Álgebra Linear
Exercícios de avaliação resolvidos

Setembro 2015

[Exercícios baseados em provas de avaliação a cursos leccionados por Amarino Lebre.]

Sistemas de Equações Lineares, Matrizes e Determinantes

Exercício 1 *[2005/6 - 2º Exame - V1 - Problema 11 - LEEC]*

Sejam $\mu \in \mathbb{R}$ e $A_\mu = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & \mu \\ 3 & \mu^2 & \mu \end{bmatrix}$. Determine:

a) o determinante de A_μ, em função de μ;

b) a característica de A_μ, em função de μ;

c) a inversa de A_μ para $\mu = 1$.

....

<u>**Resolução**</u>:

a) Para calcular o determinante de A_μ usamos, por exemplo, a regra de Laplace por expansão segundo a primeira linha, obtendo-se:

$$\det A_\mu = -\begin{vmatrix} 1 & \mu \\ 3 & \mu \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & \mu^2 \end{vmatrix} = 2(\mu^2 + \mu - 12) = 2(\mu + 4)(\mu - 3).$$

b) De acordo com a alínea anterior, se $\mu \notin \{-4, 3\}$, então $\det A_\mu \neq 0$ e, consequentemente, A_μ é invertível, pelo que a sua característica é igual ao número de linhas ou de coluna de A_μ:

$$\operatorname{car} A_\mu = 3 \quad \text{se } \mu \notin \{-4, 3\}.$$

Se $\mu \in \{-4, 3\}$, a matriz A_μ é singular e, consequentemente a sua característica é inferior a 3. Para sabermos o valor exacto aplicamos a eliminação de Gauss a A_μ:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & \mu \\ 3 & \mu^2 & \mu \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 4 & \mu \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & \mu^2 & \mu \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 4 & \mu \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & \mu^2 - 12 & -2\mu \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 4 & \mu \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2(\mu^2 + \mu - 12) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & \mu \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

em que se usou o facto de ser $\mu^2 - 12 \neq 0$ para $\mu \in \{-4, 3\}$. Consequentemente

$$\operatorname{car} A_\mu = 2 \quad \text{se } \mu \in \{-4, 3\}.$$

uma vez que A_μ tem apenas dois pivôs.

Observe-se que o processo anterior permite determinar o valor da característica de A_μ para qualquer valor de μ, mas ter-se-ia de considerar separadamente os casos em que $\mu^2 - 12 = 0$.

c) Decorre da alínea (a) que, para $\mu = 1$, A_μ é invertível, pois $\det A_1 = -20 \neq 0$. Para calcular a inversa de A_1, determinamos a matriz dos cofactores de A_1 e usamos a expressão:

$$A_1^{-1} = \frac{1}{\det A_1} (\operatorname{cof} A_1)^t \,.$$

Tem-se

$$\operatorname{cof} A_1 = \operatorname{cof} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -11 \\ 1 & -6 & 3 \\ -7 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

e, portanto,

$$A_1^{-1} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} -3 & -1 & 7 \\ -2 & 6 & -2 \\ 11 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 2 *[2006/7 - 1° Teste - Problema 6 - MEC]*

Considere a matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ dada por $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Use o método de Gauss-Jordan para:

a) mostrar que A é invertível e para obter a sua inversa;

b) calcular o determinante de A.

....

Resolução:

a) Aplicamos o método de Gauss-Jordan à matriz aumentada $[A \vdots I]$, com a habitual convenção de notação: $X \xrightarrow{E} Y$ significa que $Y = EX$. Tem-se

$$
\begin{aligned}
[A \vdots I] \quad &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
(A\,\text{invertível} \Leftarrow) \quad &\xrightarrow{P} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \\
&\xrightarrow{F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{D^{-1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{array}\right] = [I \vdots B]
\end{aligned}
$$

em que

$$
E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.
$$

No final da 1ª fase, que coincide com o final da eliminação de Gauss, conclui-se que A é não-singular (ou invertível), pois a matriz A deu origem a uma matriz triangular superior sem zeros na diagonal principal. No final do processo, tem-se $B = D^{-1}F_2F_3PE$ é tal que $BA = I$. Como B é invertível, por ser o produto de matrizes elementares cada uma delas invertível, conclui-se que é a inversa de A,

$$
A^{-1} = B = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}
$$

b) Da igualdade

$$
D^{-1}F_2F_3PEA = I,
$$

tendo em conta que o determinante de um produto é o produto dos determinantes, que $\det D^{-1} = 1/\det D$ e que

$$
\det E = \det F_3 = \det F_2 = 1, \quad \det P = -1, \quad \det D = 4
$$

obtém-se

$$
\det A = -\det D = -4.
$$

Exercício 3 *[2008/9 - 1° Teste - Problema 7 - LEIC]*

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Mostre que A é invertível e determine a sua inversa;

b) Calcule o determinante de A;

c) Resolva a equação

$$A^2\, u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

....

Resolução:

a):b) Resolvemos as duas primeiras alíneas por dois processos alternativos:
1° processo:

Aplicamos o método de Gauss-Jordan à matriz aumentada $[A \vdots I]$, com a habitual convenção de notação: $X \xrightarrow{E} Y$ significa que $Y = EX$. Tem-se

$$[A \vdots I] \quad = \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$(A \text{ invertível } \Leftarrow) \quad \xrightarrow{E_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{D^{-1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right] = [I \vdots B]$$

em que

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad F_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

No final da 1ª fase, que coincide com o final da eliminação de Gauss, conclui-se que A é não-singular (ou invertível), pois a matriz A deu origem a uma matriz triangular superior sem zeros na diagonal principal. No final do processo, tem-se $B = D^{-1}F_3E_2E_1$ é tal que $BA = I$. Como B é invertível, por ser o produto de matrizes elementares cada uma delas invertível, conclui-se que é a inversa de A,

$$A^{-1} = B = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Da igualdade

$$D^{-1}F_3E_2E_1A = I,$$

tendo em conta que o determinante de um produto é o produto dos determinantes, que $\det D^{-1} = 1/\det D$ e que

$$\det E_2 = \det E_1 = \det F_3 = 1, \quad \det D = -2$$

obtém-se

$$\det A = \det D = -2.$$

Uma outra forma de obter este resultado consiste em usar o facto de o método de eliminação sem troca de linhas (como é o caso) não alterar o determinante de uma matriz.

2° processo: Uma condição necessária e suficiente de invertibilidade de uma matriz é que o seu determinante seja diferente de zero. Se $\det A \neq 0$, a inversa de A pode ser calculada por via da matriz dos cofactores:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\big(\operatorname{cof} A\big)^t, \quad \operatorname{cof} A = [a'_{ij}], \quad a'_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij},$$

em que A_{ij} é a matriz que se obtém de A eliminando a linha i e a coluna j.

Para calcular o determinante de A podemos usar, por exemplo, a fórmula de Laplace por expansão segundo a 1ª linha, obtendo-se

$$\det A = a'_{11} + a'_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2.$$

Sendo $\det A \neq 0$, A é invertível. Para determinar a sua inversa basta calcular a matriz dos cofactores. Tem-se (dois dos cofactores da primeira linha já foram calculados)

$$a'_{11} = -1, \quad a'_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad a'_{13} = -1,$$

$$a'_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad a'_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad a'_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$a'_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad a'_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad a'_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

pelo que

$$\operatorname{cof} A = (\operatorname{cof} A)^t = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Em consequência

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

c) Comecemos por notar que a matriz dos coeficientes, A^2, é invertível, sendo a sua inversa $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2 = A^{-2}$. Efectivamente, da associatividade do produto de matrizes resulta que

$$(A^{-1})^2A^2 = (A^{-1}A^{-1})(AA) = A^{-1}(A^{-1}A)A = A^{-1}A = I.$$

Ora, sendo A^2 invertível, a equação $A^2u = b$ tem uma única solução dada por

$$u = (A^2)^{-1}b = A^{-2}b.$$

Neste caso

$$u = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}.$$

Exercício 4 *[2009/10 - 1° Teste - Problema 6 - MEC]*

Considere as seguintes matrizes de $\mathbb{R}^{3\times 3}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}.$$

1. Calcule sucessivamente:
   (a) a matriz dos cofactores de A, (b) o determinante de A, (c) a inversa de A (se existir).
2. Use o método de eliminação de Gauss para mostrar que, independentemente do vector $b \in \mathbb{R}^3$ considerado, a equação $Bu = b$ tem uma única solução.
3. Qual é a solução da equação $ABv = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$?

....

Resolução:

1. (a) A matriz dos cofactores de A, $\operatorname{cof} A$, é a dada por

$$\operatorname{cof} A = [a'_{ij}]_{i,j=1}^{3}, \quad a'_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij},$$

em que A_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ é a matriz de ordem 2 que se obtém de A eliminando a linha i e a coluna j. Assim temos:

$$\begin{array}{lll}
a'_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4, & a'_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2, & a'_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 6 = -3, \\
a'_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(-3) = 3, & a'_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1, & a'_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3, \\
a'_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2, & a'_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(-1) = 1, & a'_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2.
\end{array}$$

Consequentemente

$$\operatorname{cof} A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. (b) Uma vez que na alínea anterior já foram determinados os cofactores de A, para calcular o determinante de A vamos usar a regra de Laplace,

$$\det A = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} a'_{ij} = \sum_{i=1}^{3} a_{ij} a'_{ij}$$

por expansão segundo uma linha ou coluna de A que seja mais vantajosa (ou seja com o maior número possível de zeros, para que o cálculo seja o mais simples possível). Neste caso, tanto as linha 1 e 2 como as colunas 2 e 3 servem esse objectivo. Escolhendo, a título de exemplo, a linha $i = 1$, tem-se:

$$\det A = a'_{11} + a'_{13} = 4 - 3 = 1.$$

1. (c) É condição necessária e suficiente para que A seja invertível que $\det A \neq 0$. Como vimos na alínea anterior $\det A = 1 \neq 0$. Consequentemente, A é invertível. Para determinar a sua inversa podemos usar os resultados anteriores, já que a inversa de A, A^{-1}, pode ser calculada por

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\operatorname{cof} A)^t.$$

Neste caso, tem-se

$$A^{-1} = (\operatorname{cof} A)^t = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Seja $b = (b_1, b_2, b_3)$ um elemento arbitrário de $\mathbb{R}^3$, que escrevemos na forma de vector coluna. Aplicamos o método de eliminação de Gauss à matriz aumentada $\left[B \,\vdots\, b\right]$, com a habitual convenção de notação: $X \xrightarrow{E} Y$ significa que $Y = EX$.

$$[B \vdots b] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & b_1 \\ 3 & 2 & 1 & | & b_2 \\ 2 & 5 & 9 & | & b_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & b_1 \\ 0 & -4 & -8 & | & b_2 - 3b_1 \\ 0 & 1 & 3 & | & b_3 - 2b1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & b_1 \\ 0 & -4 & -8 & | & b_2 - 3b_1 \\ 0 & 0 & 1 & | & b_3 + b_2/4 - 11b_1/4 \end{bmatrix} = [U \vdots c]$$

em que

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1 \end{bmatrix}.$$

O método de eliminação de Gauss mantém invariante o conjunto das soluções de $Bu = b$ e, portanto, os sistemas $Bu = b$ e $Uu = c$ (U e c estão definidos acima e são, respectivamente, o resultado da eliminação de Gauss aplicado à matriz dos coeficientes e ao vector dos termos independentes) têm o mesmo conjunto de soluções. Como U é uma matriz triangular superior sem zeros na diagonal principal (ou seja, U tem tantos pivôs quantas as linhas ou colunas), a equação $Uu = c$ tem uma única solução, que pode ser obtida recursivamente. Sendo o processo válido para qualquer vector $b \in \mathbb{R}^3$, fica estabelecido o resultado pretendido.

3. Vimos na alínea 1 que a matriz A é invertível. Consequentemente, a única solução Bv de $ABv = e_3$, com $e_3 = (0, 0, 1)$ (escrito como vector coluna) é tal que $Bv = b$, em que b coincide com a terceira coluna de A^{-1}:

$$b = A^{-1}e_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, na alínea anterior vimos que o vector $v = (v_1, v_2, v_3)$, solução de $Bv = b$ se pode obter resolvendo o sistema mais simples $Uv = c$, cuja matriz aumentada é neste caso

$$[U \vdots c] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & -2 \\ 0 & -4 & -8 & | & 7 \\ 0 & 0 & 1 & | & 31/4 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo, obtém-se

$$\begin{cases} v_3 = 31/4 \\ -4v_2 - 8v_3 = 7 \\ v_1 + 2v_2 + 3v_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_3 = 31/4 \\ v_2 = -69/4 \\ v_1 = 37/4 \end{cases}$$

Em conclusão, a solução da equação $ABv = e_3$ é $v = 1/4(37, -69, 31)$.

Exercício 5 *[2010/11 - 1° Teste - V1 - Problema 3 - MEEC]*

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine sucessivamente:

a) A matriz dos cofactores de A;

b) O determinante de A;

c) (Todas) as soluções da equação $Au = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

. . . .

Resolução:

a) Usando a notação habitual: $\operatorname{cof} A = [a'_{ij}]$, com $a'_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$, em que a matriz A_{ij} se obtém de A eliminando a linha i e a coluna j, neste caso temos:

$$\begin{aligned}
a'_{11} &= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad a'_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad a'_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1,\\
a'_{21} &= -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad a'_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad a'_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2,\\
a'_{31} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad a'_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad a'_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1,
\end{aligned}$$

pelo que a matriz dos cofactores de A é

$$\operatorname{cof} A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

b) Uma vez que já conhecemos os cofactores de A o método mais simples para calcular o determinante consiste em usar a regra de Laplace, apesar de a matriz dada não ter nenhum zero. Usando a regra de Laplace, por expansão segundo a primeira linha (por exemplo), temos

$$\det A = a_{11}a'_{11} + a_{12}a'_{12} + a_{13}a'_{13} = a'_{11} + 2a'_{12} + a'_{13} = -1 + 2 - 1 = 0.$$

c) Como o segundo membro da equação a resolver coincide com a terceira coluna da matriz A, uma solução (particular) daquela equação é $u_p = (0, 0, 1)$. Resulta da alínea anterior que que a matriz A não é invertível (pois $\det A = 0$) e, portanto, a equação considerada tem infinitas soluções. A solução geral da equação em estudo é da forma $u = u_p + u_h$ em que $u_h \in N_A$, ou seja, $Au_h = 0$. Falta pois determinar as soluções desta equação (homogénea). Para tal podemos usar qualquer um dos dois processos a seguir indicados:

1 - Como se sabe, para qualquer matriz quadrada é válida a relação $A(\operatorname{cof} A)^t = (\det A)I$, em que I é a matriz identidade da ordem considerada. Por outro lado, vimos na alínea anterior que $\det A = 0$. Consequentemente, as colunas de $(\operatorname{cof} A)^t$ ou, o que é equivalente, as linhas de $\operatorname{cof} A$, contêm vectores que são soluções da equação $Au_h = 0$. Daqui resulta que as soluções desta equação são da forma $u_h = y(-1, 1, -1)$ com $y \in \mathbb{R}$ arbitrário.

2 - Usando o método de eliminação de Gauss:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

Daqui resulta que as soluções $u_h = (x, y, z)$ são tais que

$$\begin{cases} y + z & = 0 \\ x + 2y + z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -y \\ x = -y \end{cases}$$

e $y \in \mathbb{R}$ é arbitrário. Consequentemente, $u_h = y(-1, 1, -1), y \in \mathbb{R}$.

Tendo em conta as observações anteriores, concluímos finalmente que o conjunto das soluções da equação $Au = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é

$$\{u = (0, 0, 1) + y(-1, 1, -1) : y \in \mathbb{R}\} = \{u = (-y, y, 1 - y) : y \in \mathbb{R}\}.$$

Exercício 6 *[2012/13 - 1° Teste - V1 - Problema 4 - LEGM, MEC]*

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

e note que elas apenas diferem na primeira linha. Determine sucessivamente:

a) A matriz dos cofactores de A;

b) Os determinantes das matrizes A e B;

c) (Todas) as soluções da equação $ABu = \begin{bmatrix} 16 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

....

Resolução:

a) Por definição a matriz dos cofactores de A é a matriz

$$\operatorname{cof} A = [a'_{ij}], \quad a'_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij},$$

em que A_{ij} se obtém de A eliminando a linha i e a coluna j. Neste caso particular temos:

$$\begin{aligned}
a'_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1, & a'_{12} &= -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1, & a'_{13} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1, \\
a'_{21} &= -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 9, & a'_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -10, & a'_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7, \\
a'_{31} &= \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -6, & a'_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 7, & a'_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5,
\end{aligned}$$

pelo que a matriz dos cofactores de A é

$$\operatorname{cof} A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 9 & -10 & 7 \\ -6 & 7 & -5 \end{bmatrix}.$$

b) Uma vez que já conhecemos os cofactores de A o método mais simples para calcular o determinante de A consiste em usar a regra de Laplace, apesar de a matriz dada não ter nenhum zero. Como, por outro lado, a matriz B só difere de A no elemento 13, os cofactores dos elementos da primeira linha (ou, em alternativa, da terceira coluna) são iguais para ambas as matrizes:

$$a'_{11} = b'_{11} = 1, \quad a'_{12} = b'_{12} = -1, \quad a'_{13} = b'_{13} = 1.$$

Então, usando a regra de Laplace, por expansão segundo a primeira linha, temos

$$\det A = a_{11}a'_{11} + a_{12}a'_{12} + a_{13}a'_{13} = a'_{11} + 3a'_{12} + 3a'_{13} = 1 - 3 + 3 = 1,$$

$$\det B = b_{11}b'_{11} + b_{12}b'_{12} + b_{13}b'_{13} = b'_{11} + 3b'_{12} + 2b'_{13} = 1 - 3 + 2 = 0.$$

c) Como vimos na alínea anterior o determinante de A é diferente de zero e, portanto, a matriz A é invertível. A sua inversa é dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\operatorname{cof} A)^t = (\operatorname{cof} A)^t = \begin{bmatrix} 1 & 9 & -6 \\ -1 & -10 & 7 \\ 1 & 7 & -5 \end{bmatrix}.$$

Sendo A invertível, a equação $ABu = \begin{bmatrix} 16 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ é equivalente a

$$Bu = A^{-1}\begin{bmatrix} 16 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad Bu = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Note-se agora que o segundo membro da última desta equações coincide com a primeira coluna da matriz B, pelo que uma solução particular desta equação é o vector $u_p = (1,0,0)$ escrito como vector coluna. Como se sabe, a solução geral u dessa equação é da forma

$$u = u_p + u_h, \quad \text{com } u_h \in N_B,$$

em que $N_B = \{u_h : Bu_h = 0\}$ é o núcleo da matriz B e pode ser facilmente determinado usando o método de eliminação de Gauss. Implementando-o, vem

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -7 & -7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde se conclui facilmente que $u_h = \alpha(1,-1,1), \alpha \in \mathbb{R}$. Consequentemente a solução geral da equação considerada é da forma

$$u = (1,0,0) + \alpha(1,-1,1) = (1+\alpha, -\alpha, \alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Exercício 7 *[2013/14 - 1° Teste - V1 - Problema 4 - LEGM, MEC]*

Considere a matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ dada por $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -8 \end{bmatrix}$ e seja $b = \begin{bmatrix} 1 \\ \det A \\ 3 \end{bmatrix}$. Determine:
a) A matriz dos cofactores de A e o determinante de A; b) As soluções da equação $Au = b$; c) Dessas soluções a que pertence ao plano $P = \{\alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.
d) Mostre que uma matriz quadrada não pode ser simultaneamente singular e invertível.

