outro lado, sendo u um gerador de N_A,

$$Au = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u^t A^t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad < u, L_j >= 0, \quad j = 1, 2, 3$$

em que L_j é o vector na linha j de A. Consequentemente, u é ortogonal às linhas de A e, portanto, $N_A^\perp = L_A$.

Para obter uma base ortogonal de L_A, podemos usar o método de ortogonalização de Gram-Schmidt aplicado a uma base qualquer de L_A. Usando os resultados da alínea a), uma base de L_A é constituída pelos vectores $z_1 = (0, 1, 1)$ e $z_2 = (1, 4, 2)$, pois o método de eliminação de Gauss mantém invariante o espaço das linhas de uma matriz. Uma base ortogonal de L_A é pois formada pelos vectores z_1 e $\tilde{z}_2$, em que

$$\tilde{z}_2 = z_2 - \frac{< z_2, z_1 >}{||z_1||^2} z_1 = (1, 4, 2) - 3(0, 1, 1) = (1, 1, -1).$$

Exercício 38 *[2005/6 - 2º Exame - V1 - Problema 13 - LEEC]*

Sejam $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (1, -1, 5)$, $v_3 = (1, 8, -1)$.

a) Indique uma base ortogonal para o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por v_1, v_2 e v_3;

b) Indique uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que contém o vector v_1 e determine as componentes do vector v_3 nessa base.

c) Determine uma equação cartesiana da recta $\mathcal{R}$ cuja equação vectorial é $\mathcal{R} = \{v_3\} + L(\{v_1\})$.

. . . .

Resolução:

a) Para obter uma base ortogonal de $S = L(\{v_1, v_2, v_3\})$ vamos usar o método de ortogonalização de Gram-Schmidt. Usando a habitual convenção de notação, tem-se:

$$\begin{array}{ll}
u_1 = v_1 = (1, 2, 3), & ||u_1||^2 = 14, \quad < v_2, u_1 >= 14 \\
u_2 = v_2 - p_{v_2,u_1} = v_2 - \frac{<v_2,u_1>}{||u_1||^2} u_1 = v_2 - u_1 = (0, -3, 2), & ||u_2||^2 = 13, < v_3, u_1 >= 14, < v_3, u_2 >= -26 \\
u_3 = v_3 - p_{v_3,u_1} - p_{v_3,u_2} = v_3 - \frac{<v_3,u_1>}{||u_1||^2} u_1 - \frac{<v_3,u_2>}{||u_2||^2} u_2 & \\
= v_3 - u_1 + 2u_2 = v_3 - 3v_1 + 2v_2 = (0, 0, 0) &
\end{array}$$

o que significa que o vector v_3 pertence ao espaço gerado por v_1 e v_2 (ou por u_1 e u_2). Consequentemente, uma base ortogonal de S é constituída pelos vectores $u_1 = (1, 2, 3)$ e $u_2 = (0, -3, 2)$.

b) Tendo em conta que qualquer conjunto linearmente independente de $\mathbb{R}^3$(em particular, a base de S determinada na alínea anterior) é um subconjunto de uma base de $\mathbb{R}^3$, para determinar um base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que contém v_1 basta acrescentar à base de S já determinada um vector que seja ortogonal a S, o que pode ser conseguido, por exemplo, através do produto externo dos vectores v_1 e v_2 (ou de u_1 e u_2) que geram S:

$$w = v_1 \times v_2 = (13, -2, -3).$$

Assim, uma base nas condições pretendidas é $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, w\}$.

Recordemos que, de acordo com os cálculos efectuados na alínea (a), se tem

$$v_3 = u_1 - 2u_2,$$

pelo que o vector das componentes de v_3 na base $\mathcal{B}$, qualquer que seja o vector $w \in S^\perp$, é $(1, -2, 0)$.

c) A equação cartesiana da recta em causa é da forma

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ \tilde{a}x + \tilde{b}y + \tilde{c}z = \tilde{d} \end{cases}$$

em que os vectores $z_1 = (a, b, c)$ e $z_2 = (\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c})$ são ortogonais ao vector v_1 e $d =< z_1, v_3 >$, $\tilde{d} =< z_2, v_3 >$.

Nas alíneas anteriores já identificámos dois vectores ortogonais a v_1, pelo que podemos tomar $z_1 = u_2 = (0, -3, 2)$ e $z_2 = w = (13, -2, -3)$. Assim, a uma equação cartesiana de $\mathcal{R}$ é

$$\begin{cases} 3y - 2z = 26 \\ 13x - 2y - 3z = 0 \end{cases} .$$

Exercício 39 *[2006/7 - 1° Exame - V1 - Problema 11 - MEC]*

Considere uma matriz pertencente a $\mathbb{R}^{3\times 4}$ com a seguinte estrutura:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \square & \square \\ 1 & \square & 3 & 4 \\ 0 & 1 & \square & \square \end{bmatrix},$$

em que $\square$ representa um elemento não especificado.

a) Indique uma matriz, designe-a por A, que se obtém escolhendo os elementos não especificados por forma a que o núcleo de A seja gerado pelo vector (1,1,-1,-1).

b) Para a escolha efectuada na alínea anterior, determine bases e indique as dimensões dos subespaços de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$, respectivamente, gerados pelas colunas e pelas linhas de A.

c) Continuando a usar a escolha efectuada em a), determine a solução geral da equação $Au = b$ com $b = (1, 1, 0)^t$.

. . . .

Resolução:

a) Pretende-se determinar um conjunto de valores de x, y, z, w, u por forma que o núcleo da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & x & y \\ 1 & z & 3 & 4 \\ 0 & 1 & w & v \end{bmatrix}$$

seja gerado pelo vector $u_0 = (1, 1, -1, -1)$. Ora,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & x & y \\ 1 & z & 3 & 4 \\ 0 & 1 & w & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad y = 3 - x,\ z = 6,\ v = 1 - w.$$

Sabendo que para qualquer matriz $X \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ se tem

$$\dim N_X + \operatorname{car} X = 4 \text{ (= número de colunas)},$$

em que N_X representa o núcleo de X, para obter uma matriz nas condições desejadas basta escolher x e w por forma que $\operatorname{car} X = 3$, em que

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & x & 3-x \\ 1 & 6 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & w & 1-w \end{bmatrix},$$

o que pode ser feito pelo método de eliminação de Gauss:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & x & 3-x \\ 1 & 6 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & w & 1-w \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & x & 3-x \\ 0 & 4 & 3-x & 1+x \\ 0 & 1 & w & 1-w \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & x & 3-x \\ 0 & 4 & 3-x & 1+x \\ 0 & 0 & \frac{4w+x-3}{4} & -\frac{4w+x-3}{4} \end{bmatrix}.$$

Daqui se conclui que

$$\operatorname{car} X = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 4w + x \neq 3.$$

Assim, podemos escolher para A a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 6 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que corresponde a tomar $x = 0$ e $w = 0$ na matrix X.

b) De acordo com o que fizémos em a), tem-se car $A = 3$. Assim, uma base para o espaço das colunas, $\mathcal{B}_{C_A}$, é formada pelas colunas de A linearmente independentes, que de acordo com a eliminação de Gauss efectuada são a primeira, segunda e terceira colunas de A:

$$\mathcal{B}_{C_A} = \{(1,1,0),(2,6,1),(0,3,0)\}$$

ou, alternativamente, a base canónica de $\mathbb{R}^3$, uma vez que $\mathcal{B}_{C_A} = \mathbb{R}^3$.

Uma base para o espaço das linhas, $\mathcal{B}_{L_A}$, é formada pelas linhas de A linearmente independentes que, neste caso, são todas. Então como base do espaço da linhas podemos indicar uma das seguintes: as linhas de A,

$$\mathcal{B}_{L_A} = \{(1,2,0,3),(1,6,3,4),(0,1,0,1)\},$$

ou, as linhas da matriz que se obtém de A após a eliminação de Gauss,

$$\mathcal{B}_{L_A} = \{(1,2,0,3),(0,4,3,1),(0,0,-3/4,3/4)\},$$

uma vez que o método de eliminação de Gauss mantém invariante o espaço das linhas de uma matriz.

c) Como se sabe a solução geral do sistema $Au = b$ é da forma:

$$u = u_p + \alpha u_0, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

em que u_p é uma solução particular do sistema e $u_0 = (1,1,-1,-1) \in N_A$. Dada a circunstância de b coincidir com a primeira coluna de A, podemos tomar para solução particular o vector $u_p = (1,0,0,0)$. Assim, a solução geral de $Au = b$, pode ser escrita na forma:

$$u = (1,0,0,0) + \alpha(1,1,-1,-1) = (1+\alpha, \alpha, -\alpha, -\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Exercício 40 *[2006/7 - 1° Exame - V1 - Problema 13 - MEC]*

Considere o subespaço S e $\mathbb{R}^3$ gerado pelos três vectores seguintes:

$$v_1 = (1,1,0), \quad v_2 = (2,2,1), \quad v_3 = (1,1,1).$$

a) Determine uma base ortogonal de S e designe-a por $\mathcal{A}$,

b) Obtenha uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que contenha $\mathcal{A}$ e calcule as componentes do vector $v = (1,2,3)$ nesta base.

c) Indique uma equação cartesiana da recta que é ortogonal ao plano S e que passa pela origem.

....

<u>**Resolução**</u>:

a) Sendo $S = L(A)$ com $A = \{v_1, v_2, v_3\}$, aplicamos o método de ortogonalização de Gram-Schimdt ao conjunto A para obter um conjunto ortogonal, digamos $B = \{u_1, u_2, u_3\}$. Usando a notação habitual:

$$\begin{array}{rrcl}
 & u_1 & = & v_1 = (1,1,0) \\
 & u_2 & = & v_2 - p_{v_2,u_1} = v_2 - \dfrac{<v_2,u_1>}{||u_1||^2} u_1 \\
\big(||u_1||^2 = 2,\ < v_2, u_1 >= 4\big) & & = & (2,2,1) - 2(1,1,0) = (0,0,1) \\
 & u_3 & = & v_3 - p_{v_3,u_1} - p_{v_3,u_2} \\
 & & = & v_3 - \dfrac{<v_2,u_1>}{||u_1||^2} u_1 - \dfrac{<v_3,u_2>}{||u_2||^2} u_2 \\
\big(||u_2||^2 = 1,\ <v_3,u_1>= 2,\ <v_3,u_2>= 1\big) & & = & (1,1,1) - (1,1,0) - (0,0,1) = (0,0,0)
\end{array}$$

O facto de $u_3 = (0,0,0)$ significa que $v_3 \in L(\{u_1, u_2\}) = L(\{v_1, v_2\})$ e, de facto, $v_3 = v_2 - v_1$. Assim, uma base ortogonal para S é constituída pelos vectores u_1 e u_2, $\mathcal{A} = \{u_1, u_2\}$.

b) Para obter uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que contenha $\mathcal{A}$, basta obter um vector u que seja ortogonal simultaneamente a u_1 e u_2, o que pode ser conseguido, por exemplo, usando o produto externo desses vectores:

$$u = u_1 \times u_2 = (1, -1, 0)$$

Assim, uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que contém $\mathcal{A}$ é $\mathcal{B} = \mathcal{A} \cup \{u\} = \{u_1, u_2, u\}$.

Sendo $\mathcal{B}$ uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$, a representação do vector $v = (1, 2, 3)$ nesta base é dada por

$$v = p_{v,u_1} + p_{v,u_2} + p_{v,u} = 3/2\, u_1 + 3\, u_2 - 1/2\, u\,,$$

pelo que o vector das componentes de v na base ordenada (u_1, u_2, u) é $(3/2, 3, -1/2)$.

c) Pretende-se obter uma equação cartesiana da recta $\mathcal{R}$ cuja equação vectorial é $\mathcal{R} = S^{\perp}$. Escrevendo os pontos da recta na forma (x, y, z) e tendo em conta que a recta passa pela origem, essa equação cartesiana é da forma

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ \tilde{a}x + \tilde{b}y + \tilde{c}z = 0 \end{cases}$$

em que os vectores (a, b, c) e $(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c})$ geram o subespaço $S = (S^{\perp})^{\perp}$. Podemos pois tomar $(a, b, c) = u_1 = (1, 1, 0)$ e $(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}) = u_2 = (0, 0, 1)$. Assim, uma equação cartesiana da recta $\mathcal{R}$ é

$$x + y = 0 \wedge z = 0.$$

Exercício 41 *[2006/7 - 2º Exame - V1 - Problema 11 - MEC]*

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \\ 1 & -4 & 9 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. Determine a solução geral da equação $Au = b$.

2. Sendo A^t a matriz transposta de A, determine uma base para C_{A^t}, o espaço das colunas de A^t.

3.a) Verifique que, considerando em $\mathbb{R}^3$ o produto interno usual e sendo N_A o núcleo de A, os subespaços C_{A^t} e N_A são ortogonais: $N_A \perp C_{A^t}$.

3.b) Mostre que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e considerando em $\mathbb{R}^n$ o produto interno usual, o resultado anterior é válido para qualquer matriz $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ou seja, que $N_X \perp C_{X^t}$.

4. Determine uma equação cartesiana para o plano que contém a origem e que é gerado pelo subespaço C_{A^t}.

....

Resolução:

1. Para obter a solução geral de $Au = b$ usamos o método de eliminação de Gauss aplicado à matriz aumentada do sistema de equações:

$$[A \vdots b] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 1 & -1 & 6 & | & 1 \\ 1 & -4 & 9 & | & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & -3 & 3 & | & 0 \\ 0 & -6 & 6 & | & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & -3 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} = [U \vdots c].$$

O sistema de equações $Uu = c$ é indeterminado (2 pivôs e uma coluna sem pivô). Escrevendo as soluções na forma $u = (x, y, z)$, da segunda equação vem

$$-3y + 3z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = y$$

e da primeira conclui-se que

$$x = 1 - 2y - 3z \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 - 5z.$$

Então a solução geral do sistema pode ser escrita na forma

$$u = (1 - 5z, z, z) = (1, 0, 0) + z(-5, 1, 1), \quad z \in \mathbb{R},$$

sendo $(1, 0, 0)$ uma solução particular do sistema e $w = (-5, 1, 1)$ um gerador do núcleo de A, $N_A = L(\{w\})$.

2. O espaço das colunas de A^t coincide com o espaço das linhas de A, $C_{A^t} = L_A$. Uma base para este subespaço pode ser obtido a partir dos cálculos efectuados na alínea anterior: são linearmente independentes as linha 1 e 2 de A (que deram origem às linhas não nulas de U) e, uma vez que o método de eliminação de Gauss mantém invariante o espaço das linhas de uma matriz, uma base para o espaço das linhas de A consiste nas linhas não nulas de U, ou ainda

$$C_{A^t} = L_A = L(\{\ell_1, \ell_2\}) \text{ com } \ell_1 = (1, 2, 3), \ell_2 = (0, -1, 1).$$

3.a) Decorre das alíneas anteriores que para verificar que $N_A \perp C_{A^t}$ basta mostar que

$$n \perp \ell_j, \quad j = 1, 2$$

em que a ortogonalidade é no sentido usual. Ora,

$$<n, \ell_1>=<(-5, 1, 1), (1, 2, 3)>= -5 + 2 + 3 = 0, \; <n, \ell_2>=<(-5, 1, 1), (0, -1, 1)>= 0 - 1 + 1 = 0,$$

pelo que $n \perp \ell_1$ e $n \perp \ell_2$.

3.b) Usando a representação por linhas da matriz

$$X = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{bmatrix}$$

temos,

$$\begin{aligned} u \in N_X \quad & \Leftrightarrow \quad Xu = 0 \Leftrightarrow u^t X^t = 0 \Leftrightarrow < u, \ell_j >= 0, \; j = 1, \ldots, n \\ & \Leftrightarrow \quad u \perp \ell_j, \; j = 1, \ldots, n \Leftrightarrow u \perp L_X = C_{X^t}. \end{aligned}$$

Sendo o resultado anterior válido para qualquer $u \in N_X$, tal prova que $N_X \perp C_{X^t}$.

4. O plano P considerado tem como equação vectorial $P = C_{A^t} = L(\{\ell_1, \ell_2\})$. Tendo em conta que P contém a origem, a sua equação cartesiana é da forma

$$ax + by + cz = 0,$$

em que $(x, y, z) \in P$ e $(a, b, c) \in C_{A^t}^{\perp}$. Vimos anteriormente que $N_A \perp C_{A^t}$ em que $N_A = L(\{n\})$, pelo que basta tomar $(a, b, c) = n = (-5, 1, 1)$, obtendo-se

$$-5x + y + z = 0,$$

que é a relação pretendida.

Exercício 42 *[2007/8 - 2º Exame - V1 - Problema 11 - MEC]*

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 6 & -5 \end{bmatrix}$ e considere em $\mathbb{R}^n (n \in \mathbb{N})$ o produto interno usual.

1. Determine uma base (qualquer) para C_A (o espaço das colunas de A) e uma base ortogonal para N_A (o núcleo de A).

2. Da lista seguinte apenas um dos vectores (designado por b) pertence a C_A. Identifique-o e escreva a solução geral da equação $Au = b$.

   (a) $b = (1, 2, 3)$, (b) $b = (1, 3, 3)$, (c) $b = (1, 3, 2)$.

3. Qual das soluções da equação anterior está mais próxima da origem?

4. Determine uma equação cartesiana para o plano de $\mathbb{R}^3$ gerado pelas colunas de A.

5. Decomponha o vector $x = (4, -1, 0)$ na forma $x = y + z$ com $y \in C_A$ e $z \in {C_A}^{\perp}$.

. . . .

Resolução:

1. Para caracterizar o núcleo de A, N_A e o espaço das colunas de A, usamos o método de eliminação de Gauss:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 6 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

Daqui se conclui que o núcleo de A, N_A, tem dimensão 2 (o número de incógnitas livres ou o número de colunas de U sem pivô) e que o espaço das colunas de A, C_A, tem também dimensão 2 (o número de colunas de U com pivô). Uma base $\mathcal{B}_{C_A}$ para C_A é constituída pelas primeira e terceira colunas de A (as colunas da mesma ordem que as colunas de U com pivô):

$$\mathcal{B}_{C_A} = \{(1, 1, -1), (-2, 0, 6)\}.$$

Uma base para N_A, $\mathcal{B}_{N_A}$, é constituída pelas soluções de $Au = 0$, que são as mesmas de $Uu = 0$, que se obtêm dando a cada uma das incógnitas livres o valor 1 e o valor zero à outra incógnita livre:

$$\mathcal{B}_{N_A} = \{v_1, v_2\}, \quad v_1 = (1, 1, 0, 0), v_2 = (1, 0, 1, 1).$$

Para obter uma base ortogonal de N_A, digamos $\mathcal{B}^{\mathcal{O}}_{N_A} = \{u_1, u_2\}$ com $u_1 \perp u_2$, podemos aplicar a $\mathcal{B}_{N_A}$ método de ortogonalização de Gram-Schmidt:

$$u_1 = v_1 = (1, 1, 0, 0), \quad u_2 = v_2 - p_{v_2, u_1} = (1, 0, 1, 1) - \frac{1}{2}(1, 1, 0, 0) = \frac{1}{2}(1, -1, 2, 2).$$

2. O vector $b = (x, y, z)$ pertence a C_A se e só é uma combinação linear dos elementos da base $\mathcal{B}_{C_A}$. Dos vectores dados, apenas o vector em (b), $b = (1, 3, 3)$, satisfaz esta condição, como se pode verificar por eliminação de Gauss. Alternativamente, o vector $b = (x, y, z)$ pertence a C_A se e só se a terceira componente do vector $c = E_2 E_1 b$ for nula, ou seja $3x - 2y + z = 0$, que é uma equação cartesiana de C_A. Novamente se conclui que dos vectores dados apenas o vector em (b), $b = (1, 3, 3)$, satisfaz aquela condição. Para $b = (1, 3, 3)$ a solução geral de $Au = b$ é da forma:

$$u = u_p + u_h$$

em que $u_h \in N_A$ e u_p é uma solução particular da de $Au = b$, que pode obter-se determinando a solução de $Uu = (1, 2, 0)$ dando às incógnitas livres o valor zero:

$$u_p = (3, 0, 1, 0).$$

Assim a solução geral de $Au = b$ é:

$$u = (3, 0, 1, 0) + \alpha(1, 1, 0, 0) + \beta(1, -1, 2, 2), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

3. Resulta da alínea anterior que o conjunto das soluções de $Au = b$ tem a estrutura de um plano-2 em $\mathbb{R}^4$, digamos

$$\mathbb{P} = \{u_p\} + N_A.$$

Pretende-se pois saber qual é o ponto de $\mathbb{P}$ mais próximo da origem. De acordo com o teorema da melhor aproximação (ou da aproximação óptima), este ponto é naturalmente a projecção ortogonal de u_p sobre o subespaço $N_A^{\perp}$:

$$P_{N_A}^{\perp} u_p = u_p - P_{N_A} u_p,$$

em que P_{N_A} (respectivamente, $P_{N_A}^{\perp}$) representa a projecção ortogonal de $\mathbb{R}^4$ sobre N_A (${N_A}^{\perp}$).

Sendo $u_p = (3, 0, 1, 0)$ e considerando a base ortogonal $\mathcal{B}_{N_A}^{\mathcal{O}}$ de N_A identificada antes , tem-se

$$P_{N_A} u_p = p_{u_p,u_1} + p_{u_p,u_2} = \frac{<u_p, u_1>}{||u_1||^2} u_1 + \frac{<u_p, u_2>}{||u_2||^2} u_2 = \frac{3}{2}(1, 1, 0, 0) + \frac{1}{2}(1, -1, 2, 2) = (2, 1, 1, 1),$$

pelo que

$$P_{N_A}^{\perp} u_p = (1, -1, 0, -1).$$

4. Designando por (x, y, z) os elemento de $\mathbb{R}^3$, a equação cartesiana do plano gerado pelas colunas de A é da forma

$$ax + by + cz = 0,$$

em que o vector $(a, b, c) \in C_A^{\perp}$.