. . . .

Resolução:

(a) Por definição, a matriz dos cofactores de A, cof A, é a dada por

$$\operatorname{cof} A = [a'_{ij}]_{i,j=1}^{3}, \quad a'_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij},$$

em que A_{ij} $(i,j = 1,2,3)$ é a matriz de ordem 2 que se obtém de A eliminando a linha i e a coluna j. Assim temos:

$$\begin{aligned} a'_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} \\ &= -8 - 10 = -18 \end{aligned}; \qquad \begin{aligned} a'_{12} &= -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} \\ &= -(-16-2) = 18 \end{aligned}; \qquad \begin{aligned} a'_{13} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 10 - 1 = 9 \end{aligned};$$

$$\begin{aligned} a'_{21} &= -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} \\ &= -(-16+10) = 6 \end{aligned}; \qquad \begin{aligned} a'_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} \\ &= -8 + 2 = -6 \end{aligned}; \qquad \begin{aligned} a'_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ &= -(5-2) = -3 \end{aligned};$$

$$\begin{aligned} a'_{31} &= \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 4 + 2 = 6 \end{aligned}; \qquad \begin{aligned} a'_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -(2+4) = -6 \end{aligned}; \qquad \begin{aligned} a'_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 - 4 = -3 \end{aligned}.$$

Consequentemente,

$$\text{cof}\, A = \begin{bmatrix} -18 & 18 & 9 \\ 6 & -6 & -3 \\ 6 & -6 & -3 \end{bmatrix}.$$

Uma vez que já foram determinados os cofactores de A, para calcular o determinante de A vamos usar a regra de Laplace,

$$\det A = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} a'_{ij} = \sum_{i=1}^{3} a_{ij} a'_{ij}$$

por expansão segundo uma linha ou coluna de A. Neste caso, não havendo elementos nulos na matriz A, não há escolha preferencial do ponto de vista do trabalho de cálculo. Escolhendo, a título de exemplo, a linha $i = 1$, tem-se:

$$\det A = a_{11}a'_{11} + a_{12}a'_{12} + a_{13}a'_{13} = 1 \times (-18) + 2 \times 18 - 2 \times 9 = 0.$$

(b) As soluções do sistema $Au = b$ podem ser obtidas pelo método de eliminação de Gauss. Neste caso, o segundo membro depende do valor do determinante da matriz dos coeficientes, que foi determinado anteriormente, $b = (1, 0, 3)$. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz aumentada do sistema $\left[A \,\vdots\, b\right]$, com a habitual convenção de notação: $X \xrightarrow{E} Y$ significa que $Y = EX$, vem

$$\left[A \,\vdots\, b\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -8 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[U \,\vdots\, c\right]$$

em que

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

O método de eliminação de Gauss mantém invariante o conjunto das soluções de $Au = b$ e, portanto, os sistemas $Au = b$ e $Uu = c$ (U e c estão definidos acima e são, respectivamente, o resultado da eliminação de Gauss aplicado à matriz dos coeficientes e ao vector dos termos independentes) têm o mesmo conjunto de soluções. Como U é uma matriz triangular superior com um zero na diagonal principal, na posição 33, sendo a linha 3 nula, e o vector c tem a 3ª componente nula, o sistema $Uu = c$ é possível e indeterminado. As soluções podem ser obtidas em função da incógnita livre (a terceira, a que corresponde à coluna sem pivô), por um processo recursivo. Usando $u = (x, y, z)$ para o vector solução, $z \in \mathbb{R}$ é arbitrário. Da segunda equação obtém-se: $-3y + 6z = -2 \Leftrightarrow y = 2z + 2/3$. Substituíndo este resultado na primeira equação: $x + 2y - 2z = 1$, vem $x = -2z - 1/3$. Estes resultados poderiam ser obtidos directamente pelo método de Gauss-Jordan se a eliminação prosseguisse, dispensando a determinação recursiva das incógnitas.

Assim se conclui que o conjunto S das soluções de $Au = b$ é dado por

$$\begin{aligned} S &= \{u \in \mathbb{R}^3 : u = (-1/3 - 2z, 2/3 + 2z, z), z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{u \in \mathbb{R}^3 : u = (-1/3, 2/3, 0) + z(-2, 2, 1), z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

(c) O plano P é caracterizado por ser formado por vectores de $\mathbb{R}^3$ com a terceira componente nula. Ora, das soluções anteriormente determinadas a única que satisfaz a esta condição é $(-1/3, 2/3, 0)$ (a solução particular, correspondente a tomar $z = 0$), pelo que $\alpha = -1/3, \beta = 2/3$. Consequentemente, $S \cap P = \{(-1/3, 2/3, 0)\}$.

Alternativamente, poderiamos ter usando o seguinte procedimento: Escrevendo os vectores de P na forma de vectores coluna e tendo em conta que

$$A\left(\alpha\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)=\alpha\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}2\\1\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\\1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix}$$

facilmente se conclui que o par (α, β) solução da equação

$$\begin{bmatrix}1&2\\2&1\\1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\\det A\\3\end{bmatrix}\qquad(\det A=0)$$

coincide com o par das duas primeiras componentes de vector $(-1/3, 2/3, 0)$, solução particular da equação considerada em b), i.e. $\alpha = -1/3, \beta = 2/3$ (Verifique!).

(d) Efectivamente, supondo que a matriz quadrada A é invertível, com inversa A^{-1}, o sistema de equações $Au = 0$ tem como única solução o vector zero, pois $u = (A^{-1}A)u = A^{-1}(Au) = A^{-1}0 = 0$. Por outro lado, supondo que a matriz quadrada A é singular, tal significa que a matriz triangular superior U que dela se obtém por eliminação de Gauss, tem (pelo menos) um zero na diagonal principal, sendo o sistema de equações $Uu = 0$ possível e indeterminado, com grau de indeterminação maior ou igual a 1. Como os sistemas $Au = 0$ e $Uu = 0$ têm o mesmo conjunto de soluções, tal implica que $Au = 0$ tem soluções não nulas. Daqui resulta que A não pode ser simultaneamente singular e invertível.

Exercício 8 *[2013/14 - Exame - V1 - Problema 6 - LEGM, MEC]*

Sejam $\mu \in \mathbb{R}$ e $A_\mu = \begin{bmatrix}0&3&-1\\1&5&\mu\\2&\mu^2&2(\mu+1)\end{bmatrix}$.

(a) Calcule o determinante de A_μ (em função de μ); (b) Determine a característica de A_μ (em função de μ); (c) Para $\mu = 1$ determine a matriz dos cofactores de A_1 e use-a para obter a inversa de A_1; (d) Seja X uma matriz invertível, com inversa X^{-1}, X^t a sua transposta e $\operatorname{cof} X$ a matriz dos cofactores de X: mostre que (i) X^t é invertível e que (ii) $(\operatorname{cof} X)^t = \operatorname{cof}(X^t)$.

....

Resolução:

(a) e (b) Tendo em conta o que se pede na alínea (b), há vantagem em resolver simultaneamente (a) e (b), uma vez que o método de eliminação de Gauss também permite calcular o determinante de A_μ. Implementando-o, obtém-se:

$$A_\mu=\begin{bmatrix}0&3&-1\\1&5&\mu\\2&\mu^2&2(\mu+1)\end{bmatrix}\xrightarrow{P}\begin{bmatrix}1&5&\mu\\0&3&-1\\2&\mu^2&2(\mu+1)\end{bmatrix}\xrightarrow{E_1}\begin{bmatrix}1&5&\mu\\0&3&-1\\0&\mu^2-10&2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_2}\begin{bmatrix}1&5&\mu\\0&3&-1\\0&0&2+\frac{\mu^2-10}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&5&\mu\\0&3&-1\\0&0&\frac{(\mu-2)(\mu+2)}{3}\end{bmatrix}=U_\mu$$

Como se sabe, em consequência da regra do produto de determinantes, o método de eliminação de Gauss não altera o valor absoluto do determinante, apenas podendo alterar o sinal caso haja trocas de linhas, como foi o caso no primeiro passo. Então

$$\det A_\mu = -\det U_\mu = -(\mu-2)(\mu+2).$$

A característica de A_μ, $\operatorname{car} A_\mu$, é, por definição, o número de pivôs de U_μ, pelo que

$$\operatorname{car} A_\mu = \begin{cases} 2 & \text{se } \mu = \pm 2, \\ 3 & \text{se } \mu \neq \pm 2. \end{cases}$$

(c) Por definição, a matriz dos cofactores de A_1, $\operatorname{cof} A_1$, é a dada por

$$\operatorname{cof} A_1 = [a'_{ij}]_{i,j=1}^3, \quad a'_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_1)_{ij},$$

em que $(A_1)_{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ é a matriz de ordem 2 que se obtém de A_1 eliminando a linha i e a coluna j. Assim temos:

$$\begin{aligned} a'_{11} &= \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 20 - 1 = 19 \end{aligned}; \qquad \begin{aligned} a'_{12} &= -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= -(4-2) = -2 \end{aligned}; \qquad \begin{aligned} a'_{13} &= \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 - 10 = -9 \end{aligned};$$

$$\begin{aligned} a'_{21} &= -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= -(12+1) = -13 \end{aligned}; \qquad \begin{aligned} a'_{22} &= \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 0 + 2 = 2 \end{aligned}; \qquad \begin{aligned} a'_{23} &= -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -(0-6) = 6 \end{aligned};$$

$$\begin{aligned} a'_{31} &= \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3 + 5 = 8 \end{aligned}; \qquad \begin{aligned} a'_{32} &= -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -(0+1) = -1 \end{aligned}; \qquad \begin{aligned} a'_{33} &= \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 0 - 3 = -3 \end{aligned}.$$

Consequentemente,

$$\operatorname{cof} A_1 = \begin{bmatrix} 19 & -2 & -9 \\ -13 & 2 & 6 \\ 8 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

A inversa de A_1 obtém-se da matriz dos cofactores pela fórmula ${A_1}^{-1} = \frac{1}{\det A_1}(\operatorname{cof} A_1)^t$. Resulta da alínea a) que $\det A_1 = 3$, pelo que

$${A_1}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 19 & -13 & 8 \\ -2 & 2 & -1 \\ -9 & 6 & -3 \end{bmatrix}.$$

(d) Sendo X invertível com inversa X^{-1}, tem-se

$$XX^{-1} = X^{-1}X = I.$$

Por transposição das igualdades anteriores, segue-se que

$$(X^{-1})^t X^t = X^t (X^{-1})^t = I,$$

o que significa que X^t é invertível, com inversa $(X^{-1})^t$, ou seja $(X^t)^{-1} = (X^{-1})^t$, o que prova a primeira parte. Tomando Y em vez de X nas relações anteriores conclui-se que, se Y é invertível, então $(Y^t)^{-1} = (Y^{-1})^t$. Como se sabe e usámos na alínea anterior, a inversa de Y pode ser calculada por $Y^{-1} = \frac{1}{\det Y}(\operatorname{cof} Y)^t$. Então, tomando $X = Y^t$, X e Y são simultaneamente invertíveis, $\det X = \det Y$ e

$$X^{-1} = (Y^t)^{-1} = (Y^{-1})^t = \frac{1}{\det Y}\operatorname{cof} Y = \frac{1}{\det X}\operatorname{cof} X^t.$$

Tendo em conta que $X^{-1} = \frac{1}{\det X}(\operatorname{cof} X)^t$ e a unicidade da inversa de uma matriz, tal prova que

$$(\operatorname{cof} X)^t = \operatorname{cof} X^t.$$

Exercício 9 *[2014/15 - 1° Teste - V1 - Problema 4 - MEEC]*

Considere as matrizes reais: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -3 \\ -2 & 6 & 5 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Mostre que A é invertível e determine a sua inversa pelo método de Gauss-Jordan; (b) Sendo $b = (0, 0, 1)$, determine se existirem (todas) as soluções do SEL: $ABu = b$; (c) Alguma dessas soluções pertence ao plano $P = \{(x, y, z) : y = z\}$?

....

Resolução:

(a) Aplicamos o método de Gauss-Jordan à matriz aumentada $[A \,\vdots\, I]$, com a habitual convenção de notação: $X \xrightarrow{E} Y$ significa que $Y = EX$. Tem-se

$$[A \,\vdots\, I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$(A \text{ invertível } \Leftarrow) \quad \xrightarrow{E_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -11 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{D^{-1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 2 & -1 \end{array}\right] = [I \,\vdots\, B]$$

em que

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad F_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

No final da 1ª fase, que coincide com o final da eliminação de Gauss, conclui-se que A é não-singular (ou invertível), pois a matriz A deu origem a uma matriz triangular superior sem zeros na diagonal principal. No final do processo, tem-se $B = D^{-1}F_3E_2E_1$ é tal que $BA = I$. Como B é invertível, por ser o produto de matrizes elementares cada uma delas invertível, conclui-se que é a inversa de A,

$$A^{-1} = B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ -6 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

(b) Vimos na alínea anterior que A é invertível. Consequentemente, a equação que se pretende resolver é equivalente à seguinte:

$$Bu = \tilde{b}, \text{ com } \tilde{b} = A^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

pois $Bu = A^{-1}(ABu) = A^{-1}b$. Note-se que o vector $\tilde{b}$ coincide com a terceira coluna de A^{-1}. Para resolver a equação anterior podemos usar o método de eliiminação de Gauss-Jordan, aplicado à matriz aumentada $[B \vdots \tilde{b}]$. Implementando-o, obtém-se

$$[B \vdots \tilde{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{D^{-1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

em que

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad F_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Daqui se conclui que o sistema em consideração é possível e indeterminado, sendo a terceira das incógnitas livre. Sendo $u = (x, y, z)$ (escrito como vector coluna), vem $x = 1/2 - z, y = 1/2, z \in \mathbb{R}$, pelo que a solução geral da equação original é dada por

$$u = (1/2, 1/2, 0) + z(-1, 0, 1), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Em alternativa, para determinar as soluções, poder-se-ia ter usado apenas a eliminação de Gauss.

(c) O plano P é caracterizado por ter as segunda e terceira componentes iguais. Ora, como as soluções anteriormente obtidas têm a segunda componente determinada, $y = 1/2$, a solução u_P que pertence ao plano P é aquela que se obtém da solução geral tomando $z = 1/2$, ou seja,

$$u_P = (0, 1/2, 1/2).$$

Exercício 10 *[2014/15 - Exame - V1 - Problema 6 - MEEC]*

Sejam $\mu \in \mathbb{R}$ e $A_\mu = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & \mu^2 \\ 2 & \mu+6 & 4 \end{bmatrix}$.

a) Calcule, em função de μ, a característica de A_μ; b) Calcule, em função de μ, o determinante de A_μ; c) Para $\mu = 2$, considere o sistema de equações lineares $A_2 u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ e determine as suas soluções (caso as haja).

....

<u>**Resolução**</u>:

(a) Por definição, a característica de A_μ, $\operatorname{car} A_\mu$, é o número de pivôs da matriz que se obtém de A_μ por eliminação de Gauss; Implementando-o para este caso concreto, usando a habitual convenção de notação, vem

$$A_\mu = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & \mu^2 \\ 2 & \mu+6 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \mu^2-4 \\ 0 & \mu+2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{P} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & \mu+2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu^2-4 \end{bmatrix},$$

em que

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tendo em conta que $\mu^2 - 4 = (\mu - 2)(\mu + 2)$, conclui-se que

$$\text{car}\, A_\mu = \begin{cases} 1 & , \text{ se } \mu = -2 \\ 2 & , \text{ se } \mu = 2 \\ 3 & , \text{ se } \mu \neq \pm 2 \end{cases} .$$

(b) Um dos métodos de cálculo de determinantes que vimos foi baseado no método eliminação de Gauss: O valor absoluto do determinante não é alterado por este, havendo apenas troca do sinal por cada troca de linhas efectuada ao longo do processo. Tendo em conta que no passo 2 trocámos as linhas 2 e 3, concluímos que:

$$\det A_\mu = -\det U_\mu = -(\mu + 2)(\mu^2 - 4) = -(\mu - 2)(\mu + 2)^2,$$

pois o determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos da diagonal principal.

(c) Uma vez que já implementámos a eliminação de Gauss para a matriz dos coeficientes, basta analisar como se altera o termo independente. Tem-se

$$c = PEb = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, a matriz aumentada do SEL considerado ($\mu = 2$) é transformada como se segue:

$$[A_2 \vdots b] \overset{PE}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 4 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} = [U_2 \vdots c].$$

Daqui resulta que o SEL é possível, pois as características das matrizes dos coeficientes e aumentada do SEL são iguais, que o sistema é indeterminado (havendo uma linha de zeros na matriz dos coeficientes, a terceira, a componente de ordem 3 do termo independente é nula), que não havendo pivô na terceira coluna a terceira incógnita é livre, e que as soluções $u = (x, y, z)$ do sistema com $z \in \mathbb{R}$, são tais que $y = 1/4$ e $x + 2y + 2z = 1$ (ou, o que é equivalente $x = -2z + 1/2$). Consequentemente, a solução geral do SEL considerado é

$$u = (-2z + 1/2, 1/4, z) = (1/2, 1/4, 0) + z(-2, 0, 1), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Exercício 11 *[2005/6 - 1° Teste - Problema 6 - LEEC]*

Considere a matriz $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ dada por $S = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 12 & 10 \end{bmatrix}$.

a) Use o método de Gauss-Jordan para mostrar que S é invertível e para obter a sua inversa.

b) Seja $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$ e suponha que S representa a matriz de mudança da base $\mathcal{B}$ para a base canónica de $\mathbb{R}^3$. Identifique a base $\mathcal{B}$ e determine as componentes do vector $x = (1, 2, 3)$ nesta base.

. . . .

<u>**Resolução**</u>:

a) Aplicamos o método de Gauss-Jordan à matriz aumentada $[S \,\vdots\, I]$, com a habitual convenção de notação: $X \xrightarrow{E} Y$ significa que $Y = EX$.

$$[S \,\vdots\, I] \quad = \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 12 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$(S \text{ invertível } \Leftarrow) \quad \xrightarrow{E_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 0 & -7 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{D^{-1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -1/2 \end{array}\right] = [I \,\vdots\, B]$$

No final da 1ª fase, que coincide com o final da eliminação de Gauss, conclui-se que S é não-singular (ou invertível), pois a matriz S deu origem a uma matriz triangular superior sem zeros na diagonal principal. No final do processo, tem-se $B = D^{-1}F_2F_3E_2E_1$ é tal que $BS = I$. Como B é invertível, por ser o produto de matrizes elementares cada uma delas invertível, conclui-se que é a inversa de S, $S^{-1} = B$.

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3/2 & -1/2 & 1/2 \\ -2 & 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

b) $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3) = ((-1, 3/2, -2), (2, -1/2, 1), (0, 1/2, -1/2))$

Justificação: Se S é a matriz de mudança da base $\mathcal{B}$ para a base canónica, então S^{-1} é a matriz de mudança da base canónica para a base $\mathcal{B}$ e, na coluna $j = 1, 2, 3$ desta matriz figuram as componentes do vector $v_j \in \mathcal{B}$ na base canónica.

Sendo y o vector coluna das componentes do vector $v = (1, 2, 3)$ na base $\mathcal{B}$ e $x = [1\ \ 2\ \ 3]^t$ então, por definição da matriz de mudança de base, é válida a relação $y = Sx$. Neste caso:

$$y = Sx = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 12 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 \\ -9 \\ 52 \end{bmatrix}$$

e, portanto,

$$v = (1, 2, 3) = -19\, v_1 - 9\, v_2 + 52\, v_3.$$

Exercício 12 *[2005/6 - 1° Teste - Problema 7 - LEEC]*

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e considere a matriz A_α dada por:

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ \alpha & 1 & -2 \\ 2 & 5 & \alpha \end{bmatrix}.$$

a) Calcule o determinante de A_α e indique todos os valores de α para os quais A_α é invertível.

b) Para $\alpha = 1$ indique a matriz dos cofactores de A_α, cof A_α, e use-a para determinar a inversa de A_α.

c) Para $\alpha = 2$ indique uma base para N_{A_α}, o núcleo ou espaço nulo de A_α.

....

Resolução:

a) Usando, por exemplo, a fórmula de Laplace por expansão segundo a 1ª linha, obtém-se:

$$\begin{aligned} \det A_\alpha &= (-1)(-1)\begin{vmatrix} \alpha & -2 \\ 2 & \alpha \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \alpha^2 + 4 - (5\alpha - 2) \\ &= \alpha^2 - 5\alpha + 6 = (\alpha - 2)(\alpha - 3) \end{aligned}$$

uma vez que as raízes do polinómio $\det A_\alpha$ são: 2 e 3. A condição necessária e suficiente de invertibilidade de A_α é $\det A_\alpha \neq 0$. Sendo assim, A_α é invertível se e só se α é um número real distinto de 2 e de 3, ou ainda, A_α é invertível se e só se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$.

b) Já vimos que para $\alpha = 1$ A_α é invertível. Usando a expressão que define os cofactores dos elementos de $A := A_1 = [a_{ij}]_{i,j=1}^3$, $a'_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$, em que A_{ij} é a matriz que se obtém de A eliminando a linha i e a coluna j, obtém-se

$$\text{cof}\, A = \begin{bmatrix} 11 & -5 & 3 \\ -4 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A inversa de A é dada por $A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\text{cof}\, A)^t$. Como $\det A = 2$, vem

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 11 & -4 & 3 \\ -5 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Para $\alpha = 2$ já vimos que a matriz A_2 é singular e, portanto, não invertível. Consequentemente, temos para o núcleo de A_2: $N_{A_2} \neq \{0\}$. Vamos usar o método de eliminação de Gauss para determinar as soluções da equação homogénea $A_2 u = 0$:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} \overset{P_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} \overset{E_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & -4 \end{bmatrix} \overset{E_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

Obtivemos como era expectável uma linha nula. Escrevendo $u = (x\ y\ z)$ e tomando como incógnita livre z (que corresponde à coluna sem pivô, a terceira) as soluções de $A_2 u = 0$ e de $Uu = 0$ coincidem e são da forma $u = z(3/2, -1, 1)$ com $z \in \mathbb{R}$. Consequentemente, o núcleo de A_2 é gerado por um vector, $(3/2, -1, 1)$, constituindo este uma base de N_{A_2}.

Exercício 13 *[2005/6 - 1° Exame - V1 - Problema 11 - LEEC]*

Considere a matriz $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ dada por $S = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Mostre que S é invertível e obtenha a sua inversa.

b) Suponha que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ é uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$ em que as componentes do vector v_j, $j = 1, 2, 3$, na base canónica constituem a linha j da matriz S^2. Identifique a base $\mathcal{B}$ e determine as componentes do vector $v = (1, 1, 1)$ nesta base.

....

<u>**Resolução**</u>:

a) S é invertível se e só se o seu determinante é diferente de zero. Sendo $\det S = 4$ a matriz S é invertível. Para determinar a inversa de S vamos usar a matriz dos cofactores de S, através da expressão:

$$S^{-1} = \frac{1}{\det S} (\operatorname{cof} S)^t.$$

Tem-se

$$\operatorname{cof} S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

e, portanto,

$$S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Alternativamente poder-se-ia ter usado outro processo quer para mostrar que S é invertível quer para determinar a sua inversa, por exemplo, o método de Gauss-Jordan.

b) Comecemos por identificar os vectores v_j, $j = 1, 2, 3$. Tem-se

$$S^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix},$$

pelo que

$$v_1 = (-1, -1, 3), \quad v_2 = (3, -1, -1) \quad v_3 = (-1, 3, -1).$$

A base pretendida é pois $\mathcal{B} = ((-1, -1, 3), (3, -1, -1), (-1, 3, -1))$.

Para determinar o vector $w = (\alpha, \beta, \gamma)$ das componentes do vector $v = (1, 1, 1)$ nesta base, ou seja $v = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$, resolvemos o sistema de equações:

$$(S^2)^t w = v \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

cuja solução é $\alpha = \beta = \gamma = 1$. Conclui-se assim que o vector v tem as mesmas componentes quer na base canónica quer na base $\mathcal{B}$.

Também aqui poder-se-ia ter usado outro processo para determinar o vector w, nomeadamente usando a matriz de mudança da base canónica para a base $\mathcal{B}$.

Exercício 14 *[2006/7 - 1° Teste - Problema 7 - MEC]*

1. Seja $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset \mathbb{R}^4$ com

$$v_1 = (1,1,2,3) \quad , \quad v_2 = (1,1,-2,-3) \quad , \quad v_3 = (1,1,4,6) \quad , \quad v_4 = (3,3,4,6) \quad .$$

   a) Indique a dimensão e determine uma base B do subespaço $L(S)$, o subespaço gerado por S;

   b) Mostre que o vector $u = (1,-1,0,0)$ não pertence a $L(S)$;

   c) Construa uma base de $\mathbb{R}^4$ que contém o conjunto B.

2. Sendo X uma matriz quadrada, representemos por cof X a matriz dos cofactores de X.

   Sejam A e B matrizes invertíveis da mesma ordem. Mostre que

$$\operatorname{cof}(AB) = \operatorname{cof} A \operatorname{cof} B \ .$$

....

Resolução:

1.a) Para saber qual o maior subconjunto de $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ que é linearmente independente em $\mathbb{R}^4$, consideramos, por exemplo, a matriz L cuja linha i contém as componentes do vector v_i, $1 = 1,2,3,4$, e consideramos o problema de obter uma base para o espaço das linhas desta matriz, o que pode ser feito aplicando a L o método de eliminação de Gauss:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U.$$

Como o método de eliminação de Gauss mantém invariante o espaço das linhas de uma matriz, conclui-se que o conjunto formado linhas 1 e 2 de U, o maior subconjunto das linhas de U linearmente independente, é uma base para o espaço das linhas de L. Assim, $\dim L(S) = 2$ e uma base B para o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por S é:

$$B = \{u_1, u_2\}, \quad u_1 = (1,1,2,3),\ u_2 = (0,0,-4,-6).$$

Alternativamente, podia indicar-se para B o conjunto das duas primeiras linhas de L, $B = \{v_1, v_2\}$, uma vez que este dá origem, por eliminação de Gauss, às linhas não nulas de U.

1.b) Pretende-se mostrar que $u = (1,-1,0,0) \notin L(B) = L(S)$. Para tal que basta mostrar que a característica da matriz cujas linhas contêm as componentes dos vectores u_1, u_2 e u é igual a 3, uma vez que já sabemos que a característica da submatriz formada pelas duas primeiras linhas é igual a 2, conclusão que se pode obter usando novamente eliminação de Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{P} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \end{bmatrix}.$$

Daqui se conclui que, efectivamente, a característica da matriz é igual a 3 e, portanto, que $u \notin L(B)$.

1.c) Para obter uma base de $\mathbb{R}^4$, basta considerar um conjunto linearmente independente formado por 4 elementos. Da alínea anterior decorre que o conjunto $B \cup \{u\}$, com 3 elementos, é linearmente independente em $\mathbb{R}^4$. Então para obter uma base de $\mathbb{R}^4$ que contém B basta acrescentar ao conjunto anterior mais um elemento, por forma que o conjunto resultante seja linearmente independente. Um elemento nestas condições é, por exemplo, $v = (0,0,0,1)$, uma vez que se acrescentarmos mais uma linha à matriz considerada na alínea anterior com as componentes deste vector, essa linha é invariante pela aplicação do método de eliminação de Gauss e, portanto, a característica dessa matriz é igual a 4. Tal significa que o conjunto $B \cup \{u, v\}$ é linearmente independente e, portanto, é uma base de $\mathbb{R}^4$ que contém B.

2. Sendo A e B matrizes invertíveis da mesma ordem, a prova da igualdade $\operatorname{cof}(AB) = \operatorname{cof} A \operatorname{cof} B$ pode ser feita com base nas seguintes propriedades bem conhecidas, válidas para quaisquer duas matrizes invertíveis da mesma ordem:

$$(1)\ \det(XY) = \det X \det Y \neq 0, \quad (2)\ (XY)^t = Y^t X^t,$$
$$(3)\ (XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1}, \quad (4)\ X^{-1} = \frac{1}{\det X}(\operatorname{cof} X)^t.$$

Efectivamente, usando (4) tem-se

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{\det(AB)}[\operatorname{cof}(AB)]^t\ .$$

Por outro lado, usando sucessivamente (3), (4), (2) e (1), obtém-se

$$\begin{aligned}(AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{\det A \det B}(\operatorname{cof} B)^t\ (\operatorname{cof} A)^t \\ &= \frac{1}{\det(AB)}(\operatorname{cof} A \operatorname{cof} B)^t\end{aligned}$$

Comparando as expressões obtidas, concluímos que

$$[\operatorname{cof}(AB)]^t = (\operatorname{cof} A \operatorname{cof} B)^t$$

e, portanto, por transposição, obtém-se o resultado pretendido:

$$\operatorname{cof}(AB) = \operatorname{cof} A \operatorname{cof} B.$$

Exercício 15 *[2007/8 - 1º Teste - Problema 6 - MEC]*

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = BA.$$

1. Mostre que A é invertível, determine a sua inversa e resolva a equação $Au = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

2. Identifique o núcleo da matriz B.

3. Sem efectuar mais cálculos, indique uma base para o núcleo da matriz C.

....

Resolução:

1. Para estabelecer o resultado podemos usar um dos dois processos abaixo indicados.

1º Processo - Aplicamos o método de Gauss-Jordan à matriz aumentada $[A \vdots I]$, com a habitual convenção de notação: $X \xrightarrow{E} Y$ significa que $Y = EX$. Tem-se

$$[A \vdots I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$(A \text{ é invertível } \Leftarrow) \quad \xrightarrow{E_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 & 1/2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 & 1/2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{D^{-1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -2 \end{array}\right] = [I \vdots B]$$

em que

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

No final da 1ª fase, que coincide com o final da eliminação de Gauss, conclui-se que A é não-singular (ou invertível), pois a matriz A deu origem a uma matriz triangular superior sem zeros na diagonal principal. No final do processo, tem-se $B = D^{-1}F_3E_2E_1$ é tal que $BA = I$. Como B é invertível, por ser o produto de matrizes elementares cada uma delas invertível, conclui-se que é a inversa de A,

$$A^{-1} = B = \begin{bmatrix} -5 & -3 & -6 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

2º Processo - Como se sabe, é condição necessária e suficiente para que A seja invertível que o seu determinante seja diferente de zero. Ora,

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 5 - 3 \times 2 = -1,$$

pelo que A é invertível. Para calcular a sua inversa podemos recorrer à matriz dos cofactores,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} [\mathrm{cof}\, A]^t.$$

Neste caso $\mathrm{cof}\, A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Consequentemente

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & -3 & -6 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Para concluir falta apenas resolver a equação $Au = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, que, como A é invertível, tem uma única solução dada por

$$u = A^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. O método de eliminação de Gauss mantém invariante o núcleo de uma matriz. Aplicando a eliminação de Gauss a B, obtém-se

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

As soluções de $Uu = 0$ são da forma $u = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ com $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrário. Consequentemente,

$$N_B = \{u \in \mathbb{R}^3 : Bu = 0\} = \{u \in \mathbb{R}^3 : Uu = 0\} = \{\alpha(-1, 1, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\} = L(\{(-1, 1, 0)\}).$$

3. Usando a invertibilidade de A, o conhecimento que temos do núcleo de B e da solução de $Au = [-1\ 1\ 0]^t$, podemos estabelecer as equivalências seguintes:

$$u \in N_C \Leftrightarrow BAu = 0 \Leftrightarrow v = Au \wedge Bv = 0 \Leftrightarrow u = A^{-1}v \wedge v \in N_B \Leftrightarrow u = \alpha A^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

em que $\alpha \in \mathbb{R}$. Logo, uma base para o núcleo de C é $\{(2, 0, 1)\}$.

Exercício 16 *[2007/8 - 1° Teste - Problema 7 - MEC]*

1. Seja $R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Determine

   a) uma base para o espaço das colunas de R,

   b) uma base para o núcleo de R.

   c) Sem efectuar mais cálculos, diga se é possível existir uma matriz S tal que RS é invertível.

2. Designe por $\mathcal{S}$ o subespaço de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ gerado pelas quatro matrizes seguintes:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

   a) Qual é a dimensão de $\mathcal{S}$?

   b) Sendo $M = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -10 & 1 \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, mostre que $M \in \mathcal{S}$ e que $N \notin \mathcal{S}$.

....

Resolução:

1. O método de eliminação de Gauss permite obter quer uma base para o espaço das colunas quer uma base para o núcleo de uma matriz: uma base para o espaço das colunas de R é formada pelas p colunas de R (em que p é o número de pivôs) que dão origem (i.e. da mesma ordem) por eliminação de Gauss às colunas com pivô; uma base para o núcleo de R é formada pelo dos r vectores (em que r é o número de incógnitas livres ou o número de colunas sem pivô) que se obtêm dando, sucessivamente, a cada uma das incógnitas livres o valor 1, o valor zero às restantes e determinando as outras componentes por forma a que o vector resultante pertença ao núcleo da matriz.

Apliquemos então a R a eliminação de Gauss:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U.$$

1-a) Como os pivôs figuram nas duas primeiras colunas de U, uma base $\mathcal{B}_{C_R}$ para o espaço das colunas é o conjunto formado pelas duas primeiras colunas de R,

$$\mathcal{B}_{C_R} = \{(1,-1,2,1),(2,0,-1,1)\}.$$

1-b) As soluções de $Ru = 0$ são da forma

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2u_2 - 3u_3 - 4u_4 \\ -u_3 - u_4 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_3 - 2u_4 \\ -u_3 - u_4 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = u_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u_4 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad u_3, u_4 \in \mathbb{R}.$$

Consequentemente, uma base $\mathcal{B}_{N_R}$ para o núcleo de R é

$$\mathcal{B}_{N_R} = \{(-1,-1,1,0),(-2,-1,0,1)\}.$$

1-c) Da eliminação de Gauss aplicada a R conclui-se, em particular, que R é singular, ou seja, que $\det R = 0$. Como, para qualquer matriz S de ordem 4 se tem $\det(RS) = \det R \det S$, conclui-se que $\det(RS) = 0$. Por outro lado, se existisse S tal que RS fosse invertível, S seria uma matriz de ordem 4 e $\det(RS) \neq 0$ (uma matriz é invertível se e só se o seu determinante não se anula). Estabelecemos assim uma contradição e, consequentemente, não é possível existir uma matriz S tal que RS seja invertível.

2. Comecemos por notar que, considerando em $\mathbb{R}^{2\times 2}$ a base canónica, as componentes de A_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ em relação a esta base constituem a coluna j da matriz R da alínea anterior. Consequentemente, um subconjunto das matrizes dadas é linearmente independente se e só se o correspondente conjunto das colunas de R for linearmente independente em $\mathbb{R}^4$. Do mesmo modo, um subconjunto das matrizes dadas gera $\mathcal{S}$ se e só se o correspondente conjunto das colunas de R gera o espaço das colunas desta matriz.