Uma equação cartesiana para este plano já foi mencionada na alínea 2, uma vez que aí se concluiu que $(x, y, z) \in C_A$ se e só se

$$3x - 2y + z = 0.$$

Uma outra forma de estabelecer este resultado é o que se indica a seguir:

Tendo em conta a base $\mathcal{B}_{C_A}$ de C_A identificada em 1, o vector $(a, b, c) \in C_A^{\perp}$ é ortogonal simultaneamente a $(1, 1, -1)$ e a $(-2, 0, 6)$, ou seja é tal que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Facilmente se reconhece que $(a, b, c) = \alpha(3, -2, 1)$ com $\alpha \in \mathbb{R}$. Consequentemente, uma equação do plano em causa é:

$$<(x, y, z), (3 - 2, 1)> = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x - 2y + z = 0.$$

5. O Teorema da decomposição ortogonal garante que $\mathbb{R}^3 = C_A \oplus {C_A}^{\perp}$. Designado por P a projecção ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre C_A e por $P^{\perp} = I - P$, a projecção ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre ${C_A}^{\perp}$, para qualquer $x \in \mathbb{R}^3$ tem-se

$$x = y + z, \text{ com } y = Px \text{ e } z = P^{\perp} x.$$

Uma vez que $\dim C_A = 2$ e, portanto, $\dim {C_A}^{\perp} = 1$ e que, pela alínea anterior, já dispomos de uma base (necessariamente ortogonal) de ${C_A}^{\perp}$ é mais fácil determinar $P^{\perp} x$, para um dado x. Para $x = (4, -1, 0)$, vem

$$z = P^{\perp} x = \frac{<x, (3, -2, 1)>}{||(3, -2, 1)||^2}(3, -2, 1) = \frac{14}{14}(3, -2, 1) = (3, -2, 1)$$

e, consequentemente,

$$y = Px = x - P^{\perp} x = (4, -1, 0) - (3, -2, 1) = (1, 1, -1).$$

Exercício 43 *[2007/8 - 1º Exame - V1 - Problema 12 - MEC]*

Considere os seguintes vectores de $\mathbb{R}^3$:

$$u_1 = (1, 0, -1), \quad u_2 = (2, 1, 2), \quad u_3 = (1, 2, 7).$$

1. Determine uma base ortogonal para o subespaço gerado por u_1,u_2 e u_3.
2. Determine as componentes do vector $p = 3u_1 + 2u_2 + u_3$ na base indicada em 1.
3. Considere o plano $\mathbb{P}$ de $\mathbb{R}^3$ definido por $\mathbb{P} = \{p\}+L(\{u_1, u_2\})$. Determine uma equação cartesiana para $\mathbb{P}$.
4. Qual a distância do plano $\mathbb{P}$ à origem?.

. . . .

Resolução:

1. Para obter uma base ortogonal par $L(\{u_1, u_2, u_3\})$ podemos usar o método de ortogonalização de Gram-Schmidt. Fazendo $v_1 = u_1$ determinemos $v_2 \perp v_1$:

$$v_2 = u_2 - \frac{<u_2, u_1>}{\|u_1\|^2} u_1 = u_2 \quad \text{(pois } <u_2, u_1>= 0).$$

Seguidamente determinamos v_3 ortogonal quer a $v_1 = u_1$ quer a $v_2 = u_2$:

$$\begin{aligned} v_3 &= u_3 - \frac{<u_3, u_1>}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{<u_3, u_2>}{\|u_2\|^2} u_2 = u_3 \\ &= u_3 + 3u_1 - 2u_2 = (0, 0, 0), \end{aligned}$$

pois $<u_3, u_1>= -6$,$\|u_1\|^2 = 2$, $<u_3, u_2>= 18$, $\|u_2\|^2 = 9$. Tal significa que $u_3 \in L(\{u_1, u_2\})$, sendo $u_3 = 2u_2 - 3u_1$. Consequentemente uma base (ordenada) ortogonal para $L(\{u_1, u_2, u_3\})$ é $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$.

2. Vimos na alínea anterior que $u_3 = 2u_2 - 3u_1$, pelo que $p = 3u_1 + 2u_2 + u_3 = 4u_2$. Logo (0,4) é o vector das componentes de p na base $\mathcal{B}$.

3. Já vimos que $p \in L(\{u_1, u_2\})$ e, consequentemente $\mathbb{P} = L(\{u_1, u_2\})$, pelo que $\mathbb{P}$ é um plano que passa pela origem. A sua equação cartesiana é da forma

$$ax + by + cz = 0$$

em que o vector (a, b, c) é ortogonal simultaneamente a u_1 e a u_2. Por exemplo, $(a, b, c) = (1, -4, 1)$.

4. Tendo em conta que o plano $\mathbb{P}$ passa pela origem, a sua distância à origem é zero, $d(0, \mathbb{P}) = 0$.

Exercício 44 *[2008/9 - 1º Exame - Problema 14 - LEIC]*

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e considere o subconjunto $B_\alpha = \{s, t, u_\alpha\}$ de $\mathbb{R}^3$, em que

$$s = (1, 1, 2), \quad t = (1, -1, 0), \quad u_\alpha = (1, 1, \alpha).$$

Determine

a) todos os valores de α para os quais B_α é uma base de $\mathbb{R}^3$;

b) o único valor de α para o qual B_α é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$;

c) uma equação cartesiana do plano $R = L(\{s, t\})$.

. . . .

<u>**Resolução**</u>:

a) Uma base de $\mathbb{R}^3$ é, por definição, um conjunto linearmente independente e que gera $\mathbb{R}^3$. Tratando-se B_α de um conjunto com 3 elementos, B_α será uma base de $\mathbb{R}^3$ se for linearmente independente. Para analisar a dependência (respectivamente, independência) linear de $B_\alpha = (s, t, u_\alpha)$ colocamos as componentes dos vectores s, t e u_α nas linhas (ou colunas) de uma matriz, digamos A_α, e analisamos se esta matriz é singular (respectivamente, não singular). Vejamos onde somos conduzidos por aplicação da eliminação de Gauss a A_α:

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix} \overset{E_1}{\to} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & \alpha - 2 \end{bmatrix} = U_\alpha.$$

Assim, se $\alpha = 2$, A_α é singular e, portanto, B_α não sendo linearmente independente, não é uma base de $\mathbb{R}^3$. Ao invés, se $\alpha \neq 2$, A_α é não singular e, portanto, B_α sendo linearmente independente, é uma base de $\mathbb{R}^3$.

b) Uma base base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ cujos elementos são ortogonais dois a dois. De acordo com a alínea anterior, B_α é uma base de $\mathbb{R}^3$ para $\alpha \neq 2$. Por outro lado, $s = (1, 1, 1)$ e $t = (1, -1, 0)$ são ortogonais, já que

$$< s, t >= 1 \times 1 + 1 \times (-1) + 2 \times 0 = 0$$

e, para qualquer α, t é ortogonal a u_α, já que

$$< t, u_\alpha >= 1 \times 1 + (-1) \times 1 + 0 \times \alpha = 0.$$

Assim, para que B_α seja uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ basta determinar o(s) valor(es) de α para o qual(quais) s é ortogonal a u_α. Como,

$$< s, u_\alpha >= 1 \times 1 + 1 \times 1 + 2 \times \alpha = 2 + 2\alpha,$$

tal acontece apenas para $\alpha = -1$. Consequentemente, $\alpha = -1$ é o único valor de α para o qual B_α é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

c) Como vimos na alínea anterior, $\{s, t\}$ é um conjunto ortogonal (e nenhum dos vectores é nulo) e, logo, linearmente independente. Assim, R é um plano-2 em $\mathbb{R}^3$, ou seja um plano no sentido habitual do termo, que contém o vector zero, pois R é um subespaço de $\mathbb{R}^3$. A sua equação cartesiana é da forma

$$ax + by + cz = 0,$$

em que $r = (x, y, z)$ é um vector arbitrário do plano R e $(a, b, c) \in R^\perp$. Ora $R^\perp$ tem dimensão 1 (=$\dim \mathbb{R}^3 - \dim R = 3 - 2$) e resulta dos cálculos da alínea anterior que $R^\perp$ é gerado pelo vector $u_{-1} = (1, 1, -1)$ (=u_α para $\alpha = -1$) . Consequentemente, uma equação cartesiana de R é:

$$x + y - z = 0.$$

Exercício 45 *[2008/9 - 2º Exame - Problema 14 - LEIC]*

Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno usual. Sejam $s = (1, 1, 1)$, $t = (2, 0, 1)$ e $u_\beta = (3, -1, \beta)$ com $\beta \in \mathbb{R}$, e $\mathcal{S}_\beta = L(\{s, t, u_\beta\})$.

a) Use o método de ortogonalização de Gram-Schmidt para obter um conjunto ortogonal C_β tal que $L(C_\beta) = \mathcal{S}_\beta$;

b) Determine em função de β a dimensão de $\mathcal{S}_\beta$.

c) Sempre que $\mathcal{S}_\beta \neq \mathbb{R}^3$ identifique $\mathcal{S}_\beta^\perp$ e decomponha o vector $x = (1,2,3)$ na forma $x = y + z$ com $y \in \mathcal{S}_\beta$ e $z \in \mathcal{S}_\beta^\perp$;

d) Determine uma equação cartesiana da recta $R = L(\{s\})$.

....

Resolução:

a) O método de ortogonalização de Gram-Schmidt permite obter a partir do conjunto $\{s, t, u_\beta\}$ um conjunto ortogonal, digamos $C_\beta = \{s, v, w_\beta\}$ (já sabemos que o primeiro vector dos dois conjunto pode tomar-se coincidente e que a dependência do parâmetro β só figura no terceiro elemento desse conjunto), que gera o mesmo subespaço que o conjunto original, $L(C_\beta) = L(\{s, t, u_\beta\}) = S_\beta$, do seguinte modo ($p_{y,x}$ representa, como habitualmente, a projecção ortogonal de y sobre x):

$$\begin{aligned}
v &= t - p_{t,s} = t - \frac{<t, s>}{\|s\|^2}s = (2,0,1) - (1,1,1) = (1,-1,0);\\
w_\beta &= u_\beta - p_{u_\beta,s} - p_{u_\beta,v} = u_\beta - \frac{<u_\beta, s>}{\|s\|^2}s - \frac{<u_\beta, v>}{\|v\|^2}v\\
&= (3,-1,-\beta) - \frac{2+\beta}{3}(1,1,1) - 2(1,-1,0) = \frac{1-\beta}{3}(1,1,-2).
\end{aligned}$$

b) De acordo com a alínea anterior: $\dim S_\beta = \dim L(C_\beta)$. Como para $\beta = 1$ o conjunto C_1 contém o vector nulo, tem-se $\dim L(C_1) = \dim L(\{s, v\}) = \dim L(\{s, t\}) = 2$. Se $\beta \neq 1$, C_β é um conjunto ortogonal que não contém o vector nulo (e, portanto, é linearmente independente tal como o conjunto que lhe deu origem, $\{s, t, u_\beta\}$), pelo que $\dim L(C_\beta) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.

c) Vimos na alínea anterior que $S_\beta \neq \mathbb{R}^3$ apenas para $\beta = 1$. É fácil ver que nesse caso ($\beta = 1$), $S_\beta^\perp = L(\{r\}, r = (1,1,-2)$ (este vector já foi exibido na alínea a)). Chamando z à projecção ortogonal do vector $x = (1,2,3)$ sobre o subespço $S_1^\perp$, tem-se

$$z = p_{x,r} = \frac{<x, r>}{\|r\|^2}r = -\frac{1}{2}r = \frac{1}{2}(-1,-1,2).$$

Como $S_1 \oplus S_1^\perp = \mathbb{R}^3$, a projecção ortogonal y de x sobre S_1 é

$$y = x - z = (1,2,3) - \frac{1}{2}(-1,-1,2) = \frac{1}{2}(3,5,4).$$

Alternativamente poderia ter-se calculado primeiro a projecção ortogonal y de x sobre S_1, que tem como base ortogonal o conjunto $\{s, v\}$ (ver alínea a)), e calcular posteriormente $z = x - y$.

d) A recta $R = L(\{s\})$ contém a origem. Sendo $u = (x, y, z) \in R$, a equação cartesiana de R é da forma

$$\left\{\begin{array}{l} ax + by + cz = 0\\ \tilde{a}x + \tilde{b}y + \tilde{c}z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b & c\\ \tilde{a} & \tilde{b} & \tilde{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x\\ y\\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ 0 \end{bmatrix},$$

em que os vectores (a, b, c) e $(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c})$ são linearmente independentes e são ortogonais à recta R e, portanto, ortogonais ao vector s. Ora na alínea a) foram identificados vectores com estas características. Nomeadamente, os vectores $v = (1,-1,0)$ e $r = (1,1,-2)$ são tais que $v \perp r$, $v \perp s$ e $r \perp s$. Consequentemente, uma equação cartesiana de R é

$$\left\{\begin{array}{l} x - y = 0\\ -x - y + 2z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x - y = 0\\ x - z = 0 \end{array}\right. .$$

Exercício 46 *[2009/10 - 1º Exame - Problema 14 - MEC]*

Considere em $\mathbb{R}^3$, que se supõe munido do produto interno usual, o subespaço, adiante designado por S, gerado pelos quatro vectores seguintes:

$$v_1 = (1, 1, -1), \quad v_2 = (2, 2, 1), \quad v_3 = (4, 4, -1), \quad v_4 = (1, 1, 5).$$

1. Obtenha uma base ortogonal para o subespaço S. Qual a dimensão de S?
2. Identifique uma base para $S^\perp$, o (complemento) ortogonal de S. Sendo $v = (3, 1, 1)$, obtenha a representação deste vector na forma:

$$v = s + s_\perp, \quad s \in S, s_\perp \in S^\perp.$$

3. Seja A a matriz cuja coluna $j = 1, 2, 3, 4$ contém as componentes de v_j (na base canónica) e considere a equação

$$Au = s_\perp,$$

em que $s_\perp$ foi determinado na alínea anterior e é representado como vector coluna.

Classifique, justificadamente, como possível ou impossível esta equação.

....

Resolução:

1. Temos as seguintes alternativas:(i) identificamos primeiro uma base de S, o que pode ser feito usando o método de eliminação de Gauss aplicado à matriz cujas linhas (ou colunas) são constituídas pelas componentes dos vectores dados, e seguidamente aplicamos a essa base o método de ortogonalização de Gram-Schmidt, para obter a desejada base ortogonal; (ii) Aplicamos ao conjunto dado o método de ortogonalização de Gram-Schmidt tendo em atenção que, se num determinado passo do processo, digamos o passo de ordem n resultar o vector zero, tal significa que o conjunto dos n vectores dados é linearmente dependente e, consequentemente, podemos ignorar o n-ésimo vector da lista do ponto de vista da obtenção de uma base ortogonal.

Implementemos a segunda alternativa para este caso concreto. Tomemos $u_1 = v_1$. No segundo passo temos

$$u_2 = v_2 - p_{v_2,u_1} = v_2 - u_1 = (1, 1, 2),$$

onde se usou a notação $p_{x,y} = \frac{<x,y>}{||y||^2} y$. No terceiro passo vem

$$u_3 = v_3 - p_{v_3,u_1} - p_{v_3,u_2} = v_3 - 3u_1 - u_2 = (4, 4, -1) - 3(1, 1, -1) - (1, 1, 2) = (0, 0, 0),$$

o que significa que o conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ é linearmente dependente (de facto, $v_3 = 2v_1 + v_2$) e, portanto, $L(\{v_1, v_2, v_3\}) = L(\{v_1, v_2\}) = L(\{u_1, u_2\})$.

No quarto passo (ou o terceiro modificado) temos

$$u_4 = v_4 - p_{v_4,u_1} - p_{v_4,u_2} = v_4 + u_1 - 2u_2 = (1, 1, 5) + (1, 1, -1) - 2(1, 1, 2) = (0, 0, 0).$$

Tal como no passo anterior isto significa que o conjunto $\{v_1, v_2, v_4\}$ é linearmente dependente (de facto, $v_4 = -3v_1 + 2v_2$) e, portanto, $L(\{v_1, v_2, v_3, v_4\}) = L(\{v_1, v_2, v_4\}) = L(\{v_1, v_2\} = L(\{u_1, u_2\})$. Consequentemente uma base ortogonal de S é o conjunto

$$\{u_1, u_2\} = \{(1, 1, -1), (1, 1, 2)\}$$

e, além disso,

$$\dim S = 2.$$

2. Como $\mathbb{R}^3 = S \oplus S^\perp$ e $\dim S = 2$, tem-se $\dim S^\perp = 1$. Para obter uma base de $S^\perp$ basta pois determinar um vector, digamos u, que seja simultaneamente ortogonal aos elementos de uma base de S: $u \perp u_1$ e $u \perp u_2$. Como para o produto interno usual de $\mathbb{R}^3$, interpretando os vectores como vectores coluna, se tem $<x,y>= x^t y$, tal pode ser conseguido determinando um elemento $u \neq 0$ do núcleo da matriz

$$\begin{bmatrix} u_1^t \\ u_2^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

que facilmente conclui ser $u = (-1, 1, 0)$, ou qualquer seu múltiplo não nulo. Temos então $S^\perp = L(\{(-1, 1, 0)\})$, sendo $\{(-1, 1, 0)\}$ uma base de $S^\perp$.

Designemos por P a projecção ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre S e por $P^\perp = I - P$ a projecção ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre $S^\perp$. Como já dispomos de base ortogonais quer para S quer para $S^\perp$, é mais simples calcular $P^\perp v$, pois $S^\perp$ tem dimensão 1. Assim,

$$s_\perp = P^\perp v = \frac{<v,u>}{\|u\|^2} u = -u = (1, -1, 0)$$

e

$$s = Pv = v - P^\perp v = v + u = (2, 2, 1).$$

3. Sendo $b \in \mathbb{R}^3$ a equação $Au = b$ é possível se e só se $b \in C_A$ (C_A representa o espaço das colunas de A). Pela forma como foi definida a matriz A, o espaço das colunas de A coincide com o espaço gerado pelo conjunto $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, que, de acordo com a alínea 1, coincide com o espaço gerado pelo conjunto $\{v_1, v_2\}$ e é o subespaço S. Então, a equação $Au = b$ é possível se e só se $b \in S$. Como na equação dada, $Au = s_\perp$, se tem $s_\perp \in S^\perp$ e $S \cap S^\perp = \{0\}$, conclui-se que esta equação é impossível.

Exercício 47 *[2009/10 - 2º Exame - Problema 12 - MEC]*

Seja S o subespaço (plano) de $\mathbb{R}^3$ formado pelos elementos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que satisfazem a equação (cartesiana):

$$2x + y - z = 0.$$

Determine sucessivamente:

1. Uma base de $S^\perp$, o (complemento) ortogonal de S;
2. Uma base ortogonal de S;
3. A distância de $v = (1, 1, 1)$ ao subespaço S;
4. Uma equação cartesiana do subespaço (plano) que é ortogonal a S e que contém o vector $(1, 1, 3)$.

....

Resolução:

1. Sendo S um plano-2 (plano vulgar), pelo teorema da decomposição ortogonal, tem-se $\mathbb{R}^3 = S \oplus S^\perp$, pelo que $\dim S^\perp = 1$. Para obter uma base de $S^\perp$ basta obter um vector que seja ortogonal ao elementos de S. Ora, esse elemento pode ser identificado da equação cartesiana do plano, já que

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0,$$

o que significa que o vector $s_\perp = (2, 1, -1)$ é ortogonal aos elementos $s = (x, y, z) \in S$. Uma base para $S^\perp$ é pois

$$\{(2, 1, -1)\}.$$

2. Uma base de S também pode ser obtida da equação anterior. Efectivamenmte, aquela equação diz-nos que os elementos de S são precisamente os elementos do núcleo da matriz linha $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Havendo duas incógnitas livres, uma base de S pode obter-se pelo processo descrito na resolução do problema 11, vindo

$$\mathcal{B}_S = \{s_1, s_2\} \quad \text{com } s_1 = (-1, 2, 0), s_2 = (1, 0, 2).$$

Uma vez que s_1 e s_2 não são ortogonais, podemos usar o método de ortogonalização de Gram-Schmidt para determinar uma base ortogonal $\mathcal{O}$ de S, obtendo-se

$$\mathcal{O} = \{s_1, \tilde{s}_2\} \quad \text{com } \tilde{s}_2 = (2, 1, 5).$$

3. Designando por P a projecção ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre S, de acordo com o teorema da projecção ortogonal, a distância de v a S é dada por

$$d = d(v, S) = \min_{s \in S} ||v - s|| = ||v - Pv|| = ||P^{\perp}v||,$$

em que $P^{\perp}$ é a projecção complementar de P, ou seja, a projecção ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre $S^{\perp}$. Uma vez que já dispomos de uma base ortogonal de $S^{\perp}$, obtém-se

$$P^{\perp}v = \frac{< v, s_{\perp} >}{||s_{\perp}||^2} s_{\perp} = \frac{1}{3}(2, 1, -1).$$

Consequentemente

$$d = \frac{1}{3}\sqrt{6} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

4. Comecemos por notar que o vector $u = (1, 1, 3)$ pertence a S. Consequentemente, o subespaço (plano) pretendido, designêmo-lo por U, é gerado por u e pelo vector $s_{\perp} = (2, 1, -1)$, uma vez que este é ortogonal a S. De acordo com o que vimos nas alíneas anteriores, a equação cartesiana deste plano é da forma

$$aX + bY + cZ = 0,$$

em que o vector $u_{\perp} = (a, b, c)$ é ortogonal aos vectores $(X, Y, Z) \in U$. Consequentemente, o vector $u_{\perp}$ é ortogonal aos elementos da base ortogonal de U, formada pelos vectores u e $s_{\perp}$, ou ainda $u_{\perp}$ pertence ao núcleo da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Usando por exemplo o método de eliminação de Gauss para obter o resultado, conclui-se que

$$u_{\perp} = (4, -7, 1),$$

ou um seu múltiplo não nulo. Então uma equação cartesiana do plano U é

$$4X - 7Y + Z = 0.$$

Exercício 48 *[2010/11 - 3º Teste - V1 - Problema 6 - MEEC]*

Seja S o subespaço (plano) de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores $(1, 1, 2)$ e $(1, -1, 1)$. Determine sucessivamente:

a) Uma base ortogonal de S;
b) Uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ contendo a base indicada em a);
c) Uma equação cartesiana de S;
d) Um conjunto gerador da recta $S \cap U$, em que $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$;
e) A distância do ponto $(1, 2, 3)$ ao plano S. ....