2-a) Assim, a dimensão de $\mathcal{S}$ coincide com a dimensão do espaço das colunas de R, sendo

$$\dim \mathcal{S} = 2,$$

pois, como vimos em 1, o espaço das colunas de R tem uma base constituída por 2 elementos.

2-b) Resulta do que se disse atrás, que uma matriz $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ pertence a $\mathcal{S}$ se e só se o vector $x \in \mathbb{R}^4$ das suas componentes relativamente à base canónica pertence ao espaço das colunas de R. Assim, basta mostrar que $m = [5\,3\,-10\,1]^t \in C_R$ e que $n = [1\,0\,2\,0]^t \notin C_R$, o que pode ser feito usando os passos da eliminação de Gauss considerados em 1. Tem-se

$$\tilde{m} = E_2E_1m = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in C_U, \quad \tilde{n} = E_2E_1n = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \notin C_U,$$

pelo que $m \in C_R$ e $n \notin C_R$. Consequentemente, $M \in \mathcal{S}$ e $N \notin \mathcal{S}$. Alternativamente, poderia ter-se usado a relação

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -10 & 1 \end{bmatrix} = -3\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = -3A_1 + 4A_2$$

para mostrar que $M \in \mathcal{S} = L(\{A_1, A_2\})$, e poderia usar-se o facto de de que não existe nenhum par $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \alpha_1\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_2\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \alpha_1A_1 + \alpha_2A_2,$$

para mostrar que $N \notin \mathcal{S} = L(\{A_1, A_2\})$.

Exercício 17 *[2007/8 - 1° Exame - V1 - Problema 11 - MEC]*

Usando a habitual convenção de escrever os elementos de $\mathbb{R}^n$ na forma de vectores coluna, considere um sistema de equações na forma matricial $Au = b$, em que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

1. Obtenha uma base para N_A, o núcleo da matriz A;

2. Mostre que o vector $u = (5, -2, 1, 2, -3)$ pertence a N_A e indique as suas componentes em relação à base que indicou em 1.;

3. Escolha da lista seguinte um vector b para o qual o sistema $Au = b$ seja possível e determine o conjunto das soluções deste sistema.

   (a) b=(2,3,2), (b) b=(2,3,1), (c) b=(1,0,2), (d) b=(1,1,2).

....

Resolução:

1. Para caracterizar o núcleo de A, $N_A = \{u \in \mathbb{R}^5 : Au = 0\}$, usamos o método de eliminação de Gauss:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

Daqui se conclui que o núcleo de A tem dimensão 3 (o número de incógnitas livres ou o número de colunas de U sem pivô). As soluções de $Au = 0$, que são as mesmas de $Uu = 0$, são da forma

$$u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2z - w - 3t \\ -w \\ z \\ w \\ t \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad z, w, t \in \mathbb{R}.$$

Consequentemente, o conjunto

$$\{(-2, 0, 1, 0, 0), (-1, -1, 0, 1, 0), (-3, 0, 0, 0, 1)\}$$

gera o núcleo de A e, tratando-se claramente de um conjunto linearmente independente, constitui uma base para aquele subespaço de $\mathbb{R}^5$.

2. Tendo em conta o significado de cada um dos vectores que constituem a base do núcleo de A indicada na alínea anterior, basta notar que as 3 últimas componentes do vector $u = (5, -2, 1, 2, -3)$ permitem imediatamente identificar as componentes pretendidas, visto que

$$(5, -2, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \textbf{-3}) = \mathbf{1}\ (-2, 0, 1, 0, 0) + \mathbf{2}\ (-1, -1, 0, 1, 0)\,\textbf{-3}\ (-3, 0, 0, 0, 1).$$

Daqui resulta não só que $(5, -2, 1, 2, -3)$ pertence a N_A mas também que o vector $(1, 2, -3)$ é o vector das componentes de u em relação à base indicada na alínea anterior, considerada como base ordenada (com a ordem aí atribuída).

3. O método de elinação de Gauss usado na primeira alínea permite identificar uma base para o espaço das colunas de A, C_A, sendo esta constituída pelas 2 primeiras colunas de A (aquelas que dão origem às colunas de U com pivô). Os vectores b para os quais $Au = b$ tem solução são aqueles que pertencem ao espaço das coluna de A. Os vectores indicados em (b) e (c) pertencem a C_A, já que

$$(2, 3, 1) = (1, 1, 1) + (1, 2, 0), \quad (1, 0, 2) = 2(1, 1, 1) - (1, 2, 0),$$

enquanto que os vectores indicados em (a) e (d) não pertencem a C_A, visto que os sistemas

$$(2, 3, 2) = \alpha(1, 1, 1) + \beta(1, 2, 0), \quad (1, 1, 2) = \alpha(1, 1, 1) + \beta(1, 2, 0)$$

são impossíveis.

Como se sabe o conjunto $\mathcal{S}$ das soluções de $Au = b$ para $b \in C_A$ é da forma

$$\mathcal{S} = \{u_p\} + N_A,$$

em que u_p é uma solução particular e N_A é o núcleo de A. Como vimos,

$$N_A = L(\{(-2,0,1,0,0),(-1,-1,0,1,0),(-3,0,0,0,1)\})$$

e podemos (por exemplo) tomar

$$u_p = (1,1,0,0,0) \text{ se } b = (2,3,1), \quad u_p = (2,-1,0,0,0) \text{ se } b = (1,0,2)$$

que são as soluções particulares que se obtêm em cada um dos casos dando às incógnitas livres o valor 0 (estas podem obter-se através de $Uu = E_2E_1b$).

Exercício 18 *[2008/9 - 1° Teste - Problema 8 - LEIC]*

Seja

$$S = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z - w = 0\}.$$

a) Mostre que S é um subespaço de $\mathbb{R}^4$, calcule a sua dimensão e indique uma base de S; Designe essa base por $\mathcal{B}_S$.

b) Escolha uma base ordenada $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ que contenha $\mathcal{B}_S$.

c) Como se representa na base canónica o elemento de $\mathbb{R}^4$ cujo vector das componentes na base $\mathcal{B}$ (que indicou na alínea anterior) é (1,2,3,4)?

....

Resolução:

a) Para mostrar que S é um subespaço de $\mathbb{R}^4$ basta mostrar que são fechadas em S as operações de adição e de multiplicação de escalares por elementos de S. Sejam então $u = (x,y,z,w)$ e $\tilde{u} = (\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z},\tilde{w})$ elementos arbitrários de S e $\alpha \in \mathbb{R}$. Tem-se

$$u + \tilde{u} = (x+\tilde{x}, y+\tilde{y}, z+\tilde{z}, w+\tilde{w}), \quad \alpha u = (\alpha x, \alpha y, \alpha z, \alpha w)$$

e

$$x + \tilde{x} - (y+\tilde{y}) + z + \tilde{z} - (w+\tilde{w}) = (x - y + z - w) + (\tilde{x} - \tilde{y} + \tilde{z} - \tilde{w}) = 0,$$
$$\alpha x - \alpha y + \alpha z - \alpha w = \alpha(x - y + z - w) = 0,$$

pelo $u + \tilde{u} \in S$ e $\alpha u \in S$. Consequentemente, aquelas operações são fechadas.

A equação que caracteriza os elementos $(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$ pertencentes ao plano é

$$x - y + z - w = 0,$$

que, usando a convenção habitual de escrever os vectores na forma de vectores coluna, pode ser escrita na forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = 0.$$

Assim, o plano S coincide com o núcleo da matriz linha $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$: $S = N_A$. Neste caso temos três incógnitas livres: y, z e w (as que correspondem na ordem às colunas de A sem pivô) e, portanto, $\dim S = \dim N_A = 3$. Para obter uma base de S, $\mathcal{B}_S = \{s_1, s_2, s_3\}$, basta determinar os vectores s_j que se obtêm dando a cada uma das incognitas livres o valor 1, às restantes incógnitas livres o valor 0 e determinando a primeira componente por forma que $s_j \in N_A$, obtendo-se:

$$s_1 = (1,1,0,0), \quad s_2 = (-1,0,1,0), \quad s_3 = (1,0,0,1).$$

Assim, uma base de S é o conjunto,

$$B_S = \{(1,1,0,0), (-1,0,1,0), (1,0,0,1)\}.$$

b) Como sabemos qualquer base de $\mathbb{R}^4$ é constituída por 4 elementos. Também sabemos que qualquer conjunto linearmente independente em $\mathbb{R}^4$, em particular $\mathcal{B}_S$ (a base de S determinada anteriormente) com 3 elementos, é um subconjunto de uma base de $\mathbb{R}^4$. Consequentemente, para obter uma base de $\mathbb{R}^4$ que contém $\mathcal{B}_S$ basta juntar a $\mathcal{B}_S$ um vector $s_4 = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \setminus S$. Ora, os vectores que satisfazem esta condição são aqueles para os quais

$$x - y + z - w \neq 0.$$

Sendo assim, por exemplo, o vector

$$s_4 = (1,0,0,0)$$

serve. Uma base ordenada de $\mathbb{R}^4$ que satisfaz os requesitos é

$$\mathcal{B} = (s_4, s_1, s_2, s_3) = ((1,0,0,0), (1,1,0,0), (-1,0,1,0), (1,0,0,1)).$$

c) Designando por $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ a base canónica de $\mathbb{R}^4$, pretende-se saber qual o vector $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ das componentes na base canónica do elemento $v \in \mathbb{R}^4$ cujo vector $y = (1,2,3,4)$ é o vector das componentes de v na base $\mathcal{B}$, já que $v = (1,2,3,4)_{\mathcal{B}}$. Como se sabe x e y, quando escritos como vectores coluna, estão relacionados por $x = Uy$, em que U, a matriz de mudança da base $\mathcal{B}_c$ para a base $\mathcal{B}$, é dada por

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

O vector v na base canónica é pois

$$(4,2,3,4).$$

Alternativamente, este vector podia ser determinado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3, x_4) &= s_4 + 2s_1 + 3s_2 + 4s_3 \\ &= (1,0,0,0) + 2(1,1,0,0) + 3(-1,0,1,0) + 4(1,0,0,1) \\ &= (1 + 2 - 3 + 4, 2, 3, 4) = (4,2,3,4). \end{aligned}$$

Exercício 19 *[2009/10 - 1° Teste - Problema 7 - MEC]*

Seja S o subconjunto de $\mathbb{R}^4$ formado pelos seguintes quatro vectores

$$v_1 = (1,1,2,3), \quad v_2 = (0,1,2,2), \quad v_3 = (2,-1,-1,0), \quad v_4 = (3,1,2,5).$$

1. Indique um subconjunto U de S, com três elementos, tal que

a) U é linearmente independente;

b) U é linearmente dependente.

2. Indique uma base para $L(S)$ — o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por S — e determine as componentes do vector $v_1 + v_2 - v_4$ nessa base.

3. Representando por A a matriz 4×4 cuja coluna j (j=1,2,3,4) é constituída pelas componentes (na base canónica) do vector v_j, determine uma base de N_A — o núcleo ou espaço nulo de A — e resolva a equação

$$Au = b, \quad b = v_1 + v_2 - v_4.$$

....

<u>**Resolução**</u>:

1. Como sabemos para analisar a dependência ou indepenência linear de um conjunto de vectores em $\mathbb{R}^4$ podemos fazê-lo dispondo as componentes desses vectores (na base canónica) nas colunas (ou nas linhas) de uma matriz e analisar a dependência ou independência linear dos conjuntos dessas colunas (ou linhas). O método de eliminação de Gauss fornece um critério para essa análise. No presente caso, optando pela representação por colunas temos:

$$A = [v_1 v_2 v_3 v_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -5 & -4 \\ 0 & 2 & -6 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [z_1 z_2 z_3 z_4] = Z$$

São linearmente independentes as colunas de Z que contêm os pivôs da eliminação de Gauss. Neste caso, o conjunto formado pelas 3 primeiras colunas de Z é linearmente independente. O conjunto das quatro colunas de Z é linearmente dependente, uma vez que a quarta coluna não contém pivô. Efectivamente, a quarta coluna é uma combinação linear das duas primeiras. $z_4 = 3z_1 - 2z_2$.

Relativamente à matriz original, o conjunto das 3 primeiras colunas é linearmente independente, por corresponderem (na ordem) às colunas de U com pivô. O conjunto das quatro colunas de A é linearmente dependente. Efectivamente, a quarta coluna,v_4, é tal que $v_4 = 3v_1 - 2v_2$.

Resulta desta análise que

a) Um subconconjunto U de S, com três elementos, linearmente independente é o conjunto $U = \{v_1, v_2, v_3\}$.

b) Um subconconjunto U de S, com três elementos, linearmente dependente é o conjunto $U = \{v_1, v_2, v_4\}$.

2. Uma base para o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por S é o conjunto formado pelo maior subconjunto das colunas da matriz A que é linearmente independente, que, de acordo com as conclusões da alínea anterior, é o conjuntos das 3 primeiras colunas. Assim, uma base ordenada de $L(S)$ é

$$\mathcal{B}_{L(S)} = (v_1, v_2, v_3).$$

Pretende-se agora representar na base anterior o vector $v = v_1 + v_2 - v_4$. Como mencionámos na alínea anterior, o vector v_4 é tal que $v_4 = 3v_1 - 2v_2$. Consequentemente, $v = v_1 + v_2 - (3v_1 - 2v_2) = -2v_1 + 3v_2$ e, portanto, $v = (-2, 3, 0)_{\mathcal{B}_{L(S)}}$. Assim $(-2, 3, 0) \in \mathbb{R}^3$ é o vector das componentes de v na base $\mathcal{B}_{L(S)}$.

3. Dada a circunstância de na alínea 1 já termos procedido à eliminação de Gauss para a matriz A e tendo em conta que o método de eliminação de Gauss não altera o núcleo de uma matriz, i.e. $N_A = N_Z$ (em que Z é a matriz definida em 1, que se obtém de A por eliminação de Gauss) podemos determinar imediatamente os vectores $u_h = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in N_A$, sendo que u_4 é a incógnita livre (pois corresponde na ordem à coluna sem pivô):

$u_3 = 0; \quad u_2 = 2u_4; \quad u_1 = -3u_4.$

Consequentemente $u_h = u_4(-3, 2, 0, 1)$, $u_4 \in \mathbb{R}$ e, portanto, $N_A = L\{(-3, 2, 0, 1)\}$.

Uma vez que o segundo membro da equação a resolver $Au = b$ é uma combinação linear das colunas de A, pois

$$b = 1.v_1 + 1.v_2 + 0.v_3 - 1.v_4,$$

uma solução particular daquela equação é pois o vector

$$u_p = (1, 1, 0, -1).$$

Como se sabe a solução geral u daquela equação é da forma:

$$u = u_p + u_h.$$

Assim, o conjunto das soluções de $Au = b$ é dado por

$$\{u \in \mathbb{R}^4 : u = (1, 1, 0, -1) + u_4(-3, 2, 0, 1), u_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Exercício 20 *[2009/10 - 1º Exame - Problema 11 - MEC]*

Considere as seguintes matrizes de $\mathbb{R}^{3\times 3}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & -1 \end{bmatrix}.$$

1. (a) Calcule $\det A$; (b) mostre que A é invertível e, posteriormente, (c) calcule a inversa de A.
2. Indique bases para o espaço das linhas, para o espaço das colunas e para o núcleo da matriz B.
3. Verifique que a equação

$$BAu = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

é possível e determine todas as soluções desta equação.

....

Resolução:

1. a) Podemos usar vários métodos para o cálculo do determinante A, por exemplo, a eliminação de Gauss e a regra de Laplace. Dada a circunstância de haver um elemento nulo (linha 3, coluna 2), optou-se pela regra de Laplace, por expansão segundo a terceira linha, obtendo-se:

$$\det A = a'_{31} + 2a'_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 + 2(1-2) = -3,$$

em que se usou a notação habitual de representar por a'_{ij} o cofactor de a_{ij}, sendo $A = [a_{ij}]$.

b) Uma matriz é invertível se e só se o seu determinante é diferente de zero. Ora, resulta da alínea anterior que $\det A = -2 \neq 0$, pelo que A é invertível.

c) Também aqui temos várias alternativas: O método de Gauss-Jordan ou usar a matriz dos cofactores, através da expressão

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\operatorname{cof} A)^t.$$

Optando por esta última via e notando que dois dos cofactores já foram determinados em a), temos:

$$a'_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2, \qquad a'_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1, \qquad a'_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

$$a'_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4, \qquad a'_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1, \qquad a'_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2,$$

$$a'_{31} = -1, \qquad a'_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \qquad a'_{33} = -1,$$

pelo que

$$\operatorname{cof} A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad A^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -4 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. O método de eliminação de Gauss permite-nos obter as bases pretendidas como se segue:

$$B \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -9 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U.$$

- O maior subconjunto das linhas de B linearmente independente é formado pelas linhas de B que dão origem às linhas de U com pivô. Consequentemente, uma base $\mathcal{B}_L$ para L_B (o espaço das linhas de B) é o conjunto

$$\mathcal{B}_L = \{(1,2,1),(1,-1,0)\}.$$

Alternativamente, como o método de eliminação de Gauss mantém invariante o espaço das linhas de uma matriz, poder-se-ia indicar como base o conjunto

$$\widetilde{\mathcal{B}}_L = \{(1,2,1),(0,-3,-1)\}.$$

- O maior subconjunto das colunas de B linearmente independente é formado pelas colunas de B que correspondem (na ordem) às colunas de U com pivô. Assim, uma base $\mathcal{B}_C$ para o espaço das colunas de B é o conjunto

$$\mathcal{B}_C = \{(1,1,2),(2,-1,-5)\}.$$

- Finalmente, como as equações $Bu = 0$ e $Uu = 0$ são equivalentes, tem-se

$$N_B = N_U = L(\{(-1,-1,3)\})$$

e, portanto, uma base para o núcleo de B é $\{(-1,-1,3)\}$.

3. Sendo $b = (2,1,1)$ escrito como vector coluna, a equação $BAu = b$ é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} Au = v \\ Bv = b \end{cases}.$$

Como A é invertível, a primeira destas equações é incondicionalmente solúvel e, o sistema anterior é equivalente ao seguinte

$$\begin{cases} u = A^{-1}v \\ Bv = b \end{cases}.$$

Assim, a equação original é possível se e só se o for a equação $Bv = b$ e, no caso afirmativo, as soluções u da equação original são da forma $u = A^{-1}v$ em que v é solução de $Bv = b$. Ora, como

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

em que os vectores no segundo membro são a primeira e terceira colunas de B, b pertence ao espaço das colunas de B e, portanto, a equação $Bv = b$ é possível. As suas soluções são dadas por

$$u = (1,0,1) + u_h \text{ com } u_h \text{ tal que } Bu_h = 0.$$

Tendo identificado o núcleo de B na alínea anterior, então

$$u = (1,0,1) + \alpha(-1,-1,3) = (1-\alpha, -\alpha, 1+3\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Exercício 21 *[2009/10 - 1º Exame - Problema 12 - MEC]*

1. Sejam
$$v_1 = (1,2,3), \quad v_2 = (1,1,1), \quad v_3 = (1,0,2).$$
   a) Mostre que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ é uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$.
   b) Determine o vector $y \in \mathbb{R}^3$ das componentes do vector $x = (1,1,2)$ na base $\mathcal{B}$.

2. Considere a matriz de permutação
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
a seja $\mathcal{S}$ o subconjunto de $\mathbb{R}^{3\times 3}$ formado pelas matrizes A tais que
$$PA = AP.$$
Mostre que $\mathcal{S}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^{3\times 3}$ e indique uma base para $\mathcal{S}$, bem como a sua dimensão.

....

__Resolução__:

1. a) Uma base de $\mathbb{R}^3$ é um conjunto linearmente independente e que gera $\mathbb{R}^3$. Como $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ e qualquer conjunto linearmente independente é um subconjunto de uma base, qualquer conjunto linearmente independente com 3 elementos é uma base de $\mathbb{R}^3$. Basta pois ver se $\mathcal{B}$ é linearmente independente, para o que se pode usar o método e eliminação de Gauss aplicado à matriz que tem nas colunas (alternativamente, as linhas) as componentes de $\mathcal{B}$:
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = U,$$
em que
$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$
Daqui se conclui que as colunas de $\mathcal{B}$ formam um conjunto linearmente independente, pois U não tem zeros na diagonal principal.

b) Representando os elementos de $\mathbb{R}^3$ como vectores coluna, o vector $y = (y_1, y_2, y_3)$ das componentes de x na base $\mathcal{B}$ é a solução da equação
$$By = x \quad \big(y = B^{-1}x\big)$$
em que B é a matriz de mudança da base canónica para a base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ e foi escrita na alínea anterior. Como $E_2E_1B = U$, a equação anterior ´é equivalente a
$$Uy = E_2E_1x \quad \Leftrightarrow \quad Uy = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
cuja solução é fácil de obter, pois U é triangular superior, vindo
$$y = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Consequentemente $x = (1,1,2) = (1/3,1/3,1/3)_{\mathcal{B}}$, ou seja $y = (1/3,1/3,1/3)$.

2. Começemos por mostrar que $\mathcal{S}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$. Para tal basta mostrar que as operações de adição e multiplicação de escalares por matrizes são fechadas em $\mathcal{B}$. Sendo$A, \widetilde{A} \in \mathcal{B}$ e, portanto $PA = AP$ e $P\widetilde{A} = \widetilde{A}P$, e $\alpha \in \mathbb{R}$, das propriedades das operações com matrizes resulta que

$$P(A+\widetilde{A}) = PA + P\widetilde{A} = AP + \widetilde{A}P = (A+\widetilde{A})P, \quad P(\alpha A) = \alpha(PA) = (\alpha A)P$$

pelo que aquelas operações são fechadas em $\mathcal{S}$.

Escrevendo um elemento genérico A de $\mathbb{R}^3$ na forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

tem-se

$$PA = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad AP = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

Consequentemente

$$PA = AP \quad \Leftrightarrow \quad a_{12} = a_{13}, a_{21} = a_{31}, a_{22} = a_{33}, a_{23} = a_{32}.$$

Daqui resulta que $A \in \mathcal{S}$ se e só se

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}E_{11} + a_{12}(E_{12}+E_{13}) + a_{21}(E_{21}+E_{31}) + a_{22}(E_{22}+E_{33}) + a_{23}(E_{23}+E_{32})$$

em que os escalares indicados são arbitrários e E_{ij} representam os elementos da base canónica de $\mathbb{R}^3$, caracterizados por terem todos os elementos nulos à excepção do elemento de ordem ij que tem o valor 1. Como o conjunto

$$\{E_{11}, E_{12}+E_{13}, E_{21}+E_{31}, E_{22}+E_{33}, E_{23}+E_{32}\}$$

é claramente linearmente independente (efectivamente, se na expressão acima fizermos $A = 0$, vem $a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = a_{23} = 0$), segue-se que este conjunto é uma base de $\mathcal{S}$, pelo que

$$\dim \mathcal{S} = 5.$$

Exercício 22 *[2010/11 - Exame - V1 - Problema 6 - MEEC]*

Usando a habitual convenção de escrever os elementos de $\mathbb{R}^4$ na forma de vectores coluna, considere um sistema de equações na forma matricial $Au = b$, em que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & -7 & 7 \end{bmatrix}.$$

a) Obtenha uma base para N_A, o núcleo da matriz A;

b) Mostre que o vector $u = (-5,2,2,1)$ pertence a N_A e indique as suas componentes em relação à base que indicou em a);

c) Escolha da lista seguinte um vector b para o qual o sistema $Au = b$ seja possível e determine o conjunto das soluções deste sistema.

(A) b=(3,1,0,7), (B) b=(3,1,0,-7), (C) b=(3,1,1,-7), (D) b=(1,-1,-4,5).

. . . .

Resolução:

a) Por definição N_A, o núcleo de A, é formados pelos vectores $u = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ tais que $Au = 0$. Para resolver este sistema de equações podemos usar o método de eliminação de Gauss: com a habitual convenção de notação: $X \xrightarrow{E} Y$ significa que $Y = EX$, temos

$$A \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & -7 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & -6 & 9 & -6 \\ 0 & 4 & -6 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

em que

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Daqui se conclui que há apenas dos pivôs, havendo duas incógnitas livres, a terceira e a quarta (respectivamente, z e w). Consequentemente, $\dim N_A = 2$. Como os sistemas $Au = 0$ e $Uu = 0$ são equivalentes, qualquer solução u das equações anteriores é tal que

$$\begin{cases} -2y + 3z - 2w = 0 \\ x + 2y - z + 3w = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3/2z - w \\ x = -2z - w \end{cases}$$

com $z, w \in \mathbb{R}$. Para obter dois vectores que constituem uma base de N_A procedemos do seguinte modo: o primeiro, u_1, obtém-se tomando $z = 1$ e $w = 0$ e determinando as duas primeiras componentes do sistema anterior, vindo $u_1 = (-2, 3/2, 1, 0)$.; o segundo, u_2, obtém-se tomando $z = 0$ e $w = 1$ e determinando as duas primeiras componentes do sistema anterior, vindo $u_2 = (-1, -1, 0, 1)$. Uma base de N_A é pois

$$\{u_1, u_2\} = \{(-2, 3/2, 1, 0), (-1, -1, 0, 1)\}.$$

b) Para mostrar que $u = (-5, 2, 2, 1)$ pertence a N_A basta mostra que $Au = 0$. Efectivamente, tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & -7 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(-5) + 2(2) - 1(2) + 3(1) \\ 1(-5) + 0(2) + 2(2) + 1(1) \\ 2(-5) - 2(2) + 7(2) + 0(1) \\ 1(-5) + 6(2) - 7(2) + 7(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para obter o vector (α, β) das componentes de u na base ordenada (u_1, u_2) de N_A, resolvemos o sistema de equações

$$\alpha u_1 + \beta u_2 = u \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3/2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

cuja solução é

$$(\alpha, \beta) = (2, 1).$$

Assim,

$$u = 2u_1 + u_2 \quad \Leftrightarrow \quad (-5, 2, 2, 1) = 2(-2, 3/2, 1, 0) + (-1, -1, 0, 1)$$

c) Para saber para quais dos vectores b dados a equação $Au = b$ tem solução ou, o que é equivalente, quais dos vectores b dados pertencem à imagem (ou espaço das colunas) da matriz A, dispomo-los nas coluna de uma matriz e usamos os mesmo passos da eliminação de Gauss que para a matriz A.

Aqueles que tiverem a terceira e quartas componentes nulas pertencem à imagem de A os outros não. Temos

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 7 & -7 & -7 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_1} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ -6 & -6 & -5 & -6 \\ 4 & -10 & -10 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_2} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -14 & 0 \end{bmatrix},$$

pelo que apenas os vectores dados em (A) e (D) pertencem ao espaço das colunas de A. Escolhendo, por exemplo, (A) ou seja $b = (3, 1, 0, 7)$, como já temos a eliminação de Gauss para a matriz aumentada $[A|b]$, cujo resultado é $[U|c]$, com $c = (3, -2, 0, 0)$, as soluções $u = (x, y, z, w)$ são tais que

$$\left\{ \begin{array}{l} -2y + 3z - 2w = -2 \\ x + 2y - z + 3w = 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 1 + 3/2z - w \\ x = 1 - 2z + 5w \end{array} \right.$$

Como se sabe qualquer solução deste sistema é da forma

$$u = u_p + zu_1 + wu_2,$$

em que u_p é uma solução particular, por exemplo, a que se obtém do sistema anterior com $z = w = 0$,

$$u_p = (1, 1, 0, 0),$$

e (u_1, u_2) é a base de N_A determinada na alínea a). Consequentemente, qualquer solução de $Au = b$ é da forma

$$u = (1, 1, 0, 0) + z(-2, 3/2, 1, 0) + w(-1, -1, 0, 1), \quad z, w \in \mathbb{R}.$$

Exercício 23 *[2012/13 - Exame - V1 - Problema 6 - LEGM, MEC]*

Considere a matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ definida por

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & -5 \end{bmatrix}.$$

Determine:

a) A matriz dos cofactores de A; use-a para obter o determinante de A, pela regra de Laplace;

b) Bases para os subespaços N_A, L_A e C_A de $\mathbb{R}^3$, respectivamente, o núcleo, o espaço das linhas e o espaço das colunas de A, indicando também as respectivas dimensões;

c) Uma base ordenada $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ com as seguintes características: o primeiro e o segundo elementos de $\mathcal{B}$ pertencem a N_A e a C_A, respectivamente; represente o vector $(2,-1,2)$ nesta base.

. . . .

Resolução:

a) Usando a notação habitual: $\operatorname{cof} A = [a'_{ij}]$, com $a'_{ij} = (-1)^{i+j}\det A_{ij}$, em que a matriz A_{ij} se obtém de A eliminando a linha i e a coluna j, neste caso temos:

$$\begin{array}{lll} a'_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = -3, & a'_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = 6, & a'_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -3, \\ a'_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = 1, & a'_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = -2, & a'_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 1, \\ a'_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1, & a'_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2, & a'_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1, \end{array}$$

pelo que a matriz dos cofactores de A é

$$\operatorname{cof} A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Uma vez que já conhecemos os cofactores de A o método mais simples para calcular o determinante consiste em usar a regra de Laplace, apesar de a matriz dada não ter nenhum zero. Usando a regra de Laplace, por expansão segundo a primeira linha (por exemplo), temos

$$\det A = a_{11}a'_{11} + a_{12}a'_{12} + a_{13}a'_{13} = -3 + 12 - 9 = 0.$$

b) O método de eliminação de Gauss permite obter bases para qualquer dos subespaços em causa. Por razões que se tornarão claras mais adiante, implementamos o método de eliminação de Gauss para a matriz aumentada $[A \vdots v]$ em que $v = (a,b,c)$ é um vector arbitrário de $\mathbb{R}^3$ representado como vector coluna, obtendo-se

$$A = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \vdots & a \\ 2 & 3 & 4 & \vdots & b \\ -1 & -3 & -5 & \vdots & c \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \vdots & a \\ 0 & -1 & -2 & \vdots & b-2a \\ 0 & -1 & -2 & \vdots & c+a \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \vdots & a \\ 0 & -1 & -2 & \vdots & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 3a-b+c \end{array}\right] = U$$

Daqui resulta que as soluções $u_h = (x,y,z)$ de $Au_h = 0$ são tais que

$$\begin{cases} y + 2z & = 0 \\ x + 2y + 3z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2z \\ x = z \end{cases}$$

e $z \in \mathbb{R}$ é arbitrário. Consequentemente, $u_h = z(1, -2, 1), z \in \mathbb{R}$ e, portanto, $\{(1, -2, 1)\}$ é uma base para N_A, o núcleo de A, que tem dimensão 1.

O método de eliminação de Gauss mantém invariante o espaço das linhas de uma matriz, pelo que uma base para L_A, o espaço das linhas de A, pode ser obtida a partir de uma base para o espaço das linhas da matriz triangular U. Assim, uma base $\mathcal{B}_{L_A}$ para L_A é constituída pelas linhas não nulas de U: $\mathcal{B}_{L_A} = \{(1, 2, 3), (0, -1, -2)\}$. Consequentemente, $\dim L_A = 2$.

Como se sabe , sendo C_A o espaço das colunas de A, tem-se $\dim L_A = \dim C_A$ (resultado válido com generalidade), pelo que também $\dim C_A = 2$. No entanto, C_A não é invariante pelo método de eliminação de Gauss, mas são linearmente independentes em A as colunas da mesma ordem das linearmente independentes em U. Assim, uma base $\mathcal{B}_{C_A}$ de C_A é formada pelas duas primeiras colunas de A: $\mathcal{B}_{C_A} = \{(1, 2, -1), (2, 3, -3)\}$.

c) Passemos à determinação da base pretendida, digamos $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ com $v_1 \in N_A$ e $v_2 \in C_A$. Vimos na alínea anterior que $N_A = L(\{(1, -2, 1)\})$, pelo que podemos tomar $v_1 = (1, -2, 1)$. O segundo elemento da base, v_2, é qualquer vector de $C_A \setminus N_A$. Resulta do que fizemos na alínea a), que a equação cartesiana de C_A é

$$3a - b + c = 0,$$

pelo que $C_A \cap N_A = \{0\}$ e podemos tomar para v_2 qualquer vector de C_A, por exemplo, $v_2 = (1, 2, -1)$ que é um dos seus geradores. Finalmente, o terceiro elemento de $\mathcal{B}$, v_3, é qualquer vector de $\mathbb{R}^3$ que não pertença ao espaço (plano) gerado por v_1 e v_2. Continuando a escrever os vectores de $\mathbb{R}^3$ na forma (a, b, c), a equação cartesiana deste plano é

$$2c + b = 0,$$

como se pode concluir, por eliminação de Gauss, tal como na alínea a). Assim, podemos tomar para v_3 qualquer vector de componentes (a, b, c) com $2c + b \neq 0$, por exemplo, $(0, 0, 1)$. Em conclusão,

$$\mathcal{B} = \big((1, -2, 1), (1, 2, -1), (0, 0, 1)\big)$$

é uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$ satisfazendo as propriedades requeridas.

Pretende-se representar o vector $(2, -1, 2)$ na base $\mathcal{B}$, ou seja, a sua representação na forma $(2, -1, 2) = xv_1 + yv_2 + zv_3$. Tendo em conta que

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = Bu,$$

em que $u = (x, y, z)$ é representado como vector coluna e B é a matriz com representação por colunas $B = [v_1\ v_2\ v_3]$, tal é equivalente a resolver a equação

$$Bu = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Usando, por exemplo, o método de eliminação de Gauss, facilmente se conclui que

$$u = \frac{1}{4}(5, 3, 6).$$

Exercício 24 *[2014/15 - 2º Teste - V1 - Problema 4 - MEEC]*

Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ que é representada nas bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^{2\times 2}$ pela matriz A: (a) Obtenha bases para o núcleo e para o espaço das colunas de A; (b) Determine uma base para a imagem (ou contradomínio) de T e indique as componentes de B nessa base; (c) Mostre que o conjunto P das soluções da equação $Tu = B$ pode ser escrito na forma $P = \{v\} + S$, explicitando o vector $v \in \mathbb{R}^4$ e uma equação cartesiana para o subespaço S de $\mathbb{R}^4$; (d) Identifique $P \cap U$ em que $U = L(\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\})$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ -1 & 1 & -1 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 10 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

. . . .