<u>**Resolução**</u>:

a) O método de ortogonalização de Gram-Schmidt permite obter a partir de um conjunto dado, neste caso $\{v_1, v_2\}$ com $v_1 = (1, 1, 2)$ e $v_2 = (1, -1, 1)$, um conjunto ortogonal, digamos $\{u_1, u_2\}$, que gera o mesmo subespaço. A sua aplicação conduz a:

$$u_1 = v_1; u_2 = v_2 - \frac{< v_2, u_1 >}{< u_1, u_1 >} u_1 = v_2 - \frac{1}{3} u_1 = \frac{1}{3}(2, -4, 1),$$

já que $< v_2, u_1 >= 2$ e $< u_1, u_1 >= 6$. Assim, o conjunto $\{u_1, u_2\}$ é linearmente independente (pois não contém o zero) e gera S, pelo que constitui uma base ortogonal de S.

b) Uma vez que de acordo com a alínea anterior $\dim S = 2$ para obter uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ basta juntar ao conjunto $\{u_1, u_2\}$, que é base ortogonal de S, um vector, designemo-lo por u_3, que seja simultaneamente ortogonal a u_1 e a u_2, ou seja usando a representação dos elementos de $\mathbb{R}^3$ como vectores coluna

$$< u_1, u_3 >= u_1^t u_3 = 0; \quad < u_2, u_3 >= u_2^t u_3 = 0.$$

Ora tal corresponde a determinar as soluções do sistema de equações $Au = 0$, em que $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$.
Usando, por exemplo,o método de eliminação de Gauss para o resolver, conclui-se que:

$$u = y(3, 1, -2), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Assim, podemos tomar para o vector a determinar $u_3 = (3, 1, -2)$.

c) Escrevendo os vectores de $\mathbb{R}^3$ na forma (x, y, z) e tendo em conta que S é um subespaço (e, portanto, contém o vector zero), uma equação cartesiana de S é da forma

$$ax + by + cz = 0$$

em que (a, b, c) é ortogonal a S. Ora, na alínea anterior determinámos um vector nestas condições, pelo que podemos tomar $(a, b, c) = u_3$. Assim, uma equação cartesiana de S é

$$3x + y - 2z = 0.$$

d) Os vectores $v = (x, y, z)$ que pertencem a $S \cap U$ são as soluções do sistema de equações

$$\begin{cases} x + y + z &= 0 \\ 3x + y - 2z &= 0 \end{cases},$$

ou na forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo-o, obtém-se $v = z(3/2, -5/2, 1) = z/2(3, -5, 2)$ com $z \in \mathbb{R}$. Assim, um conjunto gerador de $S \cap U$ é, por exemplo,

$$\{(3, -5, 2)\}.$$

e) Como se sabe, pelo Teorema da melhor aproximação, sendo $v = (1, 2, 3)$, existe um ponto em S que está mais próximo de v do que qualquer outro. Designando por P a projeção ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre S esse ponto é Pv e a distância de v a S é dada por

$$d = \|v - Pv\| = \|P^\perp v\|,$$

em que $P^\perp$ é a projecção complementar de P, $P^\perp = I - P$, a projecção ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre $S^\perp$. Como $S^\perp$ tem dimensão 1 e, de acordo com a alínea b) é gerado pelo vector $u_3 = (3, 1, -2)$, tem-se

$$P^\perp v = \frac{< v, u_3 >}{\|u_3\|^2} u_3 = -\frac{1}{\|u_3\|^2} u_3,$$

pois $< v, u_3 >= -1$ e, como $\|u_3\| = \sqrt{14}$, obtém-se

$$d = \frac{1}{\|u_3\|} = \frac{1}{\sqrt{14}}.$$

se ponto é Pv e a distância de v a S é dada por

$$d = \|v - Pv\| = \|P^\perp v\|,$$

em que $P^\perp$ é a projecção complementar de P, $P^\perp = I - P$, a projecção ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre $S^\perp$. Como $S^\perp$ tem dimensão 1 e, de acordo com a alínea b) é gerado pelo vector $u_3 = (3, 1, -2)$, tem-se

$$P^\perp v = \frac{< v, u_3 >}{\|u_3\|^2} u_3 = -\frac{1}{\|u_3\|^2} u_3,$$

pois $< v, u_3 >= -1$ e, como $\|u_3\| = \sqrt{14}$, obtém-se

$$d = \frac{1}{\|u_3\|} = \frac{1}{\sqrt{14}}.$$

Exercício 49 *[2010/11 - Exame - V1 - Problema 13 - MEEC]*

Seja S o subespaço (plano) de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores $(1, 2, 4)$ e $(-1, 5, 3)$. Determine sucessivamente:

a) Uma base ortogonal de S;
b) Uma equação cartesiana de S;
d) A representação na forma $x = s + u$, em que $s \in S$ e $u \in S^\perp$, no caso de $x = (-3, 0, 6)$;
e) Um vector $y \in \mathbb{R}^3$ cuja distância ao subespço S seja igual a 1.

....

Resolução:

a) O método de ortogonalização de Gram-Schmidt permite obter a partir de um conjunto dado, neste caso $\{v_1, v_2\}$ com $v_1 = (1, 2, 4)$ e $v_2 = (-1, 5, 3)$, um conjunto ortogonal, digamos $\{u_1, u_2\}$, que gera o mesmo subespaço. A sua aplicação conduz a:

$$u_1 = v_1; u_2 = v_2 - \frac{< v_2, u_1 >}{< u_1, u_1 >} u_1 = v_2 - \frac{21}{21} u_1 = v_2 - u_1 = (-2, 3, -1),$$

já que $< v_2, u_1 >= 21$ e $< u_1, u_1 >= 21$. Assim, o conjunto $\{u_1, u_2\}$ é linearmente independente (pois não contém o zero) e gera S, pelo que constitui uma base ortogonal de S.

b) Como S é um plano que contém a origem uma sua equação cartesiana é da forma

$$ax + by + cz = 0,$$

em que $(x, y, z) \in S$ e $s_\perp = (a, b, c)$ é um vector pertencente ao (complemento) ortogonal de S, $S^\perp$. O vector $s_\perp$ deve pois satisfazer:

$$< v_1, s_\perp >= u_1^t s_\perp = 0; \quad < v_2, s_\perp >= u_2^t s_\perp = 0.$$

Ora tal corresponde a determinar as soluções do sistema de equações $Au = 0$, em que $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$. Usando, por exemplo,o método de eliminação de Gauss para o resolver, conclui-se que:

$$u = z(2, 1, -1), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Assim, podemos tomar para o vector a determinar $s_\perp = (2, 1, -1)$.

c) Da decomposição: $\mathbb{R}^3 = S \oplus S^\perp$, decorre que qualquer vector x de $\mathbb{R}^3$, e em particular $x = (-3, 0, 6)$, pode ser representado na forma

$$x = s + u, s \in S, u \in S^\perp.$$

Designado por P a projecção ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre S e por $P^\perp$ a sua complementar (a projecção ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre $S^\perp$), a decomposição anterior é dada por

$$x = Px + P^\perp x,$$

já que $s = Px$ e $u = P^\perp x$.

Como $S^\perp$ tem dimensão 1, sendo gerado pelo vector $S_\perp = (2, 1, -1)$ como vimos anteriormente, é mais simples calcular $u = P^\perp x$, vindo

$$u = P^\perp x = \frac{< x, s_\perp >}{< s_\perp, s_\perp >} s_\perp = \frac{-12}{6} s_\perp = -2(2, 1, -1) = (-4, -2, 2)$$

Então

$$s = Px = x - P^\perp x = x - u = (-3, 0, 6) - (-4, -2, 2) = (1, 2, 4).$$

d) A distância d de um ponto $y \in \mathbb{R}^3$ ao subespço S é dada por

$$d = \|P^\perp y\|,$$

em que, como anteriormente $P^\perp$ é a projecção ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre $S^\perp$. Como vimos o subespço $S^\perp$ tem dimensão 1, sendo gerado pelo vector $s_\perp = (2, 1, -1)$. Então, sendo $y = (\alpha, \beta, \gamma)$,

$$d = \frac{| < y, s_\perp > |}{||s_\perp||} = \frac{|2\alpha + \beta - \gamma|}{\sqrt{6}}$$

O problema dado consiste pois em dar um exemplo de um vector $y = (\alpha, \beta, \gamma)$ tal que

$$|2\alpha + \beta - \gamma| = \sqrt{6}.$$

Dão-se aqui alguns exemplos de vectores nestas condições:

$$\frac{1}{\sqrt{6}}(3, 0, 0) = \sqrt{\frac{3}{2}}(1, 0, 0); \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(2, 2, 0) = \sqrt{\frac{2}{3}}(1, 1, 0); \quad (0, 0, \sqrt{6}); \quad (0, 0 - \sqrt{6}).$$

Exercício 50 *[2012/13 - 3º Teste - V1 - Problema 6 - LEGM, MEC]*

Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno usual, sejam

$$v_1 = (1, -1, -1), \quad v_2 = (1, 2, 2),$$

$P = L(\{v_1, v_2\})$ e $P^\perp$ o (complemento) ortogonal de P.

1. Determine:

   (a) Uma base ortogonal de P contendo v_1, uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que contenha a anterior, e a representação de $x = (3, -1, 1)$ na forma $x = p + p_\perp$ com $p \in P$ e $p_\perp \in P^\perp$;

   (b) Uma equação cartesiana de P e uma equação cartesiana de um plano Q que é ortogonal a P e que contém x.

2. Representando os elementos de $\mathbb{R}^3$ como vectores coluna, considere a matriz cuja representação por colunas é $A = [v_1\ v_2\ x]$. Mostre que $A = BL$, em que L é uma matriz triangular e B é uma matriz "ortogonal"(i. e. as suas colunas constituem um conjunto ortogonal).

. . . .

__Resolução__:

1.a) Comecemos por notar que v_1, v_2 é linearmente independente (pois, os dois vectores dados não múltiplos um do outro) e, portanto, $\dim P = 2$ ou seja, P é um plano no sentido habitual do termo. Para obter uma base ortogonal de P contendo v_1 basta usar o método de ortogonalização de Gram-Schmidt. A base (ordenada) ortogonal assim obtida é $\mathcal{B}_P = (v_1, \tilde{v}_2)$ com

$$\tilde{v}_2 = v_2 - p_{v_2, v_1} = v_2 - \frac{<v_2, v_1>}{<v_1, v_1>} v_1 = v_2 - \frac{-3}{3} v_1 = v_2 + v_1 = (2, 1, 1).$$

Para obter uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ contendo $\mathcal{B}_P$ basta determinar um vector de $\mathbb{R}^3$, digamos v_3, que seja simultaneamente ortogonal quer a v_1 quer a $\tilde{v}_2$. Tal pode ser conseguido por vários processos. Por exemplo, usando para v_3 um múltiplo não nulo do produto externo dos dois vectores:

$$v_3 = \frac{1}{3} v_1 \times \tilde{v}_2 = (0, -1, 1),$$

ou determinando v_3 por forma a que este vector pertença ao núcleo da matriz cujas linhas contêm as componentes de v_1 e $\tilde{v}_2$. A base ortogonal de $\mathbb{R}$ contendo $\mathcal{B}_P$ é $(v_1, \tilde{v}_2, v_3)$.

Para determinar a representação de $x = (3, -1, 1)$ na forma desejada basta notar que $P^\perp = L(\{v_3\})$, pelo que

$$p_\perp = P^\perp x = \frac{<x, v_3>}{<v_3, v_3>} v_3 = v_3 = (0, -1, 1),$$

já que $<x, v_3>= 2, <v_3, v_3>= 2$, e, então,

$$p = Px = x - P^\perp x = (3, 0, 0) = v_1 + \tilde{v}_2.$$

1.b) Vimos anteriormente que $P^\perp = L(\{v_3\})$. Consequentemente,

$$u = (x, y, z) \in P \quad \Leftrightarrow \quad <u, v_3>= 0 \quad \Leftrightarrow \quad v_3^t u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad [0 \ -1, 1] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z - y = 0.$$

Esta última relação é uma equação cartesiana de P. Sendo P um plano que contém a origem, uma forma simples de obter um plano Q_0 que lhe é ortogonal é gerar Q_0 por um vector comum a P e outro que é ortogonal a P, por exemplo,

$$Q_0 = L(\{v_1, v_3\})$$

cuja equação cartesiana é

$$2x + y + z = 0,$$

uma vez que $\tilde{v}_2 = (2, 1, 1)$ é ortogonal a v_1 e v_3. Este plano também contém a origem. Para obter um plano Q que contenha x, basta considerar a translação de Q_0:

$$Q = \{x\} + Q_0,$$

cuja equação cartesiana é

$$2x + y + z = 6,$$

pois $<(2, 1, 1), (3, -1, 1)>= 6$.

2. Vimos em 1.a) que

$$v_2 = \tilde{v}_2 - v_1$$

e que

$$x = p + p_\perp = v_1 + \tilde{v}_2 + v_3.$$

Consequentemente, a representação por colunas de A pode escrever-se na forma

$$A = [v_1 \, v_2 \, x] = [v_1 \, \tilde{v}_2 - v_1 \, v_3 + \tilde{v}_2 + v_1],$$

o que em termos matriciais, de acordo com o produto de matrizes, pode ser escrito como

$$A = [v_1 \, \tilde{v}_2 \, v_3] \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = BL$$

em que B é a matriz cujas colunas contêm as componentes dos vectores da base B (pela ordem considerada), que (por construção) é ortogonal :

$$B = [v_1 \, \tilde{v}_2 \, v_3]$$

e L é a matriz triangular superior

$$L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 51 *[2012/13 - Exame - V1 - Problema 13 - LEGM, MEC]*

Representando os vectores de $\mathbb{R}^3$ na forma (x, y, z), considere o plano P definido pela equação cartesiana

$$x - y - z = 0.$$

Determine:

a) Uma base ortogonal de P;

b) Uma base de $\mathbb{R}^3$ contendo a base indicada na alínea anterior;

c) A melhor aproximação do vector $w = (2, 0, -1)$ por elementos de P, a distância de w a P e a equação cartesiana de uma recta ortogonal a P contendo a origem.

. . . .

Resolução:

a) Decorre da definição de P que

$$P = \{(x, y, x - y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 0, 1) + y(0, 1, -1) : x, y \in \mathbb{R}\} = L\big(\{(1, 0, 1), (0, 1, -1)\}\big).$$

Para obter uma base ortogonal de P basta usar o método de ortogonalização de Gram-Schmidt aplicado ao conjunto $\{(1, 0, 1), (0, 1, -1)\}$ para obter um conjunto ortogonal que gera o mesmo espaço. Por exemplo,

$$U = \{u_1, u_2\}, \quad u_1 = (1, 0, 1), u_2 = (1, 2, -1),$$

é um tal conjunto ortogonal.

b) Para obter uma base de $\mathbb{R}^3$ que contenha U basta juntar a este conjunto um vector u_3 que seja ortogonal a qualquer dos vectores u_1 e u_2. Um tal vector pode ser obtido por vários processos, por exemplo: (1) calculando o produto externo dos vectores de U; (2) determinando um vector do núcleo da matriz que tem as componentes dos vectores de U nas suas linhas, (3) tendo em conta a equação cartesiana de P. Por qualquer destes métodos, facilmente se verifica que

$$u_3 = (1, -1, -1)$$

está nessas condições. Assim $\{u_1, u_2, u_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ contendo U.

c) Os teorema da projecção ortogonal e da melhor aproximação permitem resolver imediatamente todas as questões aqui colocadas. Desigando por $\mathcal{P}$ a projecção ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre P, de acordo com o teorema da melhor aproximação, o elemento de P que melhor aproxima w é $\mathcal{P}w$, sendo a distância de w dada por

$$d = \|w - \mathcal{P}w\| = \|\mathcal{P}^\perp w\|,$$

em que $\mathcal{P}^\perp$ é a projecção complementar de $\mathcal{P}$, a projecção ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre $P^\perp$, o (complemento) ortogonal de P. Vimos na alínea anterior que o vector $u_3 = (1, -1, -1)$ é um gerador de $P^\perp$. Consequentemente,

$$\mathcal{P}^\perp w = \frac{<w, u_3>}{\|u_3\|^2} u_3 = \frac{3}{3} u_3 = u_3 = (1, -1, -1),$$

pelo que

$$\mathcal{P}w = w - u_3 = (1, 1, 0) \quad \text{e} \quad d = \sqrt{3}.$$

A recta R ortogonal a P contendo a origem é gerada pelo vector u_3. Como $u_3 \perp u_1$ e $u_3 \perp u_2$, os elementos $r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ são tais que $<r, u_1>= u_1^t r = 0$ e $<r, u_2>= u_2^t r = 0$, ou seja

$$\left\{ \begin{array}{l} [\,1\ \ 0\ \ 1\,] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \\ [1\ 2 - 1] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} x + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{array} \right. ,$$

que é uma equação cartesiana de R.

Exercício 52 *[2013/14 - 3º Teste - V1 - Problema 6 - LEGM, MEC]*

Seja S o subespaço (plano) de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores $(1,2,1)$ e $(-2,5,4)$. Determine: (a) Uma base ortogonal de S; (b) Uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que contém a base indicada na alínea anterior; (c) A decomposição de $x=(-2,1,6)$ na forma $x=s+t$ com $s\in S$ e $t\in S^\perp$; (d) Uma equação cartesiana do plano $Q=\{(1,1,1)\}+S$.

....

Resolução:

a) O conjunto dado, $\{(1,2,1),(-2,5,4)\}$, é linearmente independente (nenhum dos seus elementos é múltiplo do outro), mas não é ortogonal. Podemos usar método de ortogonalização de Gram-Schmidt para obter um conjunto ortogonal que gera o mesmo subespaço de $\mathbb{R}^3$, S. Implementando-o para este caso concreto, tomemos $u_1=v_1=(1,2,1)$. No segundo passo, com $v_2=(-2,5,4)$, temos

$$u_2=v_2-p_{v_2,u_1}=v_2-2u_1=(-4,1,2),$$

onde se usou a notação $p_{x,y}=\frac{<x,y>}{\|y\|^2}y$ e $<v_2,u_1>=12$, $\|u_1\|^2=6$. Consequentemente, uma base ortogonal de S é o conjunto

$$\{u_1,u_2\}=\{(1,2,1),(-4,1,2)\}$$

e, portanto, $\dim S=2$.

b) Como $\mathbb{R}^3=S\oplus S^\perp$ e $\dim S=2$, tem-se $\dim S^\perp=1$. Para obter uma base de $\mathbb{R}^3$ que contenha a base ortogonal de S antes determinada, basta juntar a esta uma base de $S^\perp$, ou seja, determinar um vector, digamos $s_\perp$, que seja ortogonal aos elementos da base ortogonal de S: $s_\perp\perp u_1$ e $s_\perp\perp u_2$. Como para o produto interno usual de $\mathbb{R}^3$, interpretando os vectores como vectores coluna, se tem $<x,y>=x^ty$ para quaisquer $x,y\in\mathbb{R}^3$, tal pode ser conseguido determinando um elemento $s_\perp\neq 0$ do núcleo da matriz

$$\begin{bmatrix} u_1^t \\ u_2^t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

que facilmente conclui ser (por exemplo, por eliminação de Gauss) $s_\perp=(1,-2,3)$, ou qualquer seu múltiplo não nulo. Temos então $S^\perp=L(\{(1,-2,3)\})$, sendo $\{(1,-2,3)\}$ uma base de $S^\perp$. Alternativamente, para a determinação de $s_\perp$, poderíamos ter usado o produto externo dos vectores u_1 e u_2. Assim, uma base de $\mathbb{R}^3$ satisfazendo os requisitos é

$$\{u_1,u_2,s_\perp\}.$$

c) Designemos por P a projecção ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre S e por $P^\perp=I-P$ a projecção ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre $S^\perp$. A representação pretendida do vector $x=(-2,1,6)$ é $x=s+t$ com $s=Px$ e $t=P^\perp x$. Como já dispomos de bases ortogonais quer para S quer para $S^\perp$ (das alíneas anteriores), é mais simples calcular $P^\perp x$, pois $S^\perp$ tem dimensão 1.Tem-se

$$t=P^\perp x=\frac{<x,s_\perp>}{\|s_\perp\|^2}s_\perp=s_\perp=(1,-2,3) \qquad (<x,s_\perp>=14, \|u\|^2=14)$$

e

$$s=Px=x-P^\perp x=x-s_\perp=(-3,3,3).$$

d) Ponhamos $q=(1,1,1)$. Os vectores $u=(x,y,z)\in Q$ são tais que $u-q\in S$, ou, o que é equivalente, $u-q\perp S^\perp$, que por sua vez é equivalente a $u-q\perp s_\perp$, como consequência da linearidade do produto interno em qualquer das duas variáveis e de $S^\perp$ ser gerado pelo vector $s_\perp$. Então

$$<s_\perp,u-q>=s_\perp^t(u-q)=0\Leftrightarrow [1\ \ -2\ \ 3]\begin{bmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{bmatrix}=0\Leftrightarrow x-2y+3z=2,$$

que é uma a equação cartesiana de Q.

Exercício 53 *[2013/14 - Exame - V1 - Problema 13 - LEGM, MEC]*

Seja S o subespaço (plano) de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores $(1,2,2)$ e $(2,3,5)$. Determine sucessivamente: a) Uma base ortogonal de S; b) Uma base ortogonal $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ contendo a base indicada em a); c) A representação de $x=(10,3,1)$ na base $\mathcal{B}$ e a distância de x ao plano S; d) Uma equação cartesiana do subespaço (plano) gerado pelo vector $(1,2,2)$ e por um vector ortogonal ao subespaço S.

. . . .

Resolução:

a) O conjunto dado, $\{(1,2,2),(2,3,5)\}$, é linearmente independente (nenhum dos seus elementos é múltiplo do outro), mas não é ortogonal. Podemos usar método de ortogonalização de Gram-Schmidt para obter um conjunto ortogonal que gera o mesmo subespaço S de $\mathbb{R}^3$. Implementando-o para este caso concreto, tomemos $u_1=v_1=(1,2,2)$. No segundo passo, com $v_2=(2,3,5)$, temos

$$u_2 = v_2 - p_{v_2,u_1} = v_2 - 2u_1 = (0,-1,1),$$

onde se usou a notação $p_{x,y}=\frac{<x,y>}{||y||^2}y$ e $<v_2,u_1>=18$, $\|u_1\|^2=9$. Consequentemente, uma base ortogonal de S é o conjunto

$$\{u_1,u_2\}=\{(1,2,2),(0,-1,1)\}$$

b) Como $\mathbb{R}^3=S\oplus S^\perp$ e $\dim S=2$, tem-se $\dim S^\perp=1$. Para obter uma base de $\mathbb{R}^3$ que contenha a base ortogonal de S antes determinada, basta juntar a esta uma base de $S^\perp$, ou seja, determinar um vector, digamos $u_3\neq 0$, que seja ortogonal aos elementos da base ortogonal de S: $u_3\perp u_1$ e $u_3\perp u_2$. Como para o produto interno usual de $\mathbb{R}^3$, interpretando os vectores como vectores coluna, se tem $<x,y>=x^ty$ para quaisquer $x,y\in\mathbb{R}^3$, tal pode ser conseguido determinando um elemento do núcleo da matriz

$$\begin{bmatrix} u_1^t \\ u_2^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

que facilmente conclui ser $u_3=(-4,1,1)$, ou qualquer seu múltiplo não nulo. Então $\{(-4,1,1)\}$ é uma base de $S^\perp$. Alternativamente, para a determinação de u_3, poderíamos ter usado o produto externo dos vectores u_1 e u_2. Assim, uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$ satisfazendo os requisitos é

$$\mathcal{B}=\big(u_1,u_2,u_3\big).$$

c) Uma das vantagens de dispor de uma base ortogonal em $\mathbb{R}^3$ é que a determinação das componentes de um vector, neste caso $x=(10,3,1)$, se obtém somando as projecções ortogonais desse vector sobre cada um dos elementos da base ortogonal considerada:

$$x=(10,3,1)=p_{x,u_1}+p_{x,u_2}+p_{x,u_3}=2u_1-u_2-2u_3=(2,-1,-2)_{\mathcal{B}},$$

onde se usaram as relações: $\|u_1\|^2=\langle u_1,u_1\rangle=9$, $\langle x,u_1\rangle=18$, $\|u_2\|^2=\langle u_2,u_2\rangle=2$, $\langle x,u_2\rangle=-2$, $\|u_3\|^2=\langle u_3,u_3\rangle=18$, $\langle x,u_3\rangle=-36$.

A distância de x a S, $d(x,S)$, é a norma da projecção ortogonal de x sobre o subespaço $S^\perp$. Sendo este subespaço gerado pelo vector u_3, tem-se

$$d(x,S)=\|p_{x,u_3}\|=\|2u_3\|=2\sqrt{18}=6\sqrt{2}.$$

d) O plano P em causa é gerado pelo vector $v_1=u_1=(1,2,2)$ e pelo vector u_3 (determinado em b)), pois este é ortogonal a S. Consequentemente, um vector ortogonal àquele plano é o vector $u_2=(0,-1,1)$ (determinado em a) e que em conjunto com u_1 e u_3 formam uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$). Os vectores $(x,y,z)\in P$ são caracterizados por

$$\langle(0,-1,1),(x,y,z)\rangle=[\,0\ -1\ 1\,]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=0,$$

ou, o que é equivalente,

$$-y+z=0$$

que é uma equação cartesiana de P.

Exercício 54 *[2014/15 - 3º Teste - V1 - Problema 6 - MEEC]*

Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno usual e o seguinte subespaço $S = L(\{s_1, s_2\})$ com $s_1 = (1, 1, 1)$ e $s_2 = (1, -5, 1)$.
(a) Determine um vector não nulo t pertencente a $S^\perp$ (o complemento ortogonal de S); (b) Construa uma base ortogonal $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$, ordenada, contendo t e represente o vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ nessa base $\mathcal{B}$; (c) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear que a cada vector de $\mathbb{R}^3$ faz corresponder o vector de $\mathbb{R}^3$ das suas componentes na base $\mathcal{B}$. Como se representa T na base canónica? T é invertível? (d) Use a desigualdade de Cauchy-Schwarz para mostrar que para quaisquer três números reais a, b e c se tem

$$ab + bc + ac \leq a^2 + b^2 + c^2.$$

....

<u>**Resolução**</u>:

a) Representando os elementos de $\mathbb{R}^3$ como vectores coluna e usando o produto interno usual, tem-se $S^\perp = \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle s, v\rangle = 0, s \in S\} = \{v \in \mathbb{R}^3 : s^t v = 0, s \in S\}$. Tendo em conta que o produto interno é linear na 1ª variável, a condição $s^t v = 0, s \in S$ é equivalente a $s_1^t v = 0$ e $s_2^t v = 0$, já que $\{s_1, s_2\}$ é uma base de S (nenhum dos vectores é múltiplo do outro). Consequentemente, os vectores $v \in S^\perp$ são tais que:

$$\begin{bmatrix} s_1^t \\ s_2^t \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

que facilmente se conclui ser $v = k(-1, 0, 1), k \in \mathbb{R}$, pelo que podemos tomar $t = (-1, 0, 1)$.

b) Para obter uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que contenha t basta juntar a t dois vectores ortogonais de S, já que vectores ortogonais não nulos são linearmente independentes. Assim, basta usar o método de ortogonalização de Gram-Schmidt para obter de $\{s_1, s_2\}$ um conjunto ortogonal $\{s_1, \tilde{s}_2\}$, obtendo-se:

$$\tilde{s}_2 = s_2 - p_{s_2, s_1} = s_2 - \frac{\langle s_2, s_1\rangle}{\langle s_1, s_1\rangle} s_1 = s_2 + s_1 = (2, -4, 2),$$

pois $\langle s_1, s_1\rangle = 3$ e $\langle s_2, s_1\rangle = -3$. A base ortogonal de $\mathbb{R}^3$, ordenada, pretendida pode ser

$$\mathcal{B} = (t, s_1, \tilde{s}_2) = ((-1, 0, 1), (1, 1, 1), (2, -4, 2)).$$

Para determinar a representação de qualquer vector (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ nesta base, resolvemos para a determinação de (α, β, γ) o sistema de equações lineares:

$$\alpha t + \beta s_1 + \gamma \tilde{s}_2 = (x, y, z)$$

ou seja,

$$S \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ com } S = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo, por exemplo, usando a eliminação de Gauss, obtém-se:

$$(\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{z - x}{2}, \frac{z + x + y}{3}, \frac{z + x - 2y}{12}\right).$$

c) Como sabemos, se designamos por $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}^3$ os vectores das componentes dos elementos da base canónica $B_c = (e_1, e_2, e_3)$ (vectores coordenados unitários) representados na base $\mathcal{B}$, então $Sy_j = e_j$ em que S (a chamada matriz de mudança da base canónica para a base $\mathcal{B}$) é aquela cujas colunas são os vectores da base $\mathcal{B}$ representados na base canónica e foi indicada antes. Consequentemente, y_j é a coluna j da inversa de S. Ora, pela forma como está definida a transformação T, tem-se $Te_j = y_j$,

$j = 1, 2, 3$. Daqui resulta que a matriz que representa T na base canónica é aquela cuja coluna j é y_j e, portanto, é a matriz inversa de S, ou seja:

$$M(T; B_c) = S^{-1}$$

que se pode obter dos cálculos da alínea anterior tomando para (α, β, γ) a solução para: $(x, y, z) = (1, 0, 0)$ - 1ª coluna; $(x, y, z) = (0, 1, 0)$ - 2ª coluna, $(x, y, z) = (0, 0, 1)$ - 3ª coluna. Consequentemente

$$M(T; B_c) = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/12 & -1/6 & 1/12 \end{bmatrix}.$$

Em virtude da unicidade de representação dos vectores numa base, claramente a transformação T é invertível.

d) A desigualdade de Cauchy-Schwarz em $\mathbb{R}^3$ para o produto interno usual, aplicada a dois vectores $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$, determina que

$$|\langle x, y\rangle| = |x^t y| \leq ||x||\,||y|| \quad \Leftrightarrow \quad |x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}.$$

Como qualquer número real é majorado pelo seu módulo, tem-se também

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = [x_1\ x_2\ x_3] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}.$$

Ora, na desigualdade pretendida no segundo membro não figura qualquer raíz quadrada, pelo que deve ser $||x|| = ||y||$, sendo cada um dos vectores x e y tais que cada uma das suas componentes é um dos três números a, b, c, todas diferentes, pois nesse caso $||x||\,||y|| = a^2 + b^2 + c^2$. Como

$$ab + bc + ac = ab + bc + ca = [a\ b\ c] \begin{bmatrix} b \\ c \\ a \end{bmatrix},$$

o resultado pretendido pode obter-se tomando $x = (a, b, c)$ e $y = (b, c, a)$ ou vice-versa.

Exercício 55 *[2014/15 - Exame - V1 - Problema 13 - MEEC]*

Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno usual e sejam $v_1 = (1, -1, 1), v_2 = (3, 1, 1)$ e $v_3 = (2, 6, -2)$.
a) Indique uma base ortogonal para o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores v_1, v_2 e v_3; b) Indique uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que contém o vector v_1; c) Determine uma equação cartesiana para o plano $P = v_3 + L(\{v_1, v_2\})$ e calcule a distância da origem (o ponto (0,0,0)) ao plano P. d) Mostre que a equação cartesiana do plano definido em $\mathbb{R}^3$ pelos pontos $P_1 = (x_1, y_1, z_1), P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ e $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$ se pode escrever na forma:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

. . . .

Resolução:

a) Em primeiro lugar é conveniente saber a dimensão do subespaço em causa. Uma vez que nenhum dos vectores dados é o zero, que o segundo não é múltiplo do primeiro (logo, esses dois são linearmente independentes), só há duas hipóteses, aquela dimensão será: (a) 2, caso v_3 pertença ao espaço gerado por v_1 e v_2, ou será (b) 3, no caso contrário. O método de ortogonalização de Gram-Schmidt fornece-nos o instrumento para analisar a dependência ou independência linear de um conjunto e simultaneamente obter uma base ortogonal para o subespaço gerado por esse conjunto. Implementando-o, tomando $u_1 = v_1$, obtém-se

$$u_2 = v_2 - p_{v_2,u_1} u_1 = v_2 - v_1 = (2,2,0), \quad u_3 = v_3 - p_{v_3,u_1} u_1 - p_{v_3,u_2} u_2 = v_3 + 2u_1 - 2u_2 = (0,0,0),$$

pois $p_{v_2,u_1} = \langle v_2, u_1 \rangle / \langle u_1, u_1 \rangle = 1$, $p_{v_3,u_1} = \langle v_3, u_1 \rangle / \langle u_1, u_1 \rangle = -2$, $p_{v_3,u_2} = \langle v_3, u_2 \rangle / \langle u_1, u_1 \rangle = 2$. Daqui se conclui que o conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ é linearmente dependente (v_3 é uma combinação linear de v_1 e v_2), pelo que a dimensão do espaço por aquele conjunto é 2, sendo

$$\{u_1, u_2\} = \{(1,-1,1), (2,2,0)\}$$

uma base ortogonal desse subespaço.

b) Para obter uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que contenha v_1, basta juntar aos vectores $v_1 = u_1$ e u_2 (que são ortogonais) um outro vector ortogonal àqueles dois. Facilmente (usando eliminação de Gauss para a determinação de núcleo da matriz cujas linhas têm as componentes de u_1 e u_2 ou o produto externo de vectores) se conclui que o vector

$$u = (1,-1,-2)$$

está nessas condições. Consequentemente , uma base nas condições pretendidas é

$$\{u_1, u_2, u\} = \{(1,-1,1), (2,2,0), (1,-1,-2)\}.$$

c) Como vimos, uma equação cartesiana para o plano P é da forma

$$ax + by + cz = d,$$

em que o vector $t = (a,b,c)$ é ortogonal ao espaço gerado por v_1 e v_2 (e, portanto, ortogonal aos vectores $u_1 = v_1$ e u_2) e $d = \langle t, v_3 \rangle$. Vimos antes que podemos tomar $t = u = (1,-1,-2)$ e que v_3 pertence ao espaço gerado por v_1 e v_2 (ou u_1 e u_2), pelo que $d = 0$. Assim, uma equação cartesiana de P é

$$x - y - 2z = 0.$$

Como consequência das alíneas anteriores, já sabemos que a origem pertence ao plano P. Consequenetemente, a distância desse ponto ao plano P é 0:

$$d((0,0,0), P) = 0.$$

d) Uma equação vectorial do palno $\mathcal{Q}$ em $\mathbb{R}^3$ definido pelos 3 pontos P_1, P_2 e P_3 é

$$\mathcal{Q} = P_1 + L(\{P_2 - P_1, P_3 - P_1\})$$

e, portanto, pertencem ao plano $\mathcal{Q}$ os vectores $Q = (x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$ tais que $Q - P_1 \in L(\{P_2 - P_1, P_3 - P_1\})$. Tal é equivalente a afirmar que o conjunto $\{Q - P_1, P_2 - P_1, P_3 - P_1\}$ é linearmente dependente ou ainda que o determinante da matriz cujas linhas contêm as componentes de $Q - P_1, P_2 - P_1, P_3 - P_1$ (por esta ordem) é igual a zero, o que corresponde à igualdade Tal é equivalente a afirmar que o conjunto $\{Q - P_1, P_2 - P_1, P_3 - P_1\}$ é linearmente dependente ou ainda que o determinante da matriz cujas linhas contêm as componentes de $Q - P_1, P_2 - P_1, P_3 - P_1$ (por esta ordem) é igual a zero, o que corresponde à igualdade que se prendia provar:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Exercício 56 *[2005/6 - 1° Exame - V1 - Problema 14 - LEEC]*

1. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por:

$$T(x, y, z) = (x, 2y + 2z, 2y + 5z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 .$$

   a) Identifique os valores próprios de T e os espaços próprios associados aos valores próprios de T,

   b) Mostre que T é diagonalizável e identifique uma base de $\mathbb{R}^3$ relativamente à qual a representação matricial de T é diagonal.

2. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$, $B_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ e considere a forma quadrática que lhe está associada, $Q_{B_\alpha}(x) = x^t B_\alpha x$, em que $x \in \mathbb{R}^3$ se encontra representado como vector coluna.

   Identifique todos os valores de α para os quais

$$a)\ Q_{B_\alpha} \text{ é definida positiva,} \quad b)\ Q_{B_\alpha} \text{ é semi-definida positiva,} \quad c)\ Q_{B_\alpha} \text{ é indefinida.}$$

....

<u>**Resolução**</u>:

1.a) Designando por A a representação matricial de T em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$, tem-se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, cujo polinómio característico é:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -(\lambda - 1)\big((\lambda - 2)(\lambda - 5) - 4\big) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 6).$$

Os valores próprios de T (e de A) são 1 e 6, sendo as multiplicidade algébricas 2 e 1, respectivamente. Calculemos os vectores próprios de T:

$$(A - I)u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} u = 0 \quad \Rightarrow \quad u = (\alpha, -2\beta, \beta) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, -2, 1)\text{com } \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

$$(A - 6I)u = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} u = 0 \quad \Rightarrow \quad u = \gamma(0, 1, 2)\text{com } \gamma \in \mathbb{R}.$$

Os espaços próprios de T são pois $E(2) = L(\{(1, 0, 0), (0, -2, 1)\})$, com dimensão 2, e $E(4) = L(\{(0, 1, 2)\})$, com dimensão 1.

1.b) T é diagonalizável pois existe uma base de $\mathbb{R}^3$ formada exclusivamente por vectores próprios de T, nomeadamente a base ordenada $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (0, -2, 1), (0, 1, 2))$. A matriz representa T em relação a esta base é a matriz diagonal (dos valores próprios) $\Lambda = \text{diag}\,\{1, 1, 6\}$.

2. Como se sabe a forma quadrática associada a uma matriz coincide com a forma quadrática associada à parte simétrica dessa matriz, ou seja $x^t B_\alpha x = Q_{B_\alpha}(x) = Q_{C_\alpha}(x) = x^t C_\alpha x$ para $x \in \mathbb{R}^3$, em que C_α é a parte simétrica de B_α, neste caso

$$C_\alpha = \frac{1}{2}(B_\alpha + B_\alpha^t) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

A classificação da forma quadrática associada a uma matriz simétrica pode ser feita com base no sinal dos valores próprios dessa matriz, tendo-se

(i) $Q_{C_\alpha}(x)$ é definida positiva $\Leftrightarrow$ todos os valores próprios de C_α são positivos,

(ii) $Q_{C_\alpha}(x)$ é semidefinida positiva $\Leftrightarrow$ todos os valores próprios de C_α são não negativos

(iii) $Q_{C_\alpha}(x)$ é indefinida $\Leftrightarrow$ C_α tem alguns valores próprios positivos e outros negativos.

Note-se que C_α só difere da matriz A considerada em 1.a) no elemento de ordem 11, pelo que o polinómio característico de C_α é

$$q_\alpha = -(\lambda-\alpha)\big((\lambda-2)(\lambda-5)-4\big) = -(\lambda-\alpha)(\lambda-1)(\lambda-6),$$

sendo os valores próprios: α, 1 e 6. Assim,

(i) $Q_{B_\alpha}(x) = Q_{C_\alpha}(x)$ é definida positiva $\Leftrightarrow$ $\alpha > 0$,

(ii) $Q_{B_\alpha}(x) = Q_{C_\alpha}(x)$ é semidefinida positiva $\Leftrightarrow$ $\alpha \geq 0$,

(iii) $Q_{B_\alpha}(x) = Q_{C_\alpha}(x)$ é indefinida $\Leftrightarrow$ $\alpha < 0$.

Exercício 57 *[2005/6 - 2º Exame - V1 - Problema 12 - LEEC]*

Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$T(x,y,z) = \frac{1}{2}(5x+y-z, -x+5y+z, 2y+4z)\ , \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

a) Obtenha a matriz A que representa T em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ e mostre que T é invertível.

b) Seja $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)$. Mostre que $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ e obtenha a matriz B que representa T nesta base. T é diagonalizável?

c) Determine a inversa de B e use-a para obter uma expressão para a inversa de T na forma $T^{-1}(x,y,z) = (f,g,h)$, em que f, g e h são funções de x, y e z.

. . . .

Resolução:

a) Para determinar a matriz A que representa T em relação à base canónicas de $\mathbb{R}^3$, precisamos de calcular as imagens dos vectores da base canónica de $\mathbb{R}^3$ por meio da transformação T e dispor ordenadamente as componentes nas colunas da matriz A. Tem-se,

$$T(1,0,0) = \frac{1}{2}(5,-1,0), \quad T(0,1,0) = \frac{1}{2}(1,5,2), \quad T(0,0,1) = \frac{1}{2}(-1,1,4)$$

pelo que

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Usando as propriedades bem conhecidas da relação entre uma transformação linear definida e com valores no mesmo espaço e da matriz que a representa, conclui-se que T é invertível se e só se A o for. Para mostrar que A é invertível basta mostrar que o seu determinante não se anula ($\det A = 116/8 = 14,5$) ou que é não singular (o que pode ser feito usando o método de eliminação de Gauss).

b) Para mostrar que $\mathcal{B}$ é uma base é suficiente mostrar que $\mathcal{B}$ é linearmente independente, pois é constituída por 3 elementos. Para mostrar que $\mathcal{B}$ é linearmente independente, colocamos as componentes dos vectores constituintes nas colunas de uma matriz:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e mostramos que a característica de S é igual a 3, o que pode ser feito recorrendo uma vez mais ao método de eliminação de Gauss, ou tendo em conta que $\det S = 2 \neq 0$.