Resolução:

a) O método de eliminação de Gauss permite obter bases para os subespaços em causa: Seja U a matriz que se obtém por eliminação de Gauss de A; Uma base para o espaço das colunas de A, digamos B_{C_A}, é constituída pelas suas colunas que correspondem na ordem às colunas de U com pivô; Identificadas as colunas sem pivô e as correspondentes (na ordem) incógnitas livres, uma base para o núcleo, digamos B_{N_A}, é formada pelos vectores que se obtêm dando à vez o valor 1 a cada uma das incógnitas livres e o valor zeros às restantes incógnitas livres e determinando as restantes componentes por forma a que sejam elementos do núcleo. Em face do pedido nas alíneas seguintes, implementamos a eliminação de Gauss para a matriz aumentada $[A \vdots \theta]$ com $\theta = (x, y, z, w)$, obtendo-se:

$$A = \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 4 & 6 & \vdots & x \\ -1 & 1 & -1 & 6 & \vdots & y \\ 1 & 3 & 5 & 10 & \vdots & z \\ 2 & 1 & 5 & 0 & \vdots & w \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 4 & 6 & \vdots & x \\ 0 & 3 & 3 & 12 & \vdots & y+x \\ 0 & 1 & 1 & 4 & \vdots & z-x \\ 0 & -3 & -3 & -12 & \vdots & w-2x \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 4 & 6 & \vdots & x \\ 0 & 3 & 3 & 12 & \vdots & y+x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \frac{3x-4x-y}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & w-x+y \end{array}\right]$$

Considerando as bases ordenadas, conclui-se assim que $B_{C_A} = (v_1, v_2)$ com $v_1 = (1, -1, 1, 2)$, $v_2 = (2, 1, 3, 1)$ e que $B_{N_A} = (s_1, s_2)$ com $s_1 = (-2, -1, 1, 0)$, $s_2 = (2, -4, 0, 1)$.

b) Fixando em $\mathbb{R}^{2\times2}$ e $\mathbb{R}^4$ as bases canónicas, os subespaços $I(T) \subset \mathbb{R}^{2\times2}$ e $C_A \subset \mathbb{R}^4$ são isomorfos, sendo um isomorfismo aquele faz corresponder a cada matriz de $\mathbb{R}^{2\times2}$ o vector de $\mathbb{R}^4$ das suas componentes na base canónica $B_{2\times2}$. Consequentemente, uma base para $I(T)$, digamos $B_{I(T)} = (B_1, B_2)$, é dada por $B_1 = (1, -1, 1, 2)_{B_{2\times2}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B_2 = (2, 1, 3, 1)_{B_{2\times2}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Para $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, seja $b = (3, 0, 4, 3)$ o vector das suas componentes na base canónica. Determinar a sua representação na base $B_{I(T)}$ consiste em resolver para o par (α, β) a equação

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = b.$$

Uma vez que v_1 e v_2, os vectores das componentes de B_1 e B_2 na base canónica, constituem as duas primeiras coluna de A, tal consiste em resolver para $u = (\alpha, \beta, 0, 0)$ o sistema de equações $Au = b$. Tendo em conta a eliminação de Gauss, facilmente se obtém $\alpha = 1$ e $\beta = 1$. Logo $B = B_1 + B_2$.

c) Uma vez que $B \in I(T)$, sendo $Tu = B$ uma equação linear, as soluções são da forma

$$u = v + v_h \text{ com } v_h \in N(T),$$

em que v é uma (qualquer) solução particular. Fixando em $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^{2\times2}$ as bases canónicas e identificando os vectores de $\mathbb{R}^4$ com os correspondentes vectores coluna, a equação $Tu = B$ é equivalente a $Au = b$. Podemos pois escrever para o conjunto P das soluções de $Tu = B$,

$$P = \{v\} + S \text{ com } S = N(T) = N_A,$$

tomando para $v = (1, 1, 0, 0)$ (a solução particular tomando as incógnitas livres iguais a zero) e, como vimos,

$$S = L(\{s_1, s_2\} = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : z(-2, -1, 1, 0) + w(2, -4, 0, 1)\}.$$

Tendo em conta que as linhas ℓ_j, $j = 1, \ldots, 4$, de A são tais que $\ell_j^t u = 0$ para $u = (x, y, z, w) \in N_A$, uma equação cartesiana de N_A é a que se obtém tomando duas linhas linearmente independentes (por exemplo as duas primeiras):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ -1 & 1 & -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 4z + 6w = 0 \\ -x + y - z + 6w = 0 \end{cases}.$$

c) O plano U é caracterizado por ser constituído por vectores que têm as duas últimas componentes iguais, ou seja,

$$U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : z = w\}.$$

Tendo em conta a descrição de P dada anteriormente e que $v \in U$, vem

$$P \cap U = \{v\} + S \cap U = \{(1, 1, 0, 0)\} + L\{(0, -5, 1, 1)\},$$

pois $(-2, -1, 1, 0) + (2, -4, 0, 1) = (0, -5, 1, 1)$. Uma equação cartesiana de $P \cap U$ poderia obter-se usando a equação cartesiana de S previamente obtida.

Exercício 25 *[2005/6 - 1° Exame - V1 - Problema 12 - LEEC]*

Considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ definida como se segue: sendo $p \in \mathcal{P}_2$ com $p(t) = p_0 + p_1\, t + p_2\, t^2$ então

$$T(p) = (p_0 + 2p_1 + 3p_2, -p_0 + 2p_1 + p_2, 2p_0 + 2p_2)\ .$$

a) Determine a matriz A que representa T em relação às bases canónicas de $\mathcal{P}_2$ e de $\mathbb{R}^3$.

b) Indique justificadamente quais das seguintes afirmações são verdadeiras:
1. $\dim N(T) = 1$, 2. T é injectiva , 3. $\dim I(T) = 2$, 4. T não é invertível ,
em que $N(T)$ e $I(T)$ representam o núcleo e a imagem de T, respectivamente.

. . . .

<u>**Resolução**</u>:

a) Para determinar a matriz A que representa T em relação às bases canónicas de $\mathcal{P}_2$ e de $\mathbb{R}^3$, precisamos de calcular as imagens dos vectores (neste caso polinómios) da base canónica de $\mathcal{P}_2$ por meio da transformação T. Tem-se, designando por 1, t e t^2 os elementos da base canónica de $\mathcal{P}_2$ (abusando da notação, como habitualmente),

$$T(1) = (1, -1, 2), \quad T(t) = (2, 2, 0), \quad T(t^2) = (3, 1, 2)$$

pelo que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

b) Como sabemos para uma transformação linear T definida e com valores em espaços lineares da mesma dimensão, que é o caso da transformação em análise, são equivalentes as seguintes proposições:

(i) o núcleo de T é constituído pelo vector nulo,

(ii) T é injectiva,

(iii) T é sobrejectiva,

(iv) T é invertível.

Por outro lado, para T é válida a relação $\dim N(T) + \dim I(T) = \dim \mathcal{P}_2 = 3$.

Assim, para responder à questão colocada, basta determinar o núcleo de T, por exemplo. Ora, o núcleo de T é gerado pelos polinómios cujas componentes constituem os vectores u que pertencem ao núcleo da matriz A. Usando, por exemplo, a eliminação de Gauss aplicada à matriz A, conclui-se que A é singular, tendo o núcleo dimensão 1 (há uma coluna sem pivô), pelo que o núcleo de T tem também dimensão 1, por ser isomorfo ao núcleo de A. Assim, em face das equivalências atrás mencionadas, podemos concluir da veracidade de cada uma das afirmações dadas:

1. $\dim N(T) = 1$, é verdadeira, como resultado do acima descrito,

2. T é injectiva, é falsa, pois como vimos $N(T) \neq \{0\}$,

3. $\dim\, I(T) = 2$ é verdadeira, pois $\dim I(T) = 3 - 1 = 2$,

4. T não é invertível, é verdadeira, pois $N(T) \neq \{0\}$.

Exercício 26 *[2006/7 - 1° Exame - V1 - Problema 12 - MEC]*

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $T_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$T(x,y,z) = (x + 2y - 3z, x + 3y + z, \alpha y + \alpha^3 z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Determine todos os valores de α para os quais T_α é invertível.
2. Tomando $\alpha = 2$,

a) existe algum vector $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ para o qual a equação $T_\alpha(x,y,z) = (a,b,c)$ é impossível?
b) resolva a equação $T_\alpha(x,y,z) = (1,2,2)$.

. . . .

Resolução:

1. Sendo T_α uma transformação linear definida e com valores no mesmo espaço de dimensão 3, T_α é invertível se e só se for invertível a matriz A_α que a representa em relação à base canónica, que, neste caso, é a matriz

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha^3 \end{bmatrix}.$$

Como A_α é invertível se e só se é não singular, podemos usar o método de eliminação de Gauss para averiguar da invertibilidade de A_α. Em face da alínea seguinte, consideramos desde já a matriz aumentada do sistema $A_\alpha u = v$ associado à equação linear $T_\alpha(x,y,z) = (a,b,c)$ com $u = [x\ y\ z]^t$ e $v = [a\ b\ c]^t$:

$$[A_\alpha \mid v] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & | & a \\ 1 & 3 & 1 & | & b \\ 0 & \alpha & \alpha^3 & | & c \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & | & a \\ 0 & 1 & 4 & | & b-a \\ 0 & \alpha & \alpha^3 & | & c \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & | & a \\ 0 & 1 & 4 & | & b-a \\ 0 & 0 & \alpha^3 - 4\alpha & | & c - \alpha(b-a) \end{bmatrix} = [U_\alpha \mid \tilde{v}]$$

Daqui se conclui que

$$A_\alpha \text{ é invertível} \quad \Leftrightarrow \quad U_\alpha \text{ é invertível} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^3 - 4\alpha \neq 0.$$

Como $\alpha^3 - 4\alpha = \alpha(\alpha^2 - 4) = \alpha(\alpha - 2)(\alpha + 2)$, então

$$A_\alpha \text{ é invertível} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}.$$

2. Para $\alpha = 2$ já sabemos que T_α não é invertível ou, o que é equivalente, que T_α não é sobrejectiva.

a) Como o método de eliminação de Gauss preserva o conjunto das soluções de um sistema de equações lineares, temos

$$\begin{aligned} T_\alpha(x,y,z) = (a,b,c) \text{ é impossível} \quad &\Leftrightarrow \quad A_\alpha u = v \text{ é impossível} \\ &\Leftrightarrow \quad U_\alpha u = \tilde{v} \text{ é impossível} \quad \Leftrightarrow \quad c - 2(b-a) \neq 0. \end{aligned}$$

b) Sendo $(a,b,c) = (1,2,2)$, tem-se $c - 2(b-a) = 0$, pelo que $T_\alpha(x,y,z) = (a,b,c)$ é possível ((a,b,c) pertence à imagem de T_α) e indeterminado (o núcleo de T_α tem dimensão 1). Podemos obter as soluções por via do sistema $U_\alpha u = \tilde{v}$ com $\alpha = 2$, obtendo-se para as duas primeiras componentes (x e y) em função da terceira (z), que podemos tomar para incógnita livre:

$$x = -1 + 11z, \quad y = 1 - 4z.$$

Assim, as soluções da equação $T(x,y,z) = (1,2,2)$ são dadas por

$$(x,y,z) = (-1,1,0) + z(11,-4,1), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Exercício 27 *[2008/9 - 1° Exame - Problema 13 - LEIC]*

Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (x + 2y + 3z, x - y, 2x + y + 3z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

a) Represente T em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$;

b) T é injectiva? T é sobrejectiva?

c) Resolva a equação $Tu = (1, 1, 2)$.

....

Resolução:

13-a) A matriz A que representa T em relação à base canónica $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ é aquela que tem na coluna $j(j = 1, 2, 3)$ as componentes da imagem por T do vector e_j. Neste caso,

$$\begin{aligned} Te_1 = T(1,0,0) &= (1,1,2) \\ Te_2 = T(0,1,0) &= (2,-1,1) \\ Te_3 = T(0,0,1) &= (3,0,3) \end{aligned}$$

pelo que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ex1-13-b) A injectividade e/ou a sobrejectividade de uma transformação linear pode ser estudada usando o método de eliminação de Gauss aplicado à matriz que a representa em relação a uma base previamente fixada (neste caso, a base canónica). A transformação T é injectiva se e só se o núcleo da matriz A for trivial, o que após a eliminação significa que A deu origem a uma matriz não triangular superior sem zeros na diagonal principal. Por outro lado, tratando-se de uma transformação definida e com valores em espaços da mesma dimensão finita (neste caso, é o mesmo espaço) T é sobrejectiva se e só se for injectiva. Vejamos qual é a situação, por aplicação da eliminação de Gauss a A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \overset{E_1}{\to} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \overset{E_2}{\to} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0. \end{bmatrix} = U,$$

em que

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Daqui se conclui que matriz U (e, consequentemente A) é singular, por se tratar de uma matriz triangular superior com um zero na diagonal principal. Em face do exposto acima a transformação T não é injectiva nem sobrejectiva.

Ex1-13-c) A solução geral da equação linear $Tu = b$ com $b = (1, 1, 2)$ tem a forma

$$u = u_p + u_h$$

em que u_p é uma soluccão particular e u_h é solução da equação homogénea $Tu = 0$. Como b coincide com a primeira coluna de A uma solução particular é

$$u_p = e_1 = (1, 0, 0).$$

Por outro lado, como $Tu = 0 \Leftrightarrow Au = 0 \Leftrightarrow Uu = 0$ as soluções $u_h = (x, y, z)$ desta equação são tais que (z é a incógnita livre)

$$x = y = -z,$$

pelo que

$$u_h = z(-1, -1, 1), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Conclui-se então que as soluções de $Tu = (1, 1, 2)$ são os vectores da forma

$$u = (1, 0, 0) + z(-1, -1, 1) = (1 - z, -z, z), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Exercício 28 *[2009/10 - 2º Exame - V1 - Problema 11 - MEC]*

Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$T(x, y, z, w) = (x - y + z, x - y + w, w - z), \quad (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4.$$

1. Comece por calcular as imagens por T dos vectores da base canónica de $\mathbb{R}^4$ e use-as para escrever a matriz que representa T em relação às bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$.
2. Indique uma base e a dimensão de $N(T)$ - o núcleo ou espaço nulo de T;
3. Indique uma base e a dimensão de $I(T)$ - a imagem ou contradomínio de T;
4. Indique um valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ para o qual a equação

$$Tv = (1, 2, \alpha)$$

é possível e, para esse valor de α, determine as soluções daquela equação.

....

Resolução:

1. Sejam $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ e $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = (f_1, f_2, f_3)$ as bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente, com

$$e_1 = (1, 0, 0, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, 0),\ e_3 = (0, 0, 1, 0),\ e_4 = (0, 0, 0, 1),$$
$$f_1 = (1, 0, 0),\ f_2 = (0, 1, 0),\ f_3 = (0, 0, 1).$$

Pela definição da transformação T, tem-se

$$Te_1 = (1, 1, 0) = f_1 + f_2; \quad Te_2 = (-1, -1, 0) = -f_1 - f_2;$$

$$Te_3 = (1, 0, -1) = f_1 - f_3; \quad Te_4 = (0, 1, 1) = f_2 + f_3.$$

Por definição, a matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ que representa T em relação às bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$ é aquela cuja coluna $j (= 1, 2, 3, 4)$ contém as componentes (na base canónica de $\mathbb{R}^3$) da imagem por T do vector e_j. Assim, de acordo com os cálculos anteriores, conclui-se que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.-3. O método de eliminação de Gauss permite obter de uma só vez uma base para o núcleo N_A e uma base para o espaço das colunas C_A de A. Usando a identificação habitual de representar os vectores de $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) como vectores colunas, os núcleos de A e T coincidem e também coincidem o espaço das colunas de A e a imagem (ou contradomínio) de T.

Apliquemos, pois, o método de eliminação de Gauss a A:

$$A \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U.$$

Como U é uma matriz em escada de linhas (com 2 incógnitas livres, a segunda e a quarta) é fácil obter uma base para o núcleo de U (que coincide com o núcleo de A) e tem dimensão 2, vindo

$$\mathcal{B}_{N_A} = \{(1,1,0,0), (-1,0,1,1)\}$$

sendo o primeiro elemento calculado dando à segunda e quarta incógnitas os valores 1 e 0, respectivamente, e determinando as restantes componentes de forma a que o vector pertença ao núcleo de U. Analogamente o segundo elemento obtém-se dando à segunda e quarta incógnitas os valores 0 e 1, respectivamente, e determinando as restantes componentes de forma a que o vector pertença ao núcleo de U.

Relativamente ao espaço das colunas de A, este tem como base as colunas linearmente independentes de A, que são a primeira e a terceira. Assim, este espaço tem dimensão 2 e uma base é o conjunto

$$\mathcal{B}_{C_A} = \{(1,1,0), (1,0,-1)\}.$$

4. O vector $(1,2,\alpha)$ pertence à imagem de T (ou, ao espaço das colunas de A) se existirem números reais c_1 e c_2 tais que

$$(1,2,\alpha) = c_1(1,1,0) + c_2(1,0,-1) = (c_1 + c_2, c_1, -c_2).$$

Conclui-se, pois, que só para $\alpha = 1$ o vector $(1,2,\alpha)$ pertence à imagem de T e, nesse caso, $c_1 = 2$ e $c_2 = -1$. Consequentemente, apenas para $\alpha = 1$ a equação considerada é possível e, nesse caso, como $Te_1 = (1,1,0)$ e $Te_3 = (1,0,-1)$, tem-se

$$T(2e_1 - e_3) = (1,2,1),$$

pelo que $v_p = 2e_1 - e_3 = (2,0,-1,0)$ é uma solução particular daquela equação. Sendo T uma transformação linear, a solução geral v da equação considerada é da forma

$$v = v_p + v_h, \quad v_h \in N(T),$$

ou seja, de acordo com as alíneas anteriores,

$$v = (2,0,-1,0) + a(1,1,0,0) + b(-1,0,1,1) = (2 + a - b, a, -1 + b, b), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Exercício 29 *[2009/10 - 1º Exame - Problema 13 - MEC]*

Seja $\mathcal{P}_2$ o espaço linear real dos polinómios $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de grau menor ou igual a dois e considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ definida como se segue: sendo $p \in \mathcal{P}_2$ dado por $p(t) = a + bt + ct^2, t \in \mathbb{R}$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, então

$$T(p) = (a + b - 2c, 2a + 3b + 4c, 5a + 6b - 2c).$$

1. Obtenha a representação matricial A de T em relação às bases canónicas de $\mathcal{P}_2$ e de $\mathbb{R}^3$.

2. Seja U uma matriz que se obtém por eliminação de Gauss a partir da matriz A. Use-a para determinar se T é injectiva e/ou sobrejectiva.

3. a) Mantendo em $\mathcal{P}_2$ a base canónica, determine uma base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ por forma que a representação matricial de T (em relação ao novo par de bases) seja a matriz U, que identificou na alínea anterior.

b) Resolva a equação
$$T(p) = b_1$$
em que b_1 é o primeiro elemento da base $\mathcal{B}$.

....

Resolução:

1. Por definição a representação matricial A de T em relação às bases canónicas $\mathcal{B}_{\mathcal{P}_2} = (1, t, t^2)$ (em que se usa o abuso de notação habitual) de $\mathcal{P}_2$ e $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = (e_1, e_2, e_3)$ (com $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$) é a matriz de $\mathbb{R}^{3\times 3}$ que tem na coluna $j = 1,2,3$ as componentes (na base canónica de $\mathbb{R}^3$) da imagem por T do elemento de ordem j da base canónica de $\mathcal{P}_2$. Calculando, obtém-se
$$T(1) = (1,2,5), \quad T(t) = (1,3,6), \quad T(t^2) = (-2,4,-2).$$
pelo que
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

2. Apliquemos o método de eliminação de Gauss à matriz A:
$$A \xrightarrow{E_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U,$$
em que
$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$
Como se sabe, designando por x o vector (representado como vector coluna) das componentes do polinómio p na base canónica de $\mathcal{P}_2$, tem-se
$$T(p) = y \quad \Leftrightarrow \quad Ax = y$$
em que na segunda destas relações se representa y também como vector coluna. Daqui resulta que T é injectiva, ou o que é equivalente $N(T) = \{0\}$, se e só se $N_A = \{0\}$ e que T é sobrejectiva (i.e. $I(T) = \mathbb{R}^3$) se e só se $C_A = \mathbb{R}^3$.