Note-se que S é a matriz de mudança da base canónica para a base $\mathcal{B}$, pelo que a matriz B pode ser obtida por

$$B = S^{-1}AS.$$

Calculamos a inversa de S recorrendo à matriz dos cofactores de S:

$$S^{-1} = \frac{1}{\det S}(\operatorname{cof} S)^t = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Substituíndo este resultado na expressão anterior e efectuando os cálculos, obtém-se

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Note-se que B é precisamente a forma de Jordan de A (esta é a forma mais simples à qual é possível reduzir a matriz A por matrizes de semelhança), pelo que T não é diagonalizável.

c) Um cálculo elementar conduz a $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, pelo que sendo $B^{-1} = S^{-1}A^{-1}S$, se obtém

$$A^{-1} = SB^{-1}S^{-1} = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} 9 & -3 & 3 \\ 2 & 10 & -2 \\ -1 & -5 & 13 \end{bmatrix}$$

donde se deduz a expressão pretendida:

$$T^{-1}(x,y,z) = \frac{1}{24}(9x - 3y + 3z, 2x + 10y - 2z, -x - 5y + 13z).$$

Exercício 58 *[2005/6 - 2º Exame - V1 - Problema 14 - LEEC]*

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e considere a matriz $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \alpha + 1 \\ \alpha - 1 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Determine todos os valores de α para os quais A_α é diagonalizável, quer quando encarada como matriz real quer como matriz complexa.

b) Tome $\alpha = 1$. Considere em $\mathbb{R}^2$ a forma quadrática definida por $Q_{A_1} = x^t A_1 x$ e diagonalize-a, isto é, determine uma matriz unitária U tal que fazendo $y = U^t x = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ se tem

$$Q_{A_1}(x) = x^t A_1 x = \mu_1 y_1^2 + \mu_2 y_2^2$$

para valores adequados dos escalares μ_1 e μ_2. Aproveite este resultado para classificar a forma Q_{A_1}.

. . . .

Resolução:

a) Por definição A_α é diagonalizável se existir uma matriz invertível S_α tal que a matriz

$$\Lambda_\alpha = S_\alpha^{-1} A_\alpha S_\alpha$$

é diagonal. Como vimos, se A_α é diagonalizável, então a matriz Λ_α é a matriz dos valores próprios de A_α, que em geral são números complexos ainda que a matriz seja real, valores esses que são as raízes da equação característica, $\det(A_\alpha - \lambda I) = 0$, sendo S_α a matriz dos vectores próprios associados aos valores próprios de A_α. Uma condição necessária e suficiente de diagonalização de A_α é que a dimensão dos espaços próprios de A_α, a multiplicidade geométrica dos valores próprios, coincida com a multiplicidade algébrica dos valores próprios. Naturalmente que uma condição suficiente de diagonalização é que os valores próprios de A_α sejam distintos.

Vejamos agora o caso concreto apresentado. Tem-se

$$p(\lambda) = \det(A_1 - \lambda I) = (\lambda - 1)^2 - (\alpha^2 - 1).$$

Ora, p tem duas raízes iguais se e só se $\alpha^2 = 1 (\Leftrightarrow \alpha = \pm 1)$. Consequentemente, se $\alpha \neq \pm 1$, A_α é diagonalizável. Se $|\alpha| > 1$, então A_α é diagonalizável como matriz real, uma vez que os valores próprios são reais,

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_+)(\lambda - \lambda_-) \quad \text{com} \quad \lambda_\pm = 1 \pm \sqrt{\alpha^2 - 1},$$

e se $|\alpha| < 1$, então A_α é diagonalizável como matriz complexa, uma vez que os valores próprios são complexos,

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_+)(\lambda - \lambda_-) \quad \text{com} \quad \lambda_\pm = 1 \pm i\sqrt{1 - \alpha^2}.$$

Só falta ver que, se $\alpha = \pm 1$, caso em que os valores próprios são ambos iguais a 1, então A_α não é diagonalizável, pois a dimensão do espaço próprio $E(1)$ é igual a 1, como facilmente se conclui analisando o núcleo das matrizes: $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ para $\alpha = 1$ e $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ para $\alpha = -1$.

Como conclusão final temos que A_α é diagonalizável se e só se $\alpha \neq \pm 1$.

b) Como sabemos a forma quadrática associada a A_1 coincide com a forma quadrática associada à sua parte simétrica $A_s = \frac{1}{2}(A_1 + A_1^t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Ora A_s tem dois valores próprios distintos $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 2$, sendo diagonalizável:

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = U^{-1} A_s U \quad \text{com}\ U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

(A escolha da constante $\sqrt{2}$ é feita por forma que U seja unitária: $U^{-1} = U^t$). Sendo $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ e $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, escrevendo $y = U^t x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$, tem-se

$$Q_{A_1}(x) = Q_{A_s}(x) = x^t A_s x = x^t U \Lambda_1 U^t x = y^t \Lambda_1 y = 2y_2^2 = (x_1 + x_2)^2$$

que é a diagonalização pretendida. Da expressão anterior conclui-se $Q_{A_1}(x) \geq 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}^2$, sendo $Q_{A_1}(x) = 0$ para todo o x tal que $x_2 = -x_1$, pelo que a forma quadrática é semi-definida positiva.

Exercício 59 *[2006/7 - 1° Exame - V1 - Problema 14 - MEC]*

1. Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ e $B_{\alpha,\beta,\gamma} = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 1 \\ \gamma & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Determine o polinómio característico de $B_{\alpha,\beta,\gamma}$ e daí conclua que $B_{\alpha,\beta,\gamma}$ é invertível se e só se $\gamma \neq 0$.

b) Tomando $\alpha = \gamma = 0$ e $\beta = 1$, determine os valores próprios de $B_{0,1,0}$ e os correspondentes espaços próprios. $B_{0,1,0}$ é diagonalizável?

2. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $A^t A = I$ (I representa a matriz identidade de ordem n).

a) Representando por $< .,. >$ o produto interno usual de $\mathbb{R}^n$, mostre que a função p definida por $p(x,y) =< Ax, Ay >, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$, define um produto interno em $\mathbb{R}^n$ que coincide com o produto interno usual, ou seja $p(x,y) =< x, y >$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$.

b) Mostre que se λ é valor próprio (real ou complexo) de A então $|\lambda| = 1$.

....

Resolução:

1-a) Designemos por $p_{\alpha,\beta,\gamma}$ o polinómio característico de $B_{\alpha,\beta,\gamma}$ que, por definição, é dado por

$$p_{\alpha,\beta,\gamma}(\lambda) = \det(B_{\alpha,\beta,\gamma} - \lambda I), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Calculando o determinante de $B_{\alpha,\beta,\gamma} - \lambda I$ usando, por exemplo, a fórmula de Laplace por expansão segundo a primeira linha, obtém-se

$$p_{\alpha,\beta,\gamma}(\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha-\lambda & 1 & 0 \\ \beta & -\lambda & 1 \\ \gamma & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\alpha - \lambda) - (-\beta\lambda - \gamma) = -\lambda^3 + \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma.$$

Tem-se

$$A \text{ é invertível } \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda I)|_{\lambda=0} \neq 0 \Leftrightarrow p_{\alpha,\beta,\gamma}(\lambda)|_{\lambda=0} \neq 0 \Leftrightarrow p_{\alpha,\beta,\gamma}(0) \neq 0 \Leftrightarrow \gamma \neq 0.$$

1-b) Usando o resultado da alínea anterior, vem:

$$p_{0,1,0}(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda = -\lambda(\lambda^2 - 1) = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

pelo que os valores próprios de $B_{0,1,0}$, sendo as raízes da equação característica, são (por ordem crescente de valor)

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 1.$$

Identifiquemos agora os espaços próprios correspondentes (usamos a notação $A = B_{0,1,0)}$):

- $E(-1) = N_{A+I} = L(\{(1,-1,0)\})$,
  pois $(A+I)u = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad u = a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$;
- $E(0) = N_A = L(\{(1,0,-1)\})$,
  pois $Au = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad u = b \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $b \in \mathbb{R}$;
- $E(1) = N_{A-I} = L(\{(1,1,0)\})$,
  pois $(A-I)u = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad u = c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $c \in \mathbb{R}$.

Uma vez que existem três valores próprios distintos e que a valores próprios distintos correspondem vectores próprios linearmente independentes, existe uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores próprios de $B_{0,1,0}$, nomeadamente a base ordenada

$$\mathcal{B} = ((1,-1,0),(1,0,-1),(1,1,0)).$$

A matriz diagonal dos valores próprios (por ordem crescente de valor) $\Lambda = \text{diag}\,\{-1,0,1\}$ relaciona-se com a matriz $B_{0,1,0}$ através de

$$\Lambda = S^{-1}B_{0,1,0}S$$

em que S é a matriz de mudança da base canónica para a base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$: $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

2-a) Comecemos por verificar que, sendo A tal que $A^tA = I$, a função p define um produto interno em $\mathbb{R}^n$. Sendo $x, \tilde{x}, y \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ arbitrários, tem-se

1. *simetria*:
   $p(y,x) =< Ay, Ax >=< Ax, Ay >= p(x,y)$
   onde se usou a simetria do produto interno usual,

2. *linearidade em relação à primeira variável* (y fixo):
   $p(\alpha x + \beta\tilde{x}, y) =< A(\alpha x + \beta\tilde{x}), Ay >=< \alpha Ax + \beta A\tilde{x}.Ay >= \alpha < Ax, Ay > +\beta < A\tilde{x}, Ay >= \alpha p(x,y) + \beta p(\tilde{x}, y)$,
   onde se usou a linearidade na primeira variável do produto interno usual,

3. *positividade*: $p(x,x) > 0$ se $x \neq 0$
   $p(x,x) =< Ax, Ax >= ||Ax||^2 > 0$ se $Ax \neq 0$, onde se usou a positividade do produto interno usual. Mas, como A é invertível por ser $A^tA = I$, $Ax \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$. Logo, $p(x,x) > 0$ se $x \neq 0$.

Vejamos agora que o produto interno definido por p coincide com a produto interno usual. Para tal recordemos que se representarmos os elementos de $\mathbb{R}^n$ na forma de vectores coluna, se tem $<x,y>= x^t\,y$. Então, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$, tem-se

$$p(x,y) =<Ax, Ay>= (Ax)^t\,Ay = (x^tA^t)Ay = x^t(A^tA)y = x^ty =<x,y>$$

que é o resultado pretendido.

2-b) Suponha-se que λ é valor próprio de A e seja x um vector próprio correspondente. Então

$$<Ax, Ax>=<\lambda x, \lambda x>= \lambda <x, \lambda x>= |\lambda|^2 <x,x>$$

e, pela alínea anterior, $<Ax, Ax>=<x,x>$. Logo

$$(|\lambda|^2 - 1) <x,x>= 0 \quad \Leftrightarrow \quad |\lambda| = 1,$$

pois $<x,x>\neq 0$ por ser $x \neq 0$.

Exercício 60 *[2006/7 - 2º Exame - V1 - Problema 12 - MEC]*

Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

1.a) Verifique que $\lambda = 2$ é um valor próprio de A e determine o correspondente espaço próprio.

1.b) Determine os outros valores e vectores próprios de A,

1.c) Mostre que A é diagonalizável, identificando uma matriz diagonal Λ e uma matriz invertível S tais que $\Lambda = S^{-1}AS$.

2.a) Seja $\mathcal{P}_2$ o espaço linear real dos polinómios de grau menor ou igual a 2 e suponha que A representa uma transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ relativamente à base canónica. Qual é a matriz que representa T em relação à base ordenada $\mathcal{B} = (p_1, p_2, p_3)$, em que

$$p_1(t) = 1 - t + t^2, \quad p_2(t) = -1 + t + t^2, \quad p_3(t) = 1 + t - t^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2.b) T é invertível ?

3. Mostre que se B é uma matriz invertível e μ é um valor próprio de B, então μ^{-1} é valor próprio de B^{-1} (a inversa de B).

....

Resolução:

1.a) Mostrar que $\lambda = 2$ é valor próprio de A é equivalente a mostrar que o núcleo da matriz $A-2I$ é não trivial, o que pode ser feito pelo método de eliminação de Gauss:

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Daqui se conclui que o núcleo de $A - 2I$ é não nulo, e portanto $\lambda = 2$ é valor próprio de A, sendo gerado pelo vector $u_2 = (-1, 1, 1)$. Consequentemente, o espaço próprio associado ao valor próprio $\lambda = 2$ é

$$E(2) = L(\{u_2\}) = L(\{(-1, 1, 1)\}).$$

1.b) Os valores próprios de A são as raízes do polinómio característico. O polinómio característico $p(\lambda)$ tem grau 3 e sabemos, da alínea anterior, que $\lambda = 2$ é raíz de p, pelo que podemos escrever

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)q(\lambda)$$

em que q é um polinómio de grau 2, para o qual sabemos determinar as raízes, através da equação resolvente. Vamos determinar e factorizar o polinómio característico usando, por exemplo, a regra de Laplace por expansão segundo a primeira linha,

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= (3-\lambda)[(4-\lambda)(1-\lambda)+2] - 2[3(1-\lambda)+3] - [-6+3(4-\lambda)] \\ &= (3-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) + 9(\lambda - 2) = -(\lambda-3)^2(\lambda-2)) + 9(\lambda-2) \\ &= (\lambda-2)[9 - (\lambda-3)^2] = -\lambda(\lambda-2)(\lambda-6) \end{aligned}$$

Em termos da notação anterior, temos $q(\lambda) = -\lambda(\lambda - 6)$. Ficaram assim identificados todos os valores próprios de A, a saber 0, 2 e 6.

Identifiquemos agora os espaços associados aos valores próprios 0 e 6, respectivamente $E(0) = N_A$ e $E(6) = N_{A-6I}$:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow E(0) = L(\{(1, -1, 1)\})$$

$$A - 6I = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -3 & -2 & -5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow E(6) = L(\{(1, 1, -1)\})$$

1.c) A matriz A é diagonalizável como matriz real se e só se existe uma base de $\mathbb{R}^3$ formada exclusivamente por vectores próprios de A. Ora, havendo três valores próprios de A reais, 0, 2 e 6, e sabendo que a valores próprios distintos correspondem vectores próprios linearmente independentes, conclui-se que A é diagonalizável. Uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores próprios de A

associados a 0, 2 e 6, por esta ordem, é $B = ((1,-1,1),(-1,1,1),(1,1,-1))$. A matriz S diagonalizante de A, i. e.

$$\Lambda = S^{-1}AS = \operatorname{diag}\{0,2,6\}, \tag{1}$$

é a matriz cujas colunas contêm as componentes os vectores de B na base canónica:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

2.a) Sabemos matriz que representa T em relação à base $\mathcal{B}$, digamos $\widetilde{A}$, se relaciona com a matriz A através de

$$\widetilde{A} = S^{-1}AS, \tag{2}$$

em que S é a matriz de mudança da base canónica para a base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}_2$ (que coincide com a matriz da alínea anterior). Mas, como vimos na alínea anterior, a matriz $S^{-1}AS$ é a matriz diagonal dos valores próprios, ordenados de forma crescente, $\Lambda = \operatorname{diag}\{0,2,6\}$, pelo que comparando (1) e (2) se conclui que

$$\widetilde{A} = S^{-1}AS = \Lambda.$$

2.b) Os valores próprios de T são os valores próprios da matriz A, que já sabemos serem 0, 2 e 6. O facto de $\lambda = 0$ ser valor próprio de T significa que T não é injectiva ou, o que é equivalente, que T não é invertível.

3. Sendo B uma matriz invertível de ordem n e μ um valor próprio de B, tem-se necessariamente $\mu \neq 0$, $\det B \neq 0$ e

$$\det(B - \mu I) = 0.$$

Mas, então

$$\det(B^{-1} - \mu^{-1}I) = \det(-\mu^{-1}B^{-1}(B-\mu I)) = \det(-\mu^{-1}B^{-1})\det(B-\mu I) = \frac{(-1)^n}{\mu^n \det B}\det(B-\mu I) = 0,$$

pelo que μ^{-1} é valor próprio de B^{-1}, como se pretendia provar.

Exercício 61 *[2007/8 - 2º Exame - V1 - Problema 12 - MEC]*

Seja $\mathcal{P}_2$ o espaço linear real dos polinómios definidos em $\mathbb{R}$ de grau menor ou igual a 2. Considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida como se segue: sendo $p \in \mathcal{P}_2$, com $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, $t \in \mathbb{R}$, então

$$Tp(t) = 2a_0 + a_1 + a_2 + (2a_0 + 3a_1 + 2a_2)t + (a_0 + a_1 + 2a_2)t^2, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

1. a) Indique a matriz C que representa T em relação à base canónica de $\mathcal{P}_2$.

   b) Mostre que o conjunto ordenado $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, p_3\} \subset \mathcal{P}_2$, em que

   $$p_1(t) = 1 - t^2, \quad p_2(t) = 2t, \quad p_3(t) = 1 + t^2, \quad t \in \mathbb{R},$$

   é outra base de $\mathcal{P}_2$. Represente o polinómio $1 + t + t^2$ nesta base.

   c) Verifique que a matriz A que representa T em relação à base $\mathbb{P}$ é dada por

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. a) Mostre que $\lambda = 1$ é um valor próprio de T e determine o correspondente espaço próprio.

   b) Determine outros valores próprios de T bem como os correspondentes espaços próprios.

   c) Justifique que A é diagonalizável como matriz real. Determine então uma matriz diagonal $\Lambda \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ e uma matriz invertível $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $A = S\Lambda S^{-1}$.

3. Justifique que T é invertível e determine a sua inversa.

....

Resolução:

1.a) A base (ordenada) canónica de $\mathcal{P}_2$ é $\mathcal{B} = (f_0, f_1, f_2)$ com $f_j(t) = t^j$, $t \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, 2$. A matriz C que representa T em relação à base canónica é aquela que na coluna j ($j = 1, 2, 3$) tem as componentes da imagem por T do elemento de ordem j da base canónica. Pela definição de T, tem-se:

$$Tf_0(t) = 2 + 2t + t^2, \quad Tf_1(t) = 1 + 3t + t^2, \quad Tf_2(t) = 1 + 2t + 2t^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Consequentemente

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1.b) Uma vez que $\dim \mathcal{P}_2 = 3$ e que $\mathbb{P}$ é constituído por 3 elementos para mostrar que $\mathbb{P}$ é uma base de $\mathcal{P}_2$ basta mostrar que $\mathbb{P}$ é linearmente independente. Como $\mathcal{P}_2$ e $\mathbb{R}^3$ são isomorfos, $\mathbb{P}$ é linearmente independente em $\mathcal{P}_2$ se e só for linearmente independente em $\mathbb{R}^3$ o conjunto $\mathcal{U} = \{(1, 0, -1), (0, 2, 0), (1, 0, 1)\}$ das componentes dos elementos de $\mathbb{P}$ na base canónica:

$$p_1 = (1, 0, -1)_{\mathcal{B}}, \quad p_2 = (0, 2, 0)_{\mathcal{B}}, \quad p_3 = (1, 0, 1)_{\mathcal{B}}.$$

Para concluir que $\mathcal{U}$ é linearmente independente em $\mathbb{R}^3$ basta dispor as componentes dos vectores de $\mathcal{U}$ nas colunas (ou nas linhas) de uma matriz e verificar (por exemplo, usando a eliminação de Gauss) que a característica dessa matriz é igual a 3:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Para representar o polinómio $p(t) = 1 + t + t^2$ na base $\mathbb{P}$ basta notar que

$$1 + t + t^2 = \frac{1}{2}(2t) + 1 + t^2 = \frac{1}{2}p_2(t) + p_3(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Assim, $(0, 1/2, 1)$ é o vector das componentes de p na base $\mathbb{P}$, considerada como base ordenada com a ordem indicada na sua definição.

1.c) A matriz U escrita na alínea anterior é a matriz de mudança da base canónica para a base $\mathbb{P}$ de $\mathcal{P}_2$. Como se sabe, sendo C a matriz que representa T na base canónica (de $\mathcal{P}_2$), a matriz A que representa T na base $\mathbb{P}$ é dada por

$$A = U^{-1}CU.$$

Facilmente se conclui (usando qualquer um dos meétodos leccionados para inverter uma matriz) que

$$U^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

2.a) Para mostrar que 1 é valor próprio de T basta mostrar que 1 é raíz do polinómio característico p de T. Este é independente da representação matricial de T. Usando a matriz A (por ser mais simples) para representar T, vem

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Donde se conclui que 1 é valor próprio de T (ou de A), pois $p(1) = 0$. Vejamos qual é o correspondente espaço próprio. Tem-se

$$(A - I)u = 0 \quad \Rightarrow \quad u = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,-1), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Isto significa que os polinómios q_1 e $\tilde{q}_1$ cujos vectores das componentes na base $\mathbb{P}$ são $(1,0,0)$ e $(0,1,-1)$, respectivamente, ou seja

$$q_1(t) = p_1(t) = 1 - t^2, \quad \tilde{q}_1(t) = p_2(t) - p_3(t) = -1 + 2t - t^2, \quad t \in \mathbb{R},$$

geram o espaço próprio associado ao valor próprio 1,

$$E(1) = L(\{q_1, \tilde{q}_1\}).$$

2.b) Resulta de (**??**) que

$$p(\lambda) = (1-\lambda)[(3-\lambda)^2 - 2^2] = (1-\lambda)(1-\lambda)(5-\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda-5),$$

pelo que T (ou A) tem como valor próprio, além de $\lambda_1 = 1$ com multiplicidade algébrica 2, o número $\lambda_2 = 5$, com multiplicidade algébrica 1. Vejamos qual o espaço próprio $E(\lambda_2)$ associado a $\lambda_2 = 5$. Tem-se

$$(A - 5I)v = 0 \quad \Rightarrow \quad v = \gamma(0,1,1), \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Consequentemente, o polinómio q_2 cujo vector das componentes na base $\mathbb{P}$ é $(0,1,1)$, ou seja

$$q_2(t) = p_2(t) + p_3(t) = 1 + 2t + t^2,$$

gera o espaço próprio associado ao valor próprio 5,

$$E(5) = L(\{q_2\}).$$

2.c) Resulta das alíneas anteriores que a matriz A tem todos os valores próprios reais: $\lambda_1 = 1$, com multiplicidade algébrica e geométrica igual a 2, e $\lambda_2 = 5$, com multiplicidade agébrica e geométrica igual a 1. Uma vez que $\dim E(1) = 2$ e $\dim E(5) = 1$, e portanto, $\dim E(1) + \dim E(5) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, e que a valores próprios distintos correspondem vectores próprios linearmente independentes, existe uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores próprios de A. Nomeadamente, a base ordenada

$$\mathcal{B}_p = ((1,0,0), (0,1,-1), (0,1,1))$$

é uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores próprios de A, os primeiros dois vectores associados a $\lambda_1 = 1$ e o terceiro associado a $\lambda_2 = 5$, como vimos acima. Consequentemente, A é diagonalizável e sendo

$$\Lambda = \operatorname{diag}\{1,1,5\}$$

a matriz diagonal dos valores próprios (por ordem crescente), tem-se

$$\Lambda = S^{-1}AS,$$

em que S á matriz dos vectores próprios (mais precisamente, a matriz cuja coluna j contém as componentes dos vectores próprios associados ao valor próprio de ordem j na diagonal de Λ ($j = 1, 2, 3$)):

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. É fácil concluir da invertibilidade de T, bastando para tal recordar que T é representada (em relação à base $\mathbb{P}$) pela matriz invertível A, ou que $\lambda = 0$ não é valor próprio de T e, portanto, o núcleo de T é constituído apenas pelo vector zero.

Para determinar a sua inversa, T^{-1}, notemos que esta é a transformação linear que é representada em relação à base canónica de $\mathcal{P}_2$ pela matriz C^{-1}. Esta pode ser calculada usando a relação dada na alínea 1.c) : $A = U^{-1}CU$, uma vez que é fácil inverter A:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & -2/5 \\ 0 & -2/5 & 3/5 \end{bmatrix},$$

vindo

$$\begin{aligned} C^{-1} = UA^{-1}U^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & -2/5 \\ 0 & -2/5 & 3/5 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -2/5 & 3/5 \\ 0 & 6/5 & -4/5 \\ -1 & -2/5 & 3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 8/5 & -2/5 & -2/5 \\ -4/5 & 6/5 & -4/5 \\ -2/5 & -2/5 & 8/5 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$T^{-1}f_0(t) = \frac{1}{5}(4 - 2t - t^2), \quad T^{-1}f_1(t) = \frac{1}{5}(-1 + 3t - t^2), \quad T^{-1}f_2(t) = \frac{1}{5}(-1 - 2t + 4t^2), \quad t \in \mathbb{R},$$

e, sendo $p = a_0 f_0 + a_1 f_1 + a_2 f_2$, ter-se-á:

$$\begin{aligned} T^{-1}p(t) &= a_0 T^{-1} f_0(t) + a_1 T^{-1} f_1(t) + a_2 T^{-1} f_2(t) \\ &= \frac{1}{5}[a_0(4 - 2t - t^2) + a_1(-1 + 3t - t^2) + a_2(-1 - 2t + 4t^2)] \\ &= \frac{1}{5}[4a_0 - a_1 - a_2 + (-2a_0 + 3a_1 - 2a_2)t + (-a_0 - a_1 + 4a_2)t^2], \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exercício 62 *[2008/9 - 1° Exame - Problema 15 - LEIC]*

Sejam $\beta \in \mathbb{R}$ e $B_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Identifique o polinómio característico e os valores próprios de B_β; quais os valores de β para os quais B_β é invertível?

b) Determine os valores de β para os quais a função f dada por

$$f(x, y) = x^t B_\beta y, \quad x, y \in \mathbb{R}^3,$$

define um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

c) Tomando $\beta = 2$, determine os espaços próprios de B_2; B_2 é diagonalizável?

. . . .

Resolução:

a) O polinómio característico p_β de B_β é, por definição,

$$p_\beta(\lambda) = \det(B_\beta - \lambda I] = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & \beta \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ \beta & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}.$$

Os valores próprios de B_β são as raízes (zeros) do polinómio característico.

Usando, por exemplo, a regra de Laplace para calcular o determinante anterior, usando a expansão segundo a linha 2, obtém-se

$$p_\beta(\lambda) = (1-\lambda)[(\lambda-1)^2 - \beta^2]$$

ou, uma vez que se pretende factorizar este polinómio,

$$p_\beta(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda-1-\beta)(\lambda-1+\beta) = -(\lambda-1)(\lambda-(1-\beta))(\lambda-(1+\beta)).$$

Os três valores próprios de B_β são

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1-\beta, \quad \lambda_2 = 1+\beta.$$

Uma matriz é invertível se e só se o seu determinante é diferente de zero. Ora, resulta da alínea anterior que

$$\det B_\beta = p_\beta(0) = 1-\beta^2.$$

Consequentemente, B_β é invertível se e só se $\beta^2 \neq 1 \Leftrightarrow |\beta| \neq 1$.

b) Pretende-se saber quais as condições para que f defina um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

Analisemos as propriedades de um produto interno em $\mathbb{R}^3$ (no que se segue $x, \tilde{x}, y$ representam vectores arbitrários de $\mathbb{R}^3$ e α, γ escalares arbitrários):

(1) Linearidade na 1ª variável: Para y fixo,

$$f(\alpha x + \gamma\tilde{x}, y) = (\alpha x + \gamma\tilde{x})^t B_\beta y = \alpha x^t B_\beta y + \gamma\tilde{x}^t B_\beta y = \alpha f(x,y) + \gamma f(\tilde{x}, y).$$

Logo, f é linear na 1ª variável para qualquer valor de $\beta \in \mathbb{R}$.

(2) Simetria: Como, para qualquer $\beta \in \mathbb{R}$, B_β é simétrica ($B_\beta = B_\beta^t$), vem

$$f(y,x) = y^t B_\beta x = (y^t B_\beta x)^t = x^t B_\beta^t y = x^t B_\beta y = f(x,y).$$

Consequentemente, f é simétrica para qualquer valor de $\beta \in \mathbb{R}$.

(3) Positividade:

$$Q_{B_\beta}(x) = f(x,x) = x^t B_\beta x > 0 \quad \text{se } x \neq 0.$$

Então f é positiva se e só se a forma quadrática associada à matriz B_β, Q_{B_β}, é definida positiva.

Concluímos assim que f define um produto interno em $\mathbb{R}^3$ se e só se β é tal que a forma quadrática associada à matriz simétrica B_β é definida positiva, ou seja, que B_β é definida positiva.

Como se sabe uma matriz simétrica é definida positiva se e só se os seus valores próprios são todos (estritamente) positivos. Resulta da alínea a) que os valores próprios de B_β são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1+\beta$ e $\lambda_3 = 1-\beta$. Consequentemente, os valores próprios de B_β são todos positivos se e só se $1 \pm \beta > 0 \Leftrightarrow |\beta| < 1$.

Conclui-se finalmente que f define um produto interno em $\mathbb{R}^3$ se e só se $|\beta| < 1$.

c) Resulta da alínea a) que, para $\beta = 2$, os valores valores próprios de B_2 são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 3$. Temos pois três valores próprios distintos, cada um com multiplicidades (algébrica e geométrica) iguais a 1.

Vejamos agora quais os espaços próprios de B_2 – usando a identificação habitual dos vectores de $\mathbb{R}^3$ com os correspondentes vectores coluna, temos:

- $$E(\lambda_1) = N_{B_2-\lambda_1 I} = L(\{(0,1,0)\}), \quad \dim E(\lambda_1) = 1,$$

pois

$$(B_2 - \lambda_1 I)\tilde{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \tilde{u}_1 = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- $$E(\lambda_2) = N_{B_2-\lambda_2 I} = L(\{(1,0,-1)\}), \quad \dim E(\lambda_2) = 1,$$

pois

$$(B_2 - \lambda_2 I)\tilde{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tilde{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \tilde{u}_2 = \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

- $$E(\lambda_3) = N_{B_2-\lambda_3 I} = L(\{(1,0,1)\}), \quad \dim E(\lambda_3) = 1,$$

pois

$$(B_2 - \lambda_3 I)\tilde{u}_3 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \tilde{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \tilde{u}_3 = \theta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

A condição necessária e suficiente para que uma matriz simétrica real (como é o caso de B_2) seja diagonalizável é que exista uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores próprios dessa matriz. Como B_2 tem três valores próprios distintos e a valores próprios distintos correspondem vectores linearmente independentes, a matriz B_2 é diagonalizável. Pode-se acrescentar que B_2 é semelhante à matriz diagonal,

$$\Lambda = \mathrm{diag}\,\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} = \mathrm{diag}\,\{1, -1, 3\},$$

sendo a matriz diagonalizante ($\Lambda = S^{-1}B_2S$) a matriz dos vectores próprios (mantendo a ordem atribuída aos correspondentes valores próprios)

$$S = [\tilde{u}_1\, \tilde{u}_2\, \tilde{u}_3] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 63 *[2008/9 - 2º Exame - V1 - Problema 13 - LEIC]*

Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x,y,z) = (2x + 2y + 2z, -x + 3y, x - 3y), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

a) Obtenha a matriz A que representa T em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$;

b) Mostre que o conjunto $\mathcal{B} = ((1,1,-1),(0,1,-1),(3,1,-4))$ é uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores próprios de T.

c) Mostre que T é diagonalizável e identifique uma matriz diagonal Λ, e uma matriz invertível S tal que $\Lambda = S^{-1}AS$.

d) Sendo $\alpha \in \mathbb{R}$ e $b_\alpha = (4,3,\alpha)$, determine o vector das componentes de b_α na base $\mathcal{B}$.

e) Sempre que possível resolva a equação $Tu = b_\alpha$.

....

<u>**Resolução**</u>:

a) A matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que representa T em relação à base canónica $B_c = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ é aquela que na coluna j ($j = 1, 2, 3$) tem as componentes (na base canónica) da imagem do vector e_j pela transformação T . Como

$$Te_1 = T(1,0,0) = (2,-1,1), \quad Te_2 = T(0,1,0) = (2,3,-3), \quad Te_3 = T(0,0,1) = (2,0,0),$$

conclui-se que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Em vez de começar por mostrar que $\mathcal{B}$ é uma base e posteriormente mostrar que os seus elementos são vectores próprios de T, vamos mostrar primeiro que os elementos de $\mathcal{B}$ são vectores próprios de T e usar o seguinte resultado conhecido: a valores próprios distintos de uma transformação linear correspondem vectores próprios linearmente independentes. Sendo assim, se os vectores de $\mathcal{B}$ forem vectores próprios de T associados a valores próprios todos distintos, $\mathcal{B}$ é linearmente independente e, tendo três elementos, é uma base de $\mathbb{R}^3$. Calculemos pois a imagem por T de cada um dos elementos de $\mathcal{B}$. Tem-se

$$\begin{aligned} T(1,1,-1) &= (2,2,-2) = 2(1,1,-1), \\ T(0,1,-1) &= (0,3,-3) = 3(0,1,-1), \\ T(3,1,-4) &= (0,0,0) = 0(3,1,-4), \end{aligned}$$

e, portanto, os elementos de $\mathcal{B}$ são vectores próprios de T associados aos valores próprios $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 0$, respectivamente. De acordo com o exposto acima, conclui-se que $\mathcal{B}$ é uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$ constituída por vectores próprios de T.

c) A condição necessária e suficiente de diagonalização de T é que exista uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída por vectores próprios de T. Vimos na alínea anterior que $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ formada (exclusivamente) por vectores próprios de T. Escrevendo $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_2)$, vimos que

$$Tv_1 = \lambda_1 v_1, \quad Tv_2 = \lambda_2 v_2, \quad Tv_3 = \lambda_3 v_3,$$

pelo que a representação matricial de T em relação à base $\mathcal{B}$ é a matriz diagonal

$$\Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} = \operatorname{diag}\{2,3,0\}.$$

Sendo Λ e A duas representações matriciais da mesma transformação linear T elas estão relacionadas por

$$\Lambda = S^{-1}AS,$$

em que S é a matriz de mudança da base canónica para a base $\mathcal{B}$, neste caso a matriz dos vectores próprios, mais precisamente a que tem na coluna j as componentes (na base canónica) do vector v_j:

$$S = [v_1\ v_2\ v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

d) Pretende-se obter a representação do vector b_α na base $\mathcal{B}$, digamos

$$b_\alpha = (y_1, y_2, y_3)_{\mathcal{B}} = y_1 v_1 + y_2 v_2 + y_3 v_3.$$

Pondo $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ e $x = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ \alpha \end{bmatrix}$, tem-se

$$Sy = x \quad \Leftrightarrow \quad y = S^{-1}x.$$

Consequentemente temos duas vias para a determinação de y:

1. usamos o método de eliminação de Gauss para resolver a equação $Sy = x$, como se ilustra a seguir:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -4 & \alpha \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & \alpha+3 \end{array}\right] \Rightarrow y = \begin{bmatrix} 7+\alpha \\ -3-2\alpha/3 \\ -1-\alpha/3 \end{bmatrix};$$

2. calculamos a inversa de S e determinamos $y = S^{-1}x$:

$$S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow y = \begin{bmatrix} 7+\alpha \\ -3-2\alpha/3 \\ -1-\alpha/3 \end{bmatrix}.$$

e) Uma vez que dispomos de duas representações matriciais de T, temos duas alternativas para a resolução:

1. Usando a representação em relação à base $\mathcal{B}$: pretende-se saber se existe um vector u cuja representação na base $\mathcal{B}$, $u = (z_1, z_2, z_3)_\mathcal{B}$, é tal que $z = (z_1\ z_2\ z_3)$ satisfaz (na forma de vector coluna) a

$$\Lambda z = y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7+\alpha \\ -3-2\alpha/3 \\ -1-\alpha/3 \end{bmatrix}.$$

Imediatamente se conclui que um tal vector só existe se $-1-\alpha/3 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -3$. Nesse caso ($\alpha = -3$), a solução é $z = (2, -1/3, z_3)$ em que $z_3 \in \mathbb{R}$ (z_3 é a incógnita livre). Consequentemente, a solução geral de $Tu = b_{-3}$ é

$$\begin{aligned} u = (2, -1/3, z_3)_\mathcal{B} &= 2v_1 - 1/3v_2 + z_3v_3 = 2(1,1,-1) - 1/3(0,1,-1) + z_3(3,1,-4) \\ &= (2+3z_3, 5/3+z_3, -5/3-4z_3), \quad z_3 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. Usando a representação em relação à base canónica: pretende-se saber se existe um vector u cuja representação na base canónica, $u = (u_1, u_2, u_3)$, é tal que $Au = b_\alpha$. Usando o método de eliminação de Gauss obtém-se:

$$Au = b_\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ \alpha+3 \end{bmatrix}.$$

Daqui se conclui que a condição de existência de solução é que $\alpha + 3 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -3$. Nesse caso ($\alpha = -3$), a solução é

$$u = (3/4(1-u_3), 1/4(5-u_3), u_3), \quad u_3 \in \mathbb{R}$$

(u_3 é a incógnita livre).

[Note-se que esta solução geral de $Tu = b_{-3}$ coincide com a determinada anteriormente: trata-se de duas parametrizações distintas do mesmo conjunto (basta tomar $u_3 = -5/3 - 4z_3$ para ver que assim é)].

Exercício 64 *[2009/10 - 2º Exame - Problema 13 - MEC]*

Seja $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ a matriz definida por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Determine os valores próprios de A e uma base para cada um dos espaços próprios (subespaços de $\mathbb{R}^3$) associados;

2. Mostre que A é diagonalizável. Indique uma base de $\mathbb{R}^3$ e uma matriz de mudança de base S tal que $D = S^{-1}AS$ é diagonal.

3. Escreva uma expressão analítica da transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ que é representada pela matriz A em relação à base canónica de $\mathcal{P}_2$; Mais precisamente, sendo $p(t) = a + bt + ct^2, t \in \mathbb{R}$, escreva
$$Tp(t) = X + Yt + Zt^2, \quad t \in \mathbb{R}$$
(onde X, Y e Z dependem dos coeficientes $a, b, c \in \mathbb{R}$ de p).

4. Indique uma base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}_2$ em relação à qual T é representada por D (determinada em 2).

5. Resolva a equação
$$Tp = p_1 + p_2 + p_3,$$
em que $\mathcal{B} = (p_1, p_2, p_3)$.

....

Resolução:

1. Os valores próprios de A são as raízes (os zeros) do polinómio característico p definido por

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}.$$

Tem-se
$$p(\lambda) = (1-\lambda)[(\lambda-1)^2 - 2^2] = -(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda+1),$$
pelo que os valores próprios de A são (por ordem crescente):

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 3.$$

Os espaços próprios associados a estes valores próprios são, respectivamente,

$$E(\lambda_1) = N_{A-\lambda_1 I}, \quad E(\lambda_2) = N_{A-\lambda_2 I}, \quad E(\lambda_3) = N_{A-\lambda_3 I},$$

Usemos o método de eliminação de Gauss para cada uma das matrizes $A - \lambda_j I$ (j=1,2,3):

$$A + I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -4/3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A - 3I = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cada um dos espaços próprios tem dimensão 1 e facilmente se obtém uma base para cada um deles (usaremos $\mathcal{B}_{\lambda_j}$ para representar uma base de $N_{A-\lambda_j I}$):

$$\mathcal{B}_{\lambda_1} = \{(0, -1, 1)\}, \quad \mathcal{B}_{\lambda_2} = \{(-2, 3, 2)\}, \quad \mathcal{B}_{\lambda_3} = \{(0, 1, 1)\}.$$

2. A é diagonalizável se e só se existe uma base de $\mathbb{R}^3$ formada (exclusivamente) por vectores próprios (os elementos dos subespaços próprios) de A. Como a valores próprios distintos estão associados vectores próprios linearmente independentes e A tem 3 valores próprios distintos, conclui-se que existe uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores próprios, nomeadamente a base ordenada seguinte que usaremos adiante:

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = ((0,-1,1),(-2,3,2),(0,1,1)) .$$

A matriz diagonal D semelhante à matriz A é a matriz dos valores próprios (que continuamos a ordenar de forma crescente)

$$D = \operatorname{diag}\{-1,1,3\}$$

e a matriz diagonalizante S, tal que $D = S^{-1}AS$, é a matriz dos vectores próprios (mantendo a ordem estabelecida):

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Sendo A a matriz que representa T em relação à base canónica $\mathcal{B}_c = (\hat{1}, \hat{t}, \hat{t}^2)$ de $\mathcal{P}_2$, $x = (a,b,c)$ o vector das componentes de p na base canónica e $y = (d,e,f)$ o vector das componentes de $q = Tp$ (também na base canónica), escrevendo estes vectores na forma de vectores coluna, tem-se

$$\begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 2a+b+2c \\ 3a+2b+c \end{bmatrix}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} (Tp)(t) &= a(1+2t+3t^2) + b(t+2t^2) + c(2t+t^2) \\ &= a + (2a+b+2c)t + (3a+2b+c)t^2 \qquad\qquad t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

sendo válida a expressão dada com

$$X = a, \quad Y = 2a+b+2c, \quad Z = 3a+2b+c.$$

Este resultado também podia ser obtido directamente, do seguinte modo:
Sendo A a matriz que representa T em relação à base canónica $\mathcal{B}_c = (\hat{1}, \hat{t}, \hat{t}^2)$ de $\mathcal{P}_2$, em que

$$\hat{1}(t) = 1, \quad \hat{t}(t) = t, \quad \hat{t}^2(t) = t^2, \quad t \in \mathbb{R},$$

tal significa que, para qualquer $t \in \mathbb{R}$,

$$T\hat{1} = (1,2,3)_{\mathcal{B}_c} = \hat{1} + 2\hat{t} + 3\hat{t}^2, \quad T\hat{t} = (0,1,2)_{\mathcal{B}_c} = \hat{t} + 2\hat{t}^2, \quad T\hat{t}^2 = (0,2,1)_{\mathcal{B}_c} 2\hat{t} + \hat{t}^2.$$

ou, equivalentemente,

$$(T\hat{1})(t) = 1 + 2t + 3t^2, \quad (T\hat{t})(t) = t + 2t^2, \quad T\hat{t}^2(t) = 2t + t^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Como T é linear, sendo $p = a\hat{1} + b\hat{t} + c\hat{t}^2$ (ou $p(t) = a + bt + ct^2, t \in \mathbb{R}$), tem-se

$$\begin{aligned} Tp &= a(\hat{1} + 2\hat{t} + 3\hat{t}^2) + b(\hat{t} + 2\hat{t}^2) + c(2\hat{t} + \hat{t}^2) \\ &= a + (2a+b+2c)\hat{t} + (3a+2b+c)\hat{t}^2 \end{aligned}$$

ou, o que é equivalente,

$$\begin{aligned} (Tp)(t) &= a(1+2t+3t^2) + b(t+2t^2) + c(2t+t^2) \\ &= a + (2a+b+2c)t + (3a+2b+c)t^2 \qquad\qquad t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

pelo que é válida a fórmula no enunciado, com

$$X = a, \quad Y = 2a+b+2c, \quad Z = 3a+2b+c.$$

4. Sendo A a matriz que representa T em relação à base canónica de $\mathcal{P}_2$, a matriz $\widetilde{A}$ que representa T em relação a uma nova base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}_2$ é tal que

$$\widetilde{A} = U^{-1}AU,$$

em que U é a matriz de mudança da base $\mathcal{B}_c$ para a base $\mathcal{B}$. Como prendemos tomar $\widetilde{A} = D$ e sabemos das alíneas anteriores que $D = S^{-1}AS$, então basta tomar $U = S$. Consequentemente,

$$U = S = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

sendo a base $\mathcal{B}$ aquela formada pelos vectores cujas componentes figuram nas colunas da matriz S, nomeadamente

$$\mathcal{B} = (p_1, p_2, p_3), \quad \text{com } p_1(t) = -t + t^2,\ p_2(t) = -2 + 3t + 2t^2,\ p_3(t) = t + t^2,\ t \in \mathbb{R}.$$

5. Os valores próprios de T são também os valores próprios de qualquer matriz que a represente (em relação a uma base de $\mathcal{P}_2$). Portanto, T tem 3 valores próprios distintos que são

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 3.$$

Como sabemos que T é representada pela matriz diagonal D em relação à base $\mathcal{B}$, então

$$Tp_1 = -p_1, \quad Tp_2 = p_2, \quad Tp_3 = 3p_3.$$

Como T é linear e $\lambda = 0$ não é valor próprio de T, então T é injectiva (e também sobrejectiva) e, portanto, para qualquer $q \in \mathcal{P}_2$, em particular para $q = p_1 + p_2 + p_3$, a equação linear

$$Tp = q$$

tem uma única solução. Ora, resulta do que escrevemos acima que

$$T(-p_1 + p_2 + \frac{1}{3}p_3) = p_1 + p_2 + p_3,$$

pelo que

$$p = -p_1 + p_2 + \frac{1}{3}p_3$$

é a única solução da equção considerada: $Tp = p_1 + p_2 + p_3$. Podemos escrever o polinómio p na base canónica: para qualquer $t \in \mathbb{R}$, tem-se

$$p(t) = -(-t + t^2) + (-2 + 3t + 2t^2) + \frac{1}{3}(t + t^2) = -2 + \frac{13}{3}t + \frac{4}{3}t^2.$$

Exercício 65 *[2010/11 - 3º Teste - V1 - Problema 7 - MEEC]*

1. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ -4 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

a) Mostre que $\lambda = 5$ é valor próprio de A e determine o espaço próprio associado;

b) Identifique os restantes valores próprios e os espaços próprios associados;

c) A é diagonalizável?

d) Classifique a forma quadrática associada à matriz A.