Da eliminação de Gauss resulta que A tem apenas duas colunas linearmente independentes, $\dim C_A = 2$ e que $\dim N_A = 1$. Consequentemente, T não é injectiva nem sobrejectiva.

3. a) Mantendo em $\mathcal{P}_2$ a base canónica e considerando em $\mathbb{R}^3$ uma nova base $\mathcal{B}$, a relação entre a matriz $\widetilde{A}$ que representa T em relação ao novo par de bases é a matriz A é dada por
$$\widetilde{A} = S^{-1}A,$$
em que S é a matriz de mudança da base canónica de $\mathbb{R}^3$ para a base $\mathcal{B}$. Pretende-se tomar $\widetilde{A} = U$ e como, pela eliminação de Gauss se tem $E_2E_1A = U$, deverá ser
$$S = (E_2E_1)^{-1} = E_1^{-1}E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
Assim a nova base $\mathcal{B}$ é formada pelos vectores cujas componentes figuram nas colunas da matriz S, i.e. $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ com
$$b_1 = (1,2,5), \quad b_2 = (0,1,1), \quad b_3 = (0,0,1).$$

b) Considerando em $\mathcal{P}_2$ a base canónica e em $\mathbb{R}^3$ a base $\mathcal{B}$, como T é representada pela matriz U, tem-se, em particular, $T(1) = b_1 = (1, 2, 5)$, pelo que a equação considerada é possível. Além disso, como $\dim N(T) = \dim N_U$ e, resulta da alínea a) que $\dim N_U = 1$, a solução geral daquela equação é

$$p = 1 + p_h \quad \text{com } p_h \text{ tal que } T(p_h) = 0.$$

Ora, como $N_U = L(\{(10, -8, 1)\})$, tem-se $N(T) = L(\{10 - 8t + t^2 : \ t \in \mathbb{R}\})$ e, portanto, a solução geral da equação $T(p) = b_1$ é da forma

$$p(t) = 1 + \alpha(10 - 8t + t^2), \quad \alpha, t \in \mathbb{R}.$$

Exercício 30 *[2010/11 - 2º Teste - V1 - Problema 4 - MEEC]*

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

a) Obtenha uma base para o espaço das colunas da matriz A.

b) Seja $\mathcal{P}_2$ o espaço linear real dos polinómios definidos em $\mathbb{R}$ de grau menor ou igual a 2 e considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2$ que é representada pela matriz A em relação às bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e de $\mathcal{P}_2$. Mostre que qualquer solução x da equação

$$Tx = p,$$

em que $p(t) = t + 2t^2, t \in \mathbb{R}$, pode ser escrita na forma $x = v_1 + \alpha v_0$ com $\alpha \in \mathbb{R}$ e identifique os vectores v_0 e v_1.

c) Qual das soluções da equação anterior pertence ao plano de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores $(1, 0, -1)$ e $(0, 1, -1)$.

. . . .

Resolução:

a) O método de eliminaçãoo de Gauss (MEG) permite obter uma base para o espaço das colunas de uma matriz: essa base é formada pelas colunas da matriz original que dão origem (i.e. da mesma ordem) às colunas da matriz em escada de linhas que se obtém pelo referido método. Neste caso, a implementação do MEG, com a habitual convenção de notação: $X \xrightarrow{E} Y$ significa que $Y = EX$, conduz a:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U,$$

em que

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Consequentemente, uma base - $\mathcal{B}_{C_A}$ - para o espaço das coluna da matriz A é formada pelas suas duas primeiras colunas,

$$\mathcal{B}_{C_A} = \{[1 \ 1 \ 1]^t, [1 \ 2 \ 3]^t\}.$$

b) Fixadas as bases em $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{P}_2$, neste caso as bases canónicas de ambos os espaços, designando por $u = [a \ b \ c]^t$ o vector coluna das componentes de x na base canónica de $\mathbb{R}^3$ e por $z = [0 \ 1 \ 2]^t$ o vector coluna das componentes de p na base canónica de $\mathcal{P}_2$, as equações $Tx = p$ e

$$Au = z$$

são equivalentes. Podemos usar o MEG, aplicado à matriz aumentada $[A|z]$ para obter (caso exista) a solução desta última equação. Tendo em conta que na alínea anterior o MEG já foi aplicado à matriz A, basta saber qual é o vector w resultante da aplicação do MEG ao vector z:

$$w = E_2E_1v = [0\ \ 1\ \ 0]^t.$$

Considerando o SEL cuja matriz aumentada é $[U|w]$, concluímos que este é possível e inderterminado, com grau de indeterminação 1. Consequentemente, Qualquer solução de $Au = z$ pode ser escrita na forma

$$u = u_1 + \alpha u_0, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

em que $u_0 \in N_A$ (N_A designa o núcleo de A) e u_1 é uma solução particular de $Au = z$, ambos na forma de vector coluna. Daqui se conclui que as soluções da equação original $Tx = p$ são da forma

$$x = v_1 + \alpha v_0, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

em que v_0 (respectivamente, v_1) são os vectores de $\mathbb{R}^3$ cujas componentes figuram no vector coluna u_0 (u_1).

Como $Au = z$ e $Uu = w$ são equivalentes, resolvendo este último com a convenção habitual de escolher como incógnita livre a que corresponde à coluna sem pivô, neste caso c a terceira incógnita, obtém-se:

$$\begin{cases} b = 1 - c \\ a = -b - 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 - c \\ a = -1 - c \end{cases}$$

sendo $c \in \mathbb{R}$. Do que atrás ficou dito, conclui-se então que

$$x = (a, b, c) = (-1 - c, 1 - c, c) = (-1, 1, 0) + c(-1 - 1, 1), \quad c \in \mathbb{R},$$

que é o resultado pretendido com $v_1 = (-1, 1, 0)$, $v_0 = (-1 - 1, 1)$ e $\alpha = c \in \mathbb{R}$.

c) Como vimos as soluções de $Tx = p$ representam uma recta - R - cuja equação vectorial é $R = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = (-1, 1, 0) + \alpha(-1 - 1, 1), \alpha \in \mathbb{R}\}$. Por outro lado, o plano dado - P - tem como equação vectorial $P = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = \beta(1, 0, -1) + \gamma(0, 1, -1)\}$. Consequentemente, os vectores $x \in R \cap P$ são os que pondem ser escritos em qualquer das formas:

$$x = (-1, 1, 0) + \alpha(-1 - 1, 1) = \beta(1, 0, -1) + \gamma(0, 1, -1).$$

Usando a última igualdade e escrevendo-a como um SEL em que as incógnitas são β, γ e α, tem-se para a matriz aumentada desse sistema:

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ -1 & -1 & -1 & | & 0 \end{array}\right].$$

Resolvendo-o, por exemplo pelo MEG como exemplificado na alínea anterior, conclui-se que $\alpha = 0, \beta = -1, \gamma = 1$. Consequentemente, a solução de $Tx = p$ que pertence ao plano P é a solução particular v_1 atrás identificada:

$$x = v_1 = (-1, 1, 0).$$

Exercício 31 *[2010/11 - Exame - V1 - Problema 7 - MEEC]*

Seja $\mathcal{P}_2$ o espaço linear real dos polinómios de grau menor ou igual a 2 e suponha que

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

representa a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ relativamente à base canónica.

a) Qual é a matriz que representa T em relação à base ordenada $\mathcal{B} = (p_1, p_2, p_3)$, em que

$$p_1(t) = 1 - t + t^2, \quad p_2(t) = -1 + t + t^2, \quad p_3(t) = 1 + t - t^2, \quad t \in \mathbb{R}?$$

b) T é invertível ?
Se respondeu SIM, determine a inversa de T; Se respondeu NÃO, identifique o núcleo de T.
c) Resolva a equação $Tp = q$, em que $q(t) = -1 + t + t^2, t \in \mathbb{R}$.

....

Resolução:

a) Há várias vias para obter a matriz que representa a transformação T. Optamos aqui por obtê-la com recurso à definição: a matriz que representa a transformação T em relação à base $\mathcal{B}$ é aquela que tem nas suas colunas as componentes da imagem por T de cada um dos elementos da base $\mathcal{B}$, quando representada nessa base. Como T é representada pela matriz A em relação à base canónica de $\mathcal{P}_2$ já sabemos que:

$$T(1) = 3 + 3t - 3t^2 = 3(1 + t - t^2); \quad T(t) = 2 + 4t - 2t^2 = 2(1 + 2t - t^2); \quad T(t^2) = -1 + t + t^2.$$

Logo, para qualquer $t \in \mathbb{R}$,

$$Tp_1(t) = T(1) - T(t) + T(t^2) = 3(1 + t - t^2) - 2(1 + 2t - t^2) - 1 + t + t^2 = 0;$$

$$Tp_2(t) = -T(1) + T(t) + T(t^2) = -3(1 + t - t^2) + 2(1 + 2t - t^2) - 1 + t + t^2 = -2 + 2t + t^2 = 2p_2(t);$$

$$Tp_3(t) = T(1) + T(t) - T(t^2) = 3(1 + t - t^2) + 2(1 + 2t - t^2) + 1 - t - t^2 = 6 + 6t - 6t^2 = 6p_3(t).$$

Consequentemente, a matriz que representa T na base $\mathcal{B}$ é a matriz diagonal

$$\Lambda = \operatorname{diag}\{0, 2, 6\}.$$

b) A transformação T não é invertível, porque sendo representada por uma matriz diagonal com um zero na diagonal tem o núcleo com dimensão 1 (este é o espaço gerado pelo polinómio p_1) e, portanto não é nem injectiva, nem invertível, nem sobrejectiva.

c) Como para qualquer equação linear, sempre que houver soluções de $Tp = q$ (o que acontece sempre que q pertencer à imagem ou contradomínio de T) , estas são da forma

$$p = p_p + p_h$$

em que p_p é uma solução particular e $p_h \in N(T)$. Ora $q(t) = -1 + t + t^2 = p_2(t), t \in \mathbb{R}$ e, como vimos na alínea a), $T(1/2p_2) = p_2$, pelo que a equação considerada tem soluções e podemos tomar

$$p_p = 1/2p_2.$$

Por outro lado, o núcleo de T é gerado pelo polinómio p_1 (ver alínea anterior). Então as soluções da equação $Tp = q$ são da forma

$$p = 1/2p_2 + \alpha p_1, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

ou, para qualquer $t \in \mathbb{R}$,

$$p(t) = 1/2(-1 + t + t^2) + \alpha(1 - t + t^2) = \alpha - 1/2 + (1/2 - \alpha)t + (\alpha + 1/2)t^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Exercício 32 *[2012/13 - 2º Teste - V1 - Problema 4 - LEGM, MEC]*

Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^4$ definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+b, c+d, a+d, b+c), \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}.$$

a) Obtenha a matriz que representa T em relação às bases canónicas de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ e de $\mathbb{R}^4$;

b) Determine uma base para o núcleo de T e uma base para a imagem de T;

c) Das duas equações seguintes apenas uma é possível,

$$T(X) = (1,-1,1,-1); \quad T(Y) = (1,1,1,-1);$$

Identifique-a e resolva-a.

....

Resolução:

a) Como $\dim \mathbb{R}^4 = \dim \mathbb{R}^{2\times 2} = 4$, a matriz $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ que representa T em relação às bases canónicas de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ e de $\mathbb{R}^4$ é aquela cuja coluna $j = 1,2,3,4$ contém as componentes da imagem da matrix de ordem j da base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ por meio da transformação T quando expressa na base canónica de $\mathbb{R}^4$. Ora,

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = (1,0,1,0); \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = (1,0,0,1);$$
$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = (0,1,0,1); \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = (0,1,1,0),$$

pelo que será

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) O núcleo e a imagem (ou contradomínio) de T são isomorfos ao núcleo e imagem (ou espaço das colunas) da matriz A e estes podem ser facilmente obtidos por eliminação de Gauss. Por outro lado, os vectores na imagem de T são os elementos $v = (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$ que quando representados como vectores coluna pertencem à imagem ou espaço das colunas da matriz A, ou seja aqueles para os quais a equação $Au = v$ tem solução. Procedendo à eliminaccão de Gauss para a matriz aumentada $[A \vdots v]$, obtemos:

$$[A \vdots v] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 1 & 1 & 0 & w \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & -1 & 0 & 1 & z-x \\ 0 & 1 & 1 & 0 & w \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & 0 & w \\ 0 & -1 & 0 & 1 & z-x \\ 0 & 0 & 1 & 1 & y \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & 0 & w \\ 0 & 0 & 1 & 1 & w+z-x \\ 0 & 0 & 1 & 1 & y \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & 0 & w \\ 0 & 0 & 1 & 1 & w+z-x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x+y-z-w \end{array}\right] = [U \vdots \tilde{v}]$$

Daqui se conclui o seguinte:

- $\dim N_A = \dim N_U = 1$ (=número de colunas sem pivô). O vectores de $N_A = N_U$ são os elementos $u = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{R}^4$ tais que $u_3 = -u_4$, $u_2 = -u_3$, $u_1 = -u_2$, ou seja $N_A = L(\{-1, 1, -1, 1)\})$. O núcleo de T é isomorfo a N_A e é gerado pela matriz cujas componentes relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ são $(-1, 1, -1, 1)$, ou seja pela matriz

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

constituindo esta uma base de $N(T)$, $\{B\}$.

- $\dim C_A = \dim C_U = 3$ (=número de pivôs). Uma base de C_A é constituída pelo maior subconjunto das colunas de A linearmente independente, este conjunto é constituído pelas primeiras três colunas de A, aquelas que dão origem às colunas de U com pivô. Usando a identificação habitual de $\mathbb{R}^4$ com $\mathbb{R}^{4\times 1}$, que consiste em representar os vectores de $\mathbb{R}^4$ como vectores coluna, uma base de $I(T)$ é pois

$$\mathcal{B}_{I(T)} = \{(1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1)\}.$$

c) A introdução do vector v na eliminação de Gauss anteriormente realizada permite obter uma equação cartesiana para o contradomínio de T: pertencem a este subespaço os vectores $(x, y, v, w) \in \mathbb{R}^4$ tais que

$$x + y = z + w,$$

que é a condição de existência de solução da equação $Au = v$. Usando este resultado podemos imediatamente afirmar que a primeira das equações é possível e que a segunda é impossível, uma vez que a primeira temos $x+y = 1-1 = 0 = z+w = 1-1$ e para a segunda $x+y = 1+1 = 2 \neq z+w = 1-1 = 0$. Em tudo o que se segue consideraremos apenas a primeiras destas equações.

Tratando-se de uma equação linear a forma geral das suas soluções é

$$X = X_p + X_h$$

em que X_p é uma solução particular e $X_h \in N(T)$, ou seja $TX_h = 0$. Na alínea anterior identificámos o núcleo de T, pelo que

$$X_h = \alpha B = \alpha \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Por outro lado, o segundo membro da equação considerada é tal que

$$(1, -1, 1, -1) = c_1 - c_3,$$

em que c_j é a coluna j de A e, portanto, uma solução particular de $Au = v$ é $v = (1, 0, -1, 0)$ (já que $Av = x\,c_1 + y\,c_2 + z\,c_3 + w\,c_4$). Consequentemente, uma solução particular X_p de $TX = (1, -1, 1, -1)$ é a matriz cuja representação na base canónica $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ é

$$X_p = (1, 0, -1, 0)_{\mathcal{B}_c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A solução geral da equacção $T(X) = (1, -1, 1, -1)$ é pois da forma

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ -1-\alpha & \alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Exercício 33 *[2012/13 - Exame - V1 - Problema 7 - LEGM, MEC]*

Considere os seguintes vectores de $\mathbb{R}^3$,

$$v_1 = (1, 0, 0), \quad v_2 = (1, 1, 0), \quad v_3 = (1, 1, 2),$$

e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que

$$Tv_1 = v_2 + v_3, \quad Tv_2 = v_2, \quad Tv_3 = v_3.$$

a) Mostre que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ é uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$ e, representando os elementos de $\mathbb{R}^3$ como vectores coluna e sendo B a matriz cuja representação por colunas é $B = [v_1 \; v_2 \; v_3]$, determine a inversa de B;

b) Mostre que T está bem definida e determine a sua representação matricial na base $\mathcal{B}$. T é injectiva e/ou sobrejectiva?;

c) Qual é a expressão analítica de T? (ou seja, sendo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, quais são as componentes de $T(x, y, z)$ na base canónica de $\mathbb{R}^3$?)

. . . .

Resolução:

a) Tendo em conta que qualquer base de $\mathbb{R}^3$ tem 3 elementos e que B tem 3 elementos, para mostrar que $\mathcal{B}$ é uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$ basta mostrar que o conjunto constituído por v_1, v_2 e v_3 é linearmente independente. Representando aqueles vectores como vectores coluna e sendo

$$B = [v_1 v_2 v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ é linearmente indentendente se e só se a única solução da equação $Bu = 0$ for $u = 0$. Ora, como B é triangular superior e não tem zeros na diagonal principal, tem-se $Bu = 0$ se e só se $u = 0$, pelo que v_1, v_2 e v_3 é linearmente independente e, portanto, $\mathcal{B}$ é uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$. Não é explicitado nenhum método para o cálculo da inversa de B, sendo claro que qualquer dos métodos gerais (Gauss-Jordan ou por via da matriz dos cofactores) é aplicável. No entanto, tendo em conta que B é triangular superior sem zeros na diagonal principal, a sua inversa será também triangular superior e terá na diagonal principal os inversos dos que figuram na diagonal principal de B. Assim, recorrendo à definição de inversa de um matriz é fácil ver que:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

b) Sendo claro que $\mathbb{R}^3$ é o espço de chegada de T, para mostrar que T está bem definida basta ver que o seu domínio é também $\mathbb{R}^3$. Tendo-se concluído na alínea anterior que $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$, qualquer vector de $u \in \mathbb{R}^3$ pode ser representado univocamente como combinação linear dos elementos de $\mathcal{B}$, digamos

$$u = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3,$$

pelo que, sendo T linear, virá

$$Tu = \alpha T v_1 + \beta T v_2 + \gamma T v_3 = \alpha(v_2 + v_3) + \beta v_2 + \gamma v_3 = (\alpha + \beta) v_2 + (\alpha + \gamma) v_3.$$

Daqui resulta que T tem, efectivamente, $\mathbb{R}^3$ como domínio.

A matriz $\widetilde{A}$ que representa T na base $\mathcal{B}$ é aquela cuja coluna $j = 1, 2, 3$ contém as componentes de Tv_j quando representado na base $\mathcal{B}$. Ora, como,

$$Tv_1 = 0v_1 + 1v_2 + 1v_3, \quad Tv_2 = 0v_1 + 1v_2 + 0v_3, \quad Tv_3 = 0v_1 + 0v_2 + 1v_3,$$

segue-se que

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uma transformação linear definida e com valores no mesmo espaço de dimensão finita é injectiva se e só se for sobrejectiva, pelo que basta analisar a injectividade. Por outro lado, uma transformação linear é injectiva se e só se o seu núcleo for constituído pelo vector zero. Sendo T representada pela matriz $\widetilde{A}$ em relação à base $\mathcal{B}$, T é injectiva se e só se o núcleo de $\widetilde{A}$ for constituído pelo vector zero. Ora, sendo $\widetilde{A}$ triangular com uma linha nula, o seu núcleo contém vectores não nulos (as soluções não nulas de $\widetilde{A}u = 0$). Consequentemente, T não é injectiva e, portanto, também não é sobrejectiva.

c) Seja A a matriz que representa T em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ com $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$. Usando a representação dos elementos de $\mathbb{R}^3$ como vectores coluna, a matriz A, pela sua definição, tem a representação por colunas $A = [Te_1\ Te_2\ Te_3]$.

Para obter a expressão analítica de T basta conhecer A, pois sendo T linear virá, para qualquer $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$T(x,y,z) = T(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xTe_1 + yTe_2 + zTe_3.$$

Como vimo em b), T é representada por $\widetilde{A}$ na base $\mathcal{B}$. Por outro lado, sabe-se da teoria geral das transformações lineares que as matrizes A e $\widetilde{A}$ se relacionam por

$$\widetilde{A} = S^{-1}AS \quad \Leftrightarrow \quad A = S\widetilde{A}S^{-1},$$

em que S é a matriz (de mudança da base canónica para a base $\mathcal{B}$) cujas colunas contêm as componentes dos vectores da base $\mathcal{B}$ escritos na base canónica. Assim, $S = B$, de acordo com a definição desta matriz. Consequentemente,

$$A = B\widetilde{A}B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Daqui resulta que $Te_1 = (2,2,2), \quad Te_2 = (-1,-1,-2), \quad Te_3 = (1,1,1)$, e, consequentemente,

$$T(x,y,z) = x(2,2,2) + y(-1,-1,-2) + z(0,0,1) = (2x - y, 2x - y, , 2x - 2y + z),$$

que é a expressão pretendida. Alternativamente, poder-se-ia ter obtido a matriz A exprimindo os vectores da base canónica na base $\mathcal{B}$,

$$e_1 = v_1, \quad e_2 = v_2 - v_1, \quad e_3 = 1/2(v_3 - v_2)$$

e a definição de T, para obter $Te_1 = T(v_2 + v_3) = v_2 + v_3 = (2,2,2), \quad Te_2 = T(v_2 - v_1) = -v_3 = (-1,-1,-2), \quad Te_3 = T(1/2(v_3 - v_2) = (0,0,1)$.

Exercício 34 *[2013/14 - 2º Teste - V1 - Problema 4 - LEGM, MEC]*

(a) Sejam $s_1 = (1,2,3),\ s_2 = (1,-1,2), u = (3,4,4)$. Mostre que $\mathcal{B} = (s_1, s_2, u)$ é uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$ (vectores definidos no Problema 1), (b) Obtenha as componentes de $y = (-1,-3,1)$ na base $\mathcal{B}$; (c) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que $Ts_1 = s_1 + s_2$, $Ts_2 = s_2 + u$, $Tu = u$. Mostre que T está bem definida e determine a representação matricial de T na base $\mathcal{B}$, (d) Resolva a equação $Tx = y$ e apresente a solução na base canónica de $\mathbb{R}^3$.

....

Resolução:

(a)-(b) Como veremos há toda a vantagem em considerar simultaneamente as duas alíneas. Seja S a matriz cujas colunas contêm as componentes do vectores s_1, s_2, u. Para mostrar que $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$, basta mostrar que $\mathcal{B}$ é linearmente independente (ou que gera $\mathbb{R}^3$), pois tem 3 elementos (a dimensão de $\mathbb{R}^3$). Tal corresponde a mostrar que as colunas de S são linearmente independentes ou que após a eliminação de Gauss se obtém uma matriz com 3 pivôs. Por outro lado, representando y na forma de vector coluna, se, como se afirma, $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$, então a representação de y na base $\mathcal{B}$, digamos $y = (\alpha, \beta, \gamma)_{\mathcal{B}}$ pode ser obtida resolvendo para $w = (\alpha, \beta, \gamma)$ a equação

$$Sw = y,$$

pois

$$Sw = S\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix} = \alpha s_1 + \beta s_2 + \gamma u \quad \text{e} \quad y = \begin{bmatrix}-1\\ -3\\ 1\end{bmatrix}.$$

Sendo assim, para obter as respostas às questões colocadas, usamos o método de eliminação de Gauss aplicado à matriz aumentada $\left[S \,\vdots\, y\right]$. Implementando-o, obtém-se:

$$\left[S \,\vdots\, y\right] = \begin{bmatrix}1 & 1 & 3 & | & -1\\ 2 & -1 & 4 & | & -3\\ 3 & 2 & 4 & | & 1\end{bmatrix} \xrightarrow{E_1} \begin{bmatrix}1 & 1 & 3 & | & -1\\ 0 & -3 & -2 & | & -1\\ 0 & -1 & -5 & | & 4\end{bmatrix} \xrightarrow{E_2} \begin{bmatrix}1 & 1 & 3 & | & -1\\ 0 & -3 & -2 & | & -1\\ 0 & 0 & -13/3 & | & 13/3\end{bmatrix} = \left[U \,\vdots\, c\right]$$

em que

$$E_1 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ -3 & 0 & 1\end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1/3 & 1\end{bmatrix}.$$

Daqui se conclui que a matriz U, resultante da eliminação de Gauss aplicada a S, tem 3 pivôs e, portanto, de acordo com o descrito anteriormente, $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$. Para obter as componentes de y na base $\mathcal{B}$, tendo em conta que o método de eliminação de Gauss não altera o conjunto das soluções de um sistema de equações lineares, basta resolver sistema simplificado $Uw = c$, obtendo-se: $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = -1$, pelo que

$$y = (-1, -3, 1) = s_1 + s_2 - u, \qquad \text{ou} \qquad y = (1, 1, -1)_{\mathcal{B}}.$$

(c) Para ver que T está bem definida mostramos que o seu domínio é $\mathbb{R}^3$ e que a sua imagem (ou contradomínio) está contido em $\mathbb{R}^3$. Como $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$, dado um vector arbitrário w deste espaço podemos representá-lo nequela base, digamos

$$w = (x, y, z)_{\mathcal{B}} = xs_1 + ys_2 + zu.$$

Sendo T linear, virá

$$\begin{aligned} Tw &= T(xs_1 + ys_2 + zu) = xTs_1 + yTs_2 + zTu = x(s_1 + s_2) + y(s_2 + u) + zu \\ &= x(2, 1, 5) + y(4, 3, 6) + z(3, 4, 4) = (2x + 4y + 3z, x + 3y + 4z, 5x + 6y + 4z) \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

pelo que efectivamente o seu domínio é todo o $\mathbb{R}^3$ e a sua imagem está contida em $\mathbb{R}^3$.

De acordo com a definição de T, tem-se

$$Ts_1 = 1s_1 + 1s_2 + 0u, \quad Ts_2 = 0s_1 + 1s_2 + 1u, \quad Tu = 0s_1 + 0s_2 + 1u,$$

pelo que a matriz B que representa T na base $\mathcal{B}$, sendo aquela que tem em cada uma das suas colunas as componentes na base $\mathcal{B}$ da imagem por T dos vectores dessa base (segundo a ordem em que os vectores figuram na base) é dada por

$$B = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

d Sendo $x = (x_1, x_2, x_3)_{\mathcal{B}}$, ponhamos $s = [x_1\ x_2\ x_3]^t$. Vimos anteriormente que $y = (-1, -3, 1)$ é representado na base $\mathcal{B}$ como $y = s_1 + s_2 - u = (1, 1, -1)_{\mathcal{B}}$. Seja $t = [1\ 1\ -1]^t$. Vimos na alínea anterior que a matriz B que representa T na base $\mathcal{B}$ é triangular inferior sem zeros na diagonal principal. Consequentemente, B é invertível (e, portanto, também a transformação T é invertível). Daqui resulta que a equação $Tx = y$, sendo equivalente a $Bs = t$, tem uma única solução. A solução s pode ser obtida quer por eliminação de Gauss:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \vdots & 1\\ 1 & 1 & 0 & \vdots & 1\\ 0 & 1 & 1 & \vdots & -1\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \vdots & 1\\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0\\ 0 & 1 & 1 & \vdots & -1\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \vdots & 1\\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1\end{bmatrix} \Rightarrow s = \begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix},$$

quer usando a inversa da matriz B:

$$s = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = B^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Consequentemente

$$x = (1, 0, -1)_{\mathcal{B}} = s_1 - u = (1, 2, 3) - (3, 4, 4) = (-2, -2, -1).$$

Note-se ainda que o recurso à eliminação de Gauss ou à inversão de B não é indispensável para a resolução do problema, uma vez que da definição de T e tendo em conta a representação de y na base $\mathcal{B}$, se pode concluir que

$$T(s_1 - u) = Ts_1 - Tu = s_1 + s_2 - u = (-1, -3 - 1) = y,$$

donde, tendo em conta a unicidade da solução, resulta que $x = s_1 - u = (-2, -2, -1)$.

Exercício 35 *[2013/14 - Exame - V1 - Problema 7 - LEGM, MEC]*
Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z, w) = (x + 2z + w, x + 2y + 2z + 3w, x + y + 2z + 2w), \quad (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4.$$

(a) Determine bases para o núcleo de T, $N(T)$, e para a imagem de T; (b) Mostre que $(-3, 1, 2, -1)$ pertence a $N(T)$ e determine as suas componentes na base indicada anteriormente; (c) Mostre que a equação $Tu = (-1, 1, 0)$ é possível e determine o conjunto das suas soluções.

. . . .

Resolução:

a) Começamos por representar T em relação às bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$. Como

$$T(1, 0, 0, 0) = (1, 1, 1); \quad T(0, 1, 0, 0) = (0, 2, 1); \quad T(0, 0, 1, 0) = (2, 2, 2); \quad T(0, 0, 0, 1) = (1, 3, 2),$$

a matriz A que representa T naquelas bases é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

e o estudo da transformação T pode reduzir-se ao estudo da matriz A, sendo identificados o núcleo e a imagem de T com o o núcleo e o espaço das colunas de A, respectivamente. Para a determinação destes podemos recorrer ao método de eliminação de Gauss. Implementando-o, obtém-se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U.$$

Como se sabe o maior subconjunto das colunas de A linearmente independente em $\mathbb{R}^3$ é formado pelas colunas de A que correspondem (na ordem) às colunas de U com pivô, sendo esse conjunto uma base para o espaço das colunas de A, C_A. Assim, uma vez que U tem pivôs nas colunas 1 e 2, uma base (ordenada) de $I(T)$ ou de C_A é formada pelas duas primeiras colunas de A:

$$\mathcal{B}_{I(T)} = \big((1, 1, 1), (0, 2, 1)\big).$$

O método de eliminação de Gauss mantém inalterado o conjunto das soluções do sistema homogéneo em que a matriz A figura como matriz dos coeficientes, i.e. os sistemas $Av = 0$ e $Uv = 0$ têm o mesmo conjunto de soluções. Essas soluções são da forma $v = (-2z - w, -w, z, w) = z(-2, 0, 1, 0) + w(-1, -1, 0, 1)$, em que z e w são as incógnitas livres, $z, w \in \mathbb{R}$. Consequentemente, uma base (ordenada) do núcleo de T ou de A é

$$\mathcal{B}_{N(T)} = \big((-2, 0, 1, 0), (-1, -1, 0, 1)\big).$$

b) É claro que $(-3, 1, 2, -1) \in N(T)$, pois $T(-3, 1, 2, -1) = (-3 + 2 \times 2 - 1, -3 + 2 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times (-1), -3 + 1 + 2 \times 2 + 2 \times (-1)) = (0, 0, 0)$ ou $A[-3\ 1\ 2\ \ -1]^t = [0\ 0\ 0]^t$. A representação

$$(-3, 1, 2, -1) = \alpha(-2, 0, 1, 0) + \beta(-1, -1, 0, 1)$$

é imediata com $\alpha = 2$ e $\beta = -1$.

c) Ponhamos $s = (-1, 0, 1)$. Para mostrar que $Tu = s$ é possível basta mostrar que $s \in I(T)$, ou seja que existem $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tais que $s = \gamma(1, 1, 1) + \delta(0, 2, 1)$, o que facilmente se reconhece ser verdadeiro, com $\gamma = -1$ e $\delta = 1$. Tendo em conta, o significado das duas primeiras colunas de A, vem

$$s = (-1, 0, 1) = -1(1, 1, 1) + (0, 2, 1) = -T(1, 0, 0, 0) + T(0, 1, 0, 0) = T(-1, 1, 0, 0),$$

pelo que $u_p = (-1, 1, 0, 0)$ é uma solução particular de $Tu = s$.

Sendo T uma transformação linear, as soluções de $Tu = s$ são da forma $u = u_p + u_h$, em que u_p é uma solução particular e $u_h \in N(T)$. Como na alínea a) já caracterizámos o núcleo de T, segue-se que o conjunto S das soluções de $Tu = s$ é

$$S = \{u_p\} + N(T) = \{(-1, 1, 0, 0) + z(-2, 0, 1, 0) + w(-1, -1, 0, 1) : z, w \in \mathbb{R}\}.$$

Exercício 36 *[2014/15 - Exame - V1 - Problema 7 - MEEC]*

Sejam S e U os subespaços de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ das matrizes simétricas e anti-simétricas, respectivamente ($A \in S$, se $A = A^t$ e $A \in U$, se $A = -A^t$, em que A^t é a transposta de A).

a) Mostre que S e U têm dimensão 3 e 1, respectivamente, e explicite uma base para cada um deles; b) Mostre que $S \cap U = \{O\}$ (em que O é a matriz nula) e que $\mathbb{R}^{2\times 2} = S + U$; c) Sendo $B_c = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ a base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ e $B_S = (s_1, s_2, s_3)$, $B_U = (u)$ as bases identificadas na alínea anterior para S e U, respectivamente, considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que

$$Te_j = s_j, \text{ se } j = 1, 2, 3, \quad Te_4 = u$$

c1) Como se representa T na base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$? c2) Como se representa T na base $B = (s_1, s_2, s_3, u)$ de $\mathbb{R}^{2\times 2}$? c3) Mostre que T é invertível e obtenha a representação matricial da sua inversa numa das bases, que escolherá, B_c ou B.

....

Resolução:

a) Consideremos uma matriz arbitrária A de $\mathbb{R}^{2\times 2}$, i.e.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Então

$$A^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, \quad -A^t = \begin{bmatrix} -a & -c \\ -b & -d \end{bmatrix}.$$

Consequentemente, $A \in S \Leftrightarrow c = b$ e $A \in U \Leftrightarrow a = d = 0$ e $b = -c$, pelo que

$$A \in S \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} = ae_1 + b(e_2 + e_3) + de_4, \quad a, b, d \in \mathbb{R},$$

$$A \in U \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} = b(e_2 - e_3), \quad b \in \mathbb{R},$$

em que $B_c = (e_1.e_2, e_3, e_4)$ com $e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $e_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, é a base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Daqui resulta que os conjuntos $\{e_1, e_2 + e_3, e_4\}$ e $\{e_2 - e_3\}$ geram S e U, respectivamente, e, sendo linearmente independentes, constituem bases daqueles subespaços. Convencionaremos que

$$s_1 = e_1, \quad s_2 = e_2 + e_3, \quad s_3 = e_4, \quad u = e_2 - e_3$$

e consideraremos as bases ordenadas de S e U, respectivamente,

$$B_S = (s_1, s_2, s_3), \quad B_U = (u).$$

Sendo a dimensão de um subespaço não nulo o número de elementos de uma base é claro que $\dim S = 3$ e $\dim U = 1$.

b) Resulta do que fizemos anteriormente que $S \cap U = \{O\}$ em que O é a matriz nula. Por outro lado, de

$$A = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t) = A_s + A_u$$

com $A_s = (A + A^t)/2 \in S$ e $A_u = (A - A^t)/2 \in U$, conclui-se que $S + U = \mathbb{R}^{2\times 2}$, uma vez que a decomposição anterior é válida para qualquer matriz de ordem 2.

c) De acordo com convenção tomada para as bases de S e U, tem-se

$$Te_1 = s_1 = e_1, \quad Te_2 = s_2 = e_2 + e_3, \quad Te_3 = s_3 = e_4, \quad Te_4 = u = e_2 - e_3,$$

pelo que a matriz $M(T, B_c)$ que representa T na base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ é

$$M(T, B_c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Note-se que pela forma como foi definida a transformação T esta matriz é a chamada matriz de mudança da base canónica (B_c) para a base B. Tendo em conta a forma como se altera a representação matricial de uma transformação linear (com igual espaço de partida e de chegada) por via da alteração da base do espaço, imediatamente se conclui que a representação matricial de T na base B é a mesma que na base canónica (B_c). Além disso, como qualquer matriz de mudança de base é invertível, T é invertível, sendo representada em qualquer das duas bases pela matriz inversa de $M(T, B_c)$. Ora, facilmente se conclui, por qualquer dos métodos leccionados ou mesmo por inspeção (uma vez que se trata de um matriz com muitos elementos nulos), que a inversa de $M(T, B_c)$ é

$$(M(T, B_c))^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

o que encerra a resposta ao problema colocado, uma vez que a inversa de T tem a mesma representação matricial em qualquer das duas bases consideradas.