2. Seja $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ($n \in \mathbb{N}$) uma matriz invertível. Mostre que se Λ é o conjunto dos valores próprios de B, então $\Lambda_{-1} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda^{-1} \in \Lambda\}$ é o conjunto dos valores próprios da inversa de B.

....

Resolução:

1.a) Por definição λ é valor próprio de A se existirem soluções $v = (x, y, z) \neq 0$ da equação $(A - \lambda I)v = 0$. Para mostrar que $\lambda = 5$ é valor próprio de A basta mostrar que a matriz U que se obtém por eliminação de Gauss de $A - 5I$ tem colunas sem pivô. Ora, neste caso,

$$A - 5I = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & -16/3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

pelo que a terceira coluna de U não tem pivô.

Como os sistemas $(A - \lambda I)v = 0$ e $Uv = 0$ são equivalentes, os vectores próprios de A associados a $\lambda = 5$ são as soluções não nulas de $Uv = 0$. Do cálculo anterior resulta que para $z \in \mathbb{R}$ (z é a incógnita livre):

$$\begin{cases} -3x + 4z = 0 \\ -3y + 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4/3z \\ y = 4/3z \end{cases},$$

pelo que o espaço próprio associado a $\lambda = 5$ é

$$E(5) = N_{A-5I} = \{z(4/3, 4/3, 1) : z \in \mathbb{R}\} = L(\{4, 4, 3)\}).$$

1.b) Os valores próprios de$A$ são as raízes do polinómio característico, $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Ora,

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 \\ 0 & 2-\lambda & 4 \\ -4 & 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} + 16(2-\lambda) \\ &= (2-\lambda)[(2-\lambda)(5-\lambda) - 16 + 16] = (2-\lambda)^2(5-\lambda) = -(\lambda-2)^2(\lambda-5), \end{aligned}$$

em que se usou a regra de Laplace por expansão segundo a primeira linha, para o cálculo do determinante de ordem 3. Consequentemente, A tem dois valores próprios distintos: $\lambda = 2$, com multiplicidade algébrica 2, e $\lambda = 5$, este já conhecido da alínea anterior.

Falta determinar o espaço próprio associado a $\lambda = 2$. Usando o mesmo procedimento da alínea anterior, a eliminação de Gauss da matriz $A - 2I$ conduz a:

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ -4 & 4 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

pelo que as soluções $v = (x, y, z)$ de $(A - 2I)v = 0$ são da forma: $v = y(1, 1, 0), \quad y \in \mathbb{R}$. Assim,

$$E(2) = L(\{(1, 1, 0)\}).$$

1.c) A é diagonalizável como matriz real (ou complexa) se e só se existe uma base de $\mathbb{R}^3$ (resp. $\mathbb{C}^3$) formada por vectores próprios de A. De acordo com as alíneas anteriores, A tem dois valores próprios (2 e 5) e cada um dos espaços próprios $E(2)$ e $E(5)$ tem dimensão 1. Assim, existem apenas dois vectores próprios de A linearmente independentes ($v_1 = (4, 4, 3)$ e $v_2 = (1, 1, 0)$) o que não é suficiente para obter uma base de $\mathbb{R}^3$ (ou $\mathbb{C}^3$). Consequentemente, A não é diagonalizável, nem como matriz real nem como matriz complexa.

1.d) A forma quadrática associada à matriz A coincide com a forma quadrática associada à sua parte simétrica A_s com

$$A_s = \frac{1}{2}(A + A^t) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix},$$

e, portanto, a sua classificação coincide com a da matriz simétrica A_s, que pode ser feita com base nos valores próprios de A_s, pois esta é diagonalizável. Calculemos então os valores próprios de A_s. Procedendo de forma semelhante à da alínea b), temos

$$\det(A_s - \lambda I) = (2-\lambda)[(2-\lambda)(5-\lambda)-16] = (2-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda - 6) = -(\lambda-2)(\lambda-\lambda_+)(\lambda-\lambda_-),$$

em que

$$\lambda_\pm = \frac{7 \pm \sqrt{7^2+24}}{2},$$

pelo que $\lambda_+ \in \mathbb{R}^+$ e $\lambda_- \in \mathbb{R}^-$. Assim, A_s tem dois valores próprios positivos e um negativo e, portanto, a forma quadrática que lhe está associada é indefinida, já que uma forma quadrática é indefinida se os valores próprios da sua parte simétrica têm sinais uns positivos e outros negativos.

2) Comecemos por notar que $\lambda = 0$ não é valor próprio de B, pois, sendo B invertível, $N_B = \{0\}$ e, portanto, a equação $Bv = 0$ tem como única solução $v = 0$. Tem-se ainda $\det B \neq 0$ e $\det B^{-1} = 1/\det B \neq 0$.

Sejam p o polinómio caracteríistico de B, $p(\lambda) = \det(B - \lambda I), \lambda \in \mathbb{C}$, e $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{C} : p(\lambda) = 0\}$. Calculemos agora o polinómio característico de B^{-1} (a inversa de B), que designaremos por p_{-1}, para $\lambda \neq 0$:

$$p_{-1}(\lambda) = \det(B^{-1} - \lambda I) = \det\left(-\lambda B^{-1}(B - \lambda^{-1} I)\right) = \frac{(-\lambda)^n}{\det B}\det(B - \lambda^{-1} I) = \frac{(-\lambda)^n}{\det B} p(\lambda^{-1}),$$

ou seja,

$$p_{-1}(\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p(\lambda^{-1}) = 0.$$

Os valores próprios de B^{-1} são as raízes do polinómio caracteríistico p_{-1}, $\Lambda_{-1} = \{\lambda \in \mathbb{C} : p_{-1}(\lambda) = 0\}$, e da igualdade anterior decorre que

$$\lambda \in \Lambda_{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^{-1} \in \Lambda$$

e, portanto,

$$\Lambda_{-1} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda^{-1} \in \Lambda\}.$$

Exercício 66 *[2010/11 - Exame - V1 - Problema 14 - MEEC]*

1. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 2 & \alpha \\ \alpha & 8 \end{bmatrix}.$$

a) Determine, em função de α, o polinómio característico de A_α e use-o para identificar os valores próprios de A_α.
b) Para $\alpha = 4$ diagonalize a matriz A_4, indicando uma matriz diagonal Λ e uma matriz invertível S tal que $\Lambda = S^{-1}A_4S$.
c) Classifique, em função de α, a forma quadrática associada à matriz A_α.

2. Sejam U e V espaços lineares (ou vectoriais) sobre $\mathbb{C}$ e $T : U \to V$ uma transformação linear injectiva. Mostre que se u_1,..., u_k são vectores de U linearmente independentes, então também os vectores $T(u_1)$,..., $T(u_k)$ são linearmente independentes.

....

Resolução:

1.a) Por definição o polinómio característico p_α de A_α é dado por $p_\alpha(\lambda) = \det(A_\alpha - \lambda I)$. Neste caso concreto temos:

$$p_\alpha(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & \alpha \\ \alpha & 8-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(8-\lambda) - \alpha^2 = \lambda^2 - 10\lambda + 16 - \alpha^2$$

Usando a fórmula resolvente da equação de segundo grau, o polinómio p_α pode ser factorizado na forma

$$p_\alpha(\lambda) = (\lambda - \lambda_+)(\lambda - \lambda_-)$$

com

$$\lambda_\pm = 5 \pm \sqrt{9 + \alpha^2}.$$

Estes são pois os valores próprios de A_α.

1.b) Para $\alpha = 4$ a matriz A_4 tem dois valores próprios distintos, que se obtêm da expressão anterior:

$$\lambda_+ = 10, \quad \lambda_- = 0.$$

Como a valores próprios de A_4 distintos correspondem vectores próprios linearmente independentes, existe uma base de $\mathbb{R}^2$ formada por vectores próprios de A_4.

Para determinar um vector próprio associado a $\lambda_+ = 10$, basta resolver o sistema

$$(A_4 - 10I)v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

cuja solução é

$$v = y(1,2), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Tomaremos $v_1 = (1,2)$.

Para determinar um vector próprio associado a $\lambda_- = 0$, basta resolver o sistema

$$A_4 v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

cuja solução é

$$v = z(-2,1), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Tomaremos $v_2 = (-2,1)$.

A matriz diagonal $\Lambda = \mathrm{diag}\,\{\lambda_+, \lambda_-\} = \mathrm{diag}\,\{10, 0\}$ é a matriz dos valores próprios de A_4 e a matriz diagonalizante S, tal que $\Lambda = S^{-1}A_4S$, é a matriz cujas colunas são os vectores próprios de A_4, associados aos valores próprios de A_4 (pela mesma ordem em que figuram na diagonal), i.e.

$$S = [v_1, v_2] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

1.c) Sendo A_α uma matriz simétrica a forma quadrática que lhe está associada pode ser classiificada em função dos seus valores próprios:

- Para $9 + \alpha^2 < 25 = 5^2 \Leftrightarrow |\alpha| < 4$, A_α tem dois valores próprios positivos, sendo a forma quadrática que lhe está associada *definida positiva*;

- Para $|\alpha| = 4$, A_α tem um valor próprio positivo e outro nulo, sendo a forma quadrática que lhe está associada *semi-definida positiva*;

- Para $9 + \alpha^2 > 25 = 5^2 \Leftrightarrow |\alpha| > 4$, A_α tem um valor próprio positivo e outro negativo, sendo a forma quadrática que lhe está associada *indefinida*.

2. Nas condições enunciadas seja $T : U \to V$ um transformação linear injectiva e $\{u_1, \ldots, u_k\}$ um conjunto linearmente independente em U. Pretende-se mostrar que o conjunto $\{Tu_1, \ldots, Tu_k\}$ é linearmente independente em V, o que faremos recorrendo à definição. Para tal consideremos uma combinação linear dos elementos deste conjunto que representa o vector zero (de V):

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j T u_j = 0,$$

em que $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, k$. Sendo T linear a equação anterior é equivalente a

$$T\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j u_j\right) = 0.$$

Mas, sendo T injectiva (e, portanto, $Tu = 0 \Leftrightarrow u = 0$), a equação anterior é equivalente a

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j u_j = 0$$

(em que nesta igualdade o zero que figura no segundo membro é o zero de U, o elemento neutro da adição em U). Ora, como por hipótese o conjunto $\{u_1, \ldots, u_k\}$ é linearmente independente em U, tal implica que os coeficientes escalares naquela representação são todos nulos, i.e.

$$\alpha_j = 0, \quad j = 1, \ldots, k,$$

o que mostra que o conjunto $\{Tu_1, \ldots, Tu_k\}$ é linearmente independente em V, como se pretendia.

Exercício 67 *[2012/13 - 3º Teste - V1 - Problema 7 - LEGM, MEC]*

Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$T(x, y, z) = (2x + \sqrt{2}y, \sqrt{2}x + 2y + \sqrt{2}z, \sqrt{2}y + 2z) \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Identifique a matriz A que a representa em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$;

(b) Calcule os valores próprios de T e os correspondentes espaços próprios;

(c) Diagonalize a transformação T identificando uma base de $\mathbb{R}^3$ relativamente à qual ela é representada por uma matriz diagonal;

(d) Existe algum vector $x \in \mathbb{R}^3$ não nulo tal que $<Tx, x>= 0$? (O produto interno em $\mathbb{R}^3$ aqui considerado é o usual.)

....

Resolução:

a) A base canónica de $\mathbb{R}^3$ é $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$, com $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$. A matriz A que representa T em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ é aquela cuja coluna $j = 1, 2, 3$ contém as componentes da imagem do vector ordem j da base de $\mathbb{R}^3$, e_j, por meio da transformação T quando expressa na base canónica de $\mathbb{R}^3$. Como

$$Te_1 = (2, \sqrt{2}, 0) = 2e_1 + \sqrt{2}e_2; \; Te_2 = (\sqrt{2}, 2, \sqrt{2}) = \sqrt{2}e_1 + 2e_2 + \sqrt{2}e_3; \; Te_3 = (0, \sqrt{2}, 2) = \sqrt{2}e_2 + 2e_3,$$

tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}.$$

b) Os valores próprios de T são os valores próprios da matriz A, que são dados pelas raízes do polinómio característico:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 2-\lambda & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 2-\lambda \end{vmatrix}.$$

Usando a regra de Laplace por expansão segundo a primeira linha (por exemplo), obtém-se:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2-\lambda \end{vmatrix} - \sqrt{2})\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)[(2-\lambda)^2-2] - 2(2-\lambda) = -(\lambda-2)[(\lambda-2)^2-4] = -\lambda(\lambda-2)(\lambda-4), \end{aligned}$$

pelo que há três valores próprios distintos de T: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 4$. Usando a convenção habitual de identificar os vectores de $\mathbb{R}^3$ como vectores coluna, os correspondentes espaços próprios de T, $E(\lambda_j)$ são identificados com os núcleos da matrizes $A - \lambda_j I$. Ora,

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}; \quad A - 4I = \begin{bmatrix} -2 & \sqrt{2} & -2 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ -2 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

donde facilmente se conclui (por exemplo, por eliminação de Gauss, para cada uma da matrizes A, $A - 2I$ e $A - 4I$) que:

$$E(\lambda_1) = N_A = L(\{(1, -\sqrt{2}, 1)\}); E(\lambda_2) = N_{A-2I} = L(\{(-1, 0, 1)\}); E(\lambda_3) = N_{A-4I} = L(\{(1, \sqrt{2}, 1)\}).$$

c) Uma vez que a valores próprios distintos de uma transformação linear correspondem vectores próprios linearmente independentes, os geradores dos espaços próprios de T constituem uma base de $\mathbb{R}^3$, digamos $\mathcal{B} = ((1, -\sqrt{2}, 1), (-1, 0, 1), (1, \sqrt{2}, 1))$. A matriz que representa T nesta base é a matriz diagonal dos valores próprios (mantendo a ordem escolhida na base ordenada):

$$\Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} = \operatorname{diag}\{0, 2, 4\}$$

e relaciona-se com a matriz A por $\Lambda = S^{-1}AS$, em que S é a matriz de mudança da base canónica para a base $\mathcal{B}$, sendo aquela cuja coluna j, $j = 1, 2, 3$, contém as componentes do vector de ordem j da base $\mathcal{B}$ representado na base canónica:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

d) A resposta a esta questão é afirmativa. Efectivamente, tendo-se concluído anteriormente que $\lambda = 0$ é valor próprio de T, isso significa que existem vectores não nulos $x \in \mathbb{R}^3$ tais que $Tx = 0$ e, portanto, que $N(T) \neq 0$. Consequentemente, para todos os os vectores $x \in N(T)$, tem-se $<Tx, x>=< 0, x>= 0$.

Uma outra forma, mais demorada, de resolver esta questão podia ser pela via das formas quadráticas. Com efeito, continuando a usar a identificação dos elementos de $\mathbb{R}^3$ como vectores coluna, para qualquer $x \in \mathbb{R}^3$, tem-se:

$$<Tx, x>=<Ax, x>= x^t Ax = Q_A(x),$$

em que Q_A representa a forma quadrática em $\mathbb{R}^3$ associada à matriz A. Sendo A simétrica, a forma quadrática Q_A pode ser imediatamente diagonalizada, tendo-se:

$$Q_A(x) = Q_\Lambda(y),$$

em que $\Lambda = \operatorname{diag}\{0, 2, 4\}$ é a matriz dos valores próprios de A, $y = U^t x$, sendo U a matriz unitária (ortogonal, neste caso) diagonalizante da matriz A. Escrevendo $y = (y_1, y_2, y_3)$, tem-se

$$Q_A(x) = Q_\Lambda(y) = 2y_2^2 + 4y_3^2.$$

Daqui resulta que $Q_A(x) = 0$ para todos os vectores $x = Uy$ tais que $y = \alpha(1, 0, 0)$ com $\alpha \in \mathbb{R}$, pelo que a resposta à questão formulada inicialmente é afirmativa. Para explicitar esses vectores em termos das coordenadas originais, só falta exibir uma matriz unitária U com as propriedades requeridas. Para tal basta considerar a matriz dos vectores próprios, ligeiramente alterada em relação à matriz S acima indicada, substituindo o segundo vector próprio por $(-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$ e um factor de escala, obtendo-se:

$$U = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Facilmente se verifica que U é unitária e, com $y = (1, 0, 0)$, se tem $x = Uy = \frac{1}{2}(1, -\sqrt{2}, 1)$. Como já tinhamos visto, este vector x é um gerador do núcleo de T, pelo que, efectivamente, $<Tx, x>= 0$.

Exercício 68 *[2012/13 - Exame - V1 - Problema 14 - LEGM, MEC]*

1. Considere a transformação linear T definida no Problema 7:
   a) Identifique os valores próprios de T e os respectivos espaços próprios;
   b) Mostre que T é diagonalizável, identificando uma base de $\mathbb{R}^3$ relativamente à qual T é representada por uma matriz diagonal, que deve explicitar;
2. Mostre que os valores próprios de uma transformação linear definida e com valores em $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ não dependem da base escolhida para a representar. Mais precisamente, se A e B são duas representações matriciais dessa transformação linear em relação a duas bases distintas, então
$$\det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I).$$

. . . .

Resolução:

1.a) Resulta da definição da transformação T que $\lambda = 1$ é valor próprio de T e que v_2 e v_3 são vectores próprios associados a esse valor próprio, pois $Tv_2 = v_2$ e Tv_3. Por outro lado, com v_2 e v_3 são linearmente independentes, segue-se que o espaço próprio $E(1) = N(T - I)$ tem dimensão 2 (note-se que a dimensão não pode ser 3, pois nesse caso a transformação T seria identidade, o que não é o caso), sendo gerado por v_2 e v_3. Falta apenas determinar o outro valor próprio de T e o correspondente espaço próprio. Esse valor próprio é $\lambda = 0$, resultado que pode ser obtido por várias vias, uma das quais é considerar a sua representação matricial $\widetilde{A}$ em relação à base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$,

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e, tratando-se esta de uma matriz triangular inferior com uma linha nula, o seu núcleo não é trivial (este facilmente se verifica se gerado pelo vector $(1, -1, -1)$). Assim, $\lambda = 0$ é valor próprio da matriz $\widetilde{A}$ e, portanto, também da transformação T. O espaço próprio correspondente é gerado pelo vector $\tilde{v}_1 = ((1, -1, -1)_{\mathcal{B}} = v_1 - v_2 - v_3 = (-1, -2, -2)$. É claro que o facto de $\lambda = 0$ ser valor próprio de T também podia ser obtido por via do polinómio característico:

$$p(\lambda) = \det(\widetilde{A} - \lambda I) = \lambda(\lambda - 1)^2,$$

sendo a determinação do espaço próprio correspondente semelhante à indicada anteriormente.

1.b) Uma transformação linear definida e com valores em $\mathbb{R}^3$ é diagonalizável se e só existir uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores próprios de T. Como sabemos, pode dar-se o caso de ser conveniente mudar o contexto caso os valores próprios de T não sejam reais, o que não é o caso. Efectivamente, concluímos antes que T tem dois valores próprios, $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$, e que $N(T) = L(\{\tilde{v}_1\})$, $N(T - I) = L(\{v_2, v_3\})$. Como a valor próprios distintos de T correspondem vectores próprios linearmente independentes, segue-se que $\widetilde{\mathcal{B}} = (\tilde{v}_1, v_2, v_3)$ é uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores próprios de T. A representação matricial de T em relação a esta base é a matriz diagonal dos valores próprios (mantendo a ordenação dada aos vectores próprios):

$$\Lambda = \operatorname{diag}\{0, 1, 1\}.$$

2. Sendo T uma transformação linear definida e com valores em $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$), suponha-se que $\mathcal{B}_A$ é uma base de $\mathbb{R}^n$ e que A é a representacção matricial de T nesta base. De acordo com a teoria que explanámos nas aulas, um escalar λ é valor próprio de T se e só se é raíz do polinómio característico:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Se mudarmos a base de $\mathbb{R}^n$ para $\mathcal{B}_B$ e considerarmos a representação matricial B de T nesta nova base, obtemos um novo polinómio característico:

$$q(\lambda) = \det(B - \lambda I).$$

O que se pretende provar é que $q = p$ e que, portanto, os valores próprios de T, são uma característica dessa transformação, não dependendo da base considerada para representar essa transformação linear. Este resultado pode obter-se com base no seguinte: Vimos que o efeito de mudar a base do espaço onde a transformação está definida e tem valores (de $\mathcal{B}_A$ para $\mathcal{B}_B$) nas matrizes que representam essa transformação linear podia ser expressa na forma

$$B = S^{-1}AS,$$

em que S é a matriz de mudança da base $\mathcal{B}_A$ para a base $\mathcal{B}_B$, aquela cuja coluna $j = 1, 2, \ldots n$ contém as componentes do vector de ordem j da base $\mathcal{B}_B$ quando representado na base $\mathcal{B}_A$. Daqui resulta que, para qualquer escalar λ, se tem

$$B - \lambda I = S^{-1}AS - \lambda I = S^{-1}(A - \lambda I)S$$

e que, sendo S invertível ($\Leftrightarrow \det S \neq 0$), se tem $\det S^{-1} = (\det S)^{-1}$, resultando então das propriedades da função determinante (nomeadamente que o derminante de um produto é o produto dos determinantes) que:

$$q(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \det(S^{-1}(A - \lambda I)S) = (\det S)^{-1} \det(A - \lambda I) \det S = \det(A - \lambda I) = p(\lambda),$$

que é o resultado pretendido.

Exercício 69 *[2013/14 - 3º Teste - V1 - Problema 7 - LEGM, MEC]*

Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z, w) = (x + 2z + w, x + 2y + 2z + 3w, x + y + 2z + 2w), \quad (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4.$$

(a) Determine bases para o núcleo de T, $N(T)$, e para a imagem de T; (b) Mostre que $(-3, 1, 2, -1)$ pertence a $N(T)$ e determine as suas componentes na base indicada anteriormente; (c) Mostre que a equação $Tu = (-1, 1, 0)$ é possível e determine o conjunto das suas soluções.

. . . .

Resolução:

a) Começamos por representar T em relação às bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$. Como

$$T(1, 0, 0, 0) = (1, 1, 1); \quad T(0, 1, 0, 0) = (0, 2, 1); \quad T(0, 0, 1, 0) = (2, 2, 2); \quad T(0, 0, 0, 1) = (1, 3, 2),$$

a matriz A que representa T naquelas bases é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

e o estudo da transformação T pode reduzir-se ao estudo da matriz A, sendo identificados o núcleo e a imagem de T com o o núcleo e o espaço das colunas de A, respectivamente. Para a determinação destes podemos recorrer ao método de eliminação de Gauss. Implementando-o, obtém-se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U.$$

Como se sabe o maior subconjunto das colunas de A linearmente independente em $\mathbb{R}^3$ é formado pelas colunas de A que correspondem (na ordem) às colunas de U com pivô, sendo esse conjunto uma base para o espaço das colunas de A, C_A. Assim, uma vez que U tem pivôs nas colunas 1 e 2, uma base (ordenada) de $I(T)$ ou de C_A é formada pelas duas primeiras colunas de A:

$$\mathcal{B}_{I(T)} = \big((1,1,1),(0,2,1)\big).$$

O método de eliminação de Gauss mantém inalterado o conjunto das soluções do sistema homogéneo em que a matriz A figura como matriz dos coeficientes, i.e. os sistemas $Av = 0$ e $Uv = 0$ têm o mesmo conjunto de soluções. Essas soluções são da forma $v = (-2z - w, -w, z, w) = z(-2,0,1,0) + w(-1,-1,0,1)$, em que z e w são as incógnitas livres, $z, w \in \mathbb{R}$. Consequentemente, uma base (ordenada) do núcleo de T ou de A é

$$\mathcal{B}_{N(T)} = \big((-2,0,1,0),(-1,-1,0,1)\big).$$

b) É claro que $(-3,1,2,-1) \in N(T)$, pois $T(-3,1,2,-1) = (-3+2\times2-1, -3+2\times1+2\times2+3\times(-1), -3+1+2\times2+2\times(-1)) = (0,0,0)$ ou $A[-3\ 1\ 2\ \ -1]^t = [0\ 0\ 0]^t$. A representação

$$(-3,1,2,-1) = \alpha(-2,0,1,0) + \beta(-1,-1,0,1)$$

é imediata com $\alpha = 2$ e $\beta = -1$.

c) Ponhamos $s = (-1,0,1)$. Para mostrar que $Tu = s$ é possível basta mostrar que $s \in I(T)$, ou seja que existem $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tais que $s = \gamma(1,1,1) + \delta(0,2,1)$, o que facilmente se reconhece ser verdadeiro, com $\gamma = -1$ e $\delta = 1$. Tendo em conta, o significado das duas primeiras colunas de A, vem

$$s = (-1,0,1) = -1(1,1,1) + (0,2,1) = -T(1,0,0,0) + T(0,1,0,0) = T(-1,1,0,0),$$

pelo que $u_p = (-1,1,0,0)$ é uma solução particular de $Tu = s$.

Sendo T uma transformação linear, as soluções de $Tu = s$ são da forma $u = u_p + u_h$, em que u_p é uma solução particular e $u_h \in N(T)$. Como na alínea a) já caracterizámos o núcleo de T, segue-se que o conjunto S das soluções de $Tu = s$ é

$$S = \{u_p\} + N(T) = \{(-1,1,0,0) + z(-2,0,1,0) + w(-1,-1,0,1) : z, w \in \mathbb{R}\}.$$

Exercício 70 *[2013/14 - Exame - V1 - Problema 14 - LEGM, MEC]*

Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$T(x,y,z) = (5x + 2z, 3y, 3x + 6z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Represente-a na base canónica de $\mathbb{R}^3$; T é invertível? (b) Determine os valores próprios de T e os espaços próprios associados; (c) Indique uma base de $\mathbb{R}^3$ relativamente à qual T é representada por uma matriz diagonal, que deve explicitar. (d) Dê um exemplo de uma matriz simétrica de ordem 2, sem elementos nulos, e que tenha como valores próprios 2 e 3.

....

Resolução:

a) Seja $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$ com $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$. A matriz A que representa T na base canónica é a que tem na coluna j, $j = 1,2,3$, as componentes (na base canónica) da imagem por T do vector e_j. Como $Te_1 = (5,0,3)$, $Te_2 = (0,3,0)$ e $Te_3 = (3,0,6)$, vem

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Sendo linear, T é invertível se e só se o seu núcleo for trivial. Usando o método de eliminação de Gauss, facilmente se conclui que o núcleo de A (e, consequentemente de T) é constituído apenas pelo vector zero, pelo que T é invertível.

b) Os valores próprios de T são os zeros do polinómio característico, que é dado por

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix}.$$

Usando o facto de haver dois zeros na segunda linha (ou coluna), usando a regra de Laplace por expansão segundo essa linha (coluna), obtém-se

$$p(\lambda) = (3-\lambda)\big[(\lambda-5)(\lambda-6) - 6\big] = -(\lambda-3)(\lambda^2 - 11\lambda + 24) = -(\lambda-3)^2(\lambda-8),$$

pelo que T tem um valor próprio simples (multiplicidade algébrica igual a 1) $\lambda_1 = 8$, e um valor próprio duplo (multiplicidade algébrica igual a 2) $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$. Vejamos quais os espaços próprios associados a estes valores próprios e a respectiva dimensão:

- $E(\lambda_1) = E(8) = N_{A-8I} = L(\{(2,0,3)\})$, $\dim E(1) = 1$,

pois

$$(A-8I)u = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad u = \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- $E(\lambda_2) = E(3) = N_{A-3I} = L(\{(0,1,0), (-1,0,1)\})$, $\dim E(3) = 2$,

pois

$$(A-8I)v = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad v = \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

c) Vimos na alínea anterior que T tem dois valores próprios distintos aos quais estão associados três vectores próprios linearmente independentes, um associado ao valor próprio simples, $\lambda_1 = 8$, e dois associados ao valor próprio duplo, $\lambda_2 = 3$. Consequentemente, existe uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores próprios, digamos a base ordenada $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \tilde{u}_2)$, em que $u_1 = (2,0,3)$ é vector próprio associado a $\lambda_1 = 8$, e $u_2 = (0,1,0)$ e $\tilde{u}_2 = (-1,0,1)$ são vectores próprios linearmente independentes associados a $\lambda_2 = 3$. A representação matricial de T nesta base é a matriz dos valores próprios

$$\Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2) = \operatorname{diag}\{8,3,3\}$$

que está relacionada com a matriz A por:

$$\Lambda = S^{-1}AS, \qquad S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

através da matriz de mudança de base S, cujas colunas contêm as componentes dos vectores da base $\mathcal{B}$ na base canónica.

d) Uma propriedade importante das matrizes simétricas (as matrizes A que satisfazem $A = A^t$), que usámos, por exemplo, a propósito da diagonalização de formas quadráticas, é a de que elas são diagonalizáveis por meio de matrizes ortogonais (sendo estas as matrizes S que satisfazem $S^tS = I$, para as quais $S^{-1} = S^t$), i.e. tem-se:

$$D = S^tAS \quad \Leftrightarrow \quad A = SDS^t$$

em que D é diagonal. Como A e D têm os mesmos valores próprios (o polinómio característico é o mesmo para matrizes semelhantes), para construir o exemplo desejado basta tomar $D = \text{diag}\{2, 3\}$ e para S qualquer matriz ortogonal, por exemplo, a que se obtém normalizando (com norma 1) 2 vectores v_1 e v_2 ortogonais em $\mathbb{R}^2$ sem componentes nulas, digamos $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (-1, 1)$:

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

De facto, com esta escolha, tem-se

$$A = SDS^t = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

que é claramente uma matriz simétrica.

Exercício 71 *[2014/15 - 3º Teste - V1 - Problema 7 - MEEC]*

Sejam α um número real e $T_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear cuja representação em relação à base canónica de $\mathbb{R}^2$ é a matriz $A_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha - 1 \\ -1 & 2\alpha \end{bmatrix}$.
(a) Determine, em função de α, os valores próprios de T_α e os correspondentes espaços próprios; (b) Diga para que valores de α a transformação T_α admite uma representação matricial diagonal e para esses valores indique a forma diagonal e a matriz diagonalizante de A_α; (c) Para $\alpha = 3$, use os resultados da alínea anterior para obter os valores e vectores próprios da transformação linear ${T_3}^n - I$, em que $n \in \mathbb{N}$ e I é a transformação identidade; (d) Para $\alpha = 2$, como se representa T_2 na base ordenada $((1, 1), (0, 1))$? Quais são os valores próprios de ${T_2}^n - I$? $(n \in \mathbb{N})$

. . . .

Resolução:

a) Os valores próprios de T_α (ou de A_α) são os zeros do polinómio característico:

$$p_\alpha(\lambda) = \det(A_\alpha - \lambda I) = (\alpha - \lambda)(2\alpha - \lambda) + \alpha - 1 = \lambda^2 - 3\alpha\lambda + 2\alpha^2 + \alpha - 1.$$

Usando a fórmula resolvente para equações polinomiais de grau dois, facilmente se conclui que os zeros de p_α (os valores próprios de T_α) são:

$$\lambda_\pm = \frac{3\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha + 4}}{2} = \frac{3\alpha \pm (\alpha - 2)}{2}$$

ou seja,

$$\lambda_+ = 2\alpha - 1, \quad \lambda_- = \alpha + 1.$$

Se $2\alpha - 1 \neq \alpha + 1 \Leftrightarrow \alpha \neq 2$, então T_α tem dois valores próprios distintos, sendo os correspondentes espaços próprios:

$$E(\lambda_+) = N_{A_\alpha - \lambda_+ I}, \quad E(\lambda_-) = N_{A_\alpha - \lambda_- I}.$$

Como

$$A_\alpha - \lambda_+ I = \begin{bmatrix} -(\alpha - 1) & \alpha - 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_\alpha - \lambda_- I = \begin{bmatrix} -1 & \alpha - 1 \\ -1 & \alpha - 1 \end{bmatrix}.$$

facilmente se conclui que $E(\lambda_+) = L(\{(1,1)\})$ e $E(\lambda_-) = L(\{(\alpha-1,1)\})$.

Se $\alpha = 2$, então T_α tem apenas um valor próprio duplo (ou dois valores próprios iguais a) $\lambda_\pm = 3$, sendo o correspondente espaço próprio

$$E(\lambda_\pm) = N_{A-3I} = L(\{(1,1)\}).$$

b) Sendo os valores próprios de T_α reais, T_α é diagonalizável se e só existe uma base de $\mathbb{R}^2$ formada por vectores próprios de T_α. Como a valores próprios distintos estão associados vectores próprios linearmente independentes, se $\alpha \neq 2$, então T_α é diagonalizável, pois nesse caso existe uma base de $\mathbb{R}^2$ formada por vectores póprios, nomeadamente a seguinte: $B_\alpha = ((1,1),(\alpha-1,1))$. A representação matricial de T_α nesta base é a matrriz diagonal Λ_α dos valores próprios (pela ordem determinada pela escolha dos vectores próprios), $\Lambda_\alpha = \mathrm{diag}\{2\alpha-1, \alpha+1\}$. A relação entre as duas representações matriciais de T_α é dada por

$$\Lambda_\alpha = U_\alpha^{-1} A_\alpha U_\alpha,$$

em que a matriz diagonalizante de A_α é a matriz de mudança de base (da base canónica para a base B_α) que tem nas suas colunas os vectores próprios escolhidos para a base B_α pela ordem escolhida:

$$U_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \alpha-1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se $\alpha = 2$, então T_α não é diagonalizável, pois o espaço próprio associado ao único valor próprio (duplo) tem dimensão 1.

c) Para $\alpha = 3$, decorre da alínea anterior que T_3 (ou A_3) tem dois valores próprios distintos: $\lambda_+ = 5$, $\lambda_- = 4$, que é diagonalizável, sendo:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \Lambda_3 = {U_3}^{-1} A_3 U_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

Relativamente à transformação linear ${T_3}^n$ esta é representada em relação à base canónica pela matriz ${A_3}^n - I$. Ora,

$${A_3}^n - I = (U_3 \Lambda_3 {U_3}^{-1})^n - I = U_3 {\Lambda_3}^n {U_3}^{-1} - I = U_3[{\Lambda_3}^n - I]{U_3}^{-1}$$

ou, o que é equivalente,

$$\begin{bmatrix} 5^n - 1 & 0 \\ 0 & 4^n - 1 \end{bmatrix} = {\Lambda_3}^n - I = {U_3}^{-1}[{A_3}^n - I]U_3.$$

Tal significa que ${T_3}^n - I$ (ou ${A_3}^n - I$) é diagonalizável, sendo representada pela matriz diagonal dos valores próprios, $5^n - 1$ e $4^n - 1$, relativamente à mesma base que T_3 sendo os vectores próprios correspondentes, tal como para T_3, os que constituem as colunas da matriz U_3.

d) Para $\alpha = 2$, vimos em b) que T_2 tem um único valor próprio $\lambda = 3$ cujo espaço próprio é $L(\{(1,1)\})$. Consequentemente, para qualquer base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ que contenha o vector $(1,1)$, digamos $\mathcal{B} = ((1,1), v)$, a representação matricial B de T_2 nessa base é

$$B = \begin{bmatrix} 3 & \theta \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

em que o valor de θ depende do vector v considerado. Dada a estrutura triangular superior de B, facilmente se conclui que ${T_2}^n - I$ é representada na base $\mathcal{B}$ pela matriz

$$B^n - I = \begin{bmatrix} 3^n - 1 & \Theta \\ 0 & 3^n - 1 \end{bmatrix},$$

em que Θ depende de θ (e, portanto, de v). Daqui resullta que ${T_2}^n - I$ tem como único valor próprio $3^n - 1$. Para completar a questão falta exibir as dependências acima mencionadas: Com $v = (0,1)$, vem $T_2(0,1) = (1,4) = (1,1) + 3(0,1)$, pelo que $\theta = 1$. Facilmente se estabelece, por indução que

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{bmatrix},$$

pelo que $\Theta = n3^{n-1}$.

Exercício 72 *[2014/15 - Exame - V1 - Problema 14 - MEEC]*

Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Calcule os valores próprios de A bem como os correspondentes espaços próprios; b) Justifique que existe uma matriz de mudança de base S tal que $D = S^{-1}AS$ é uma matriz diagonal. Identifique D e S; c) Mostre que se λ é valor próprio de uma matriz quadrada B então λ^2 é um valor próprio da matriz B^2 e que se u é um vector próprio de B associado ao valor próprio λ, também é vector próprio de B^2 associado ao valor próprio λ^2; d) Seja C uma matriz quadrada diagonalizável cujos únicos valores próprios são 1 e -1. Use a alínea anterior para mostrar que C^2 é a matriz identidade.

. . . .

Resolução:

a) Os valores próprios de$A$ são as raízes (zeros) do polinómio característico:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

que pode ser calculado, por exemplo, usando a regra de Laplace por expansão segundo a primeira linha, vindo

$$p(\lambda) = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

e, usando novamente a regra de Laplace por expansão segundo a segunda linha, obtém-se

$$p(\lambda) = \lambda^2 \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 - 1)^2 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2.$$

Consequentemente, os valores próprios de A são ± 1 cada um deles com multiplicidade algébrica 2.

Vejamos agora quais são os espaços próprios $E(1) = N_{A-I}$, $E(-1) = N_{A+I}$. Usando eliminação de Gauss, vem

$$A - I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$A + I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donde facilmente se conclui que

$$E(1) = L((1,0,1,0),(0,1,0,1)), \quad E(-1) = L((1,0,-1,0),(0,1,0,-1)).$$

b) Sendo os valores próprios de A reais, a condição necessária e suficiente de diagonalização de A é a existência de uma base de $\mathbb{R}^4$ formada (exclusivamente) por vectores próprios de A. Vimos antes que A tem dois valores próprios, ± 1, sendo a dimensão de cada um dos espaços próprios igual a 2. Como a valores próprios distintos estão associados vectores próprios linearmente indenpendentes, tal implica que existe uma base de $\mathbb{R}^4$ formada (exclusivamente) por vectores próprios de A, nomeadamente a seguinte base ordenada

$$B = ((1,0,1,0),(0,1,0,1),(1,0,-1,0),(0,1,0,-1)),$$

em que os primeiros dois elementos são vectores próprios associados a $\lambda = 1$ e os restantes a $\lambda = -1$. Sendo A diagonalizável, ela é semelhante à matriz dos valores próprios (repetidos de acordo com a sua multiplicidade algébrica):

$$D = \operatorname{diag}\{1,1,-1,-1\} = S^{-1}AS,$$

sendo uma matriz diagonalizante S, a matriz dos vectores próprios pela ordem escolhida para a base dos vectores próprios (que é a matriz de mudança da base canónica para a base B):

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

c) Por definição, se λ é valor próprio de B, isso significa que existe um vector u não nulo tal que $Bu = \lambda u$, dizendo-se então que u é vector próprio associado ao valor próprio λ. Consequentemente,

$$B^2u = B(Bu) = B(\lambda u) = \lambda Bu = \lambda^2 u$$

e, portanto existe um vector não nulo (u) tal que $B^2u = \lambda^2 u$, pelo que λ^2 é valor próprio de B^2, sendo u um vector próprio associado a esse valor próprio.

d) Sendo C diagonalizável, é semelhante à matriz diagonal dos valores próprios que, por hipótese, são ± 1, e que suporemos (por comodidade) escrita na forma $\Lambda = \operatorname{diag}\{1,\ldots,1,-1,\ldots,-1\}$. Existe pois uma matriz invertível U tal que

$$\Lambda = U^{-1}CU \quad \Leftrightarrow \quad C = U\Lambda U^{-1}.$$

Logo

$$C^2 = (U\Lambda U^{-1})^2 = (U\Lambda U^{-1})(U\Lambda U^{-1}) = (U\Lambda)(\Lambda U^{-1}) = U\Lambda^2 U^{-1} = UU^{-1} = I,$$

em que se usou sistematicamente a propriedade associativa do produto de matrizes e que $\Lambda^2 = I$. Facilmente se conclui que este resultado não depende da ordenação dada aos elementos (± 1) na matriz diagonal Λ, o que conclui a prova da igualdade.
