Álgebra Linear
Exercícios de avaliação resolvidos

Setembro 2015

[Exercícios baseados em provas de avaliação a cursos leccionados por Amarino Lebre.]

Sistemas de Equações Lineares, Matrizes e Determinantes

Exercício 1 *[2005/6 - 2º Exame - V1 - Problema 11 - LEEC]*

Sejam $\mu \in \mathbb{R}$ e $A_\mu = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & \mu \\ 3 & \mu^2 & \mu \end{bmatrix}$. Determine:

a) o determinante de A_μ, em função de μ;

b) a característica de A_μ, em função de μ;

c) a inversa de A_μ para $\mu = 1$.

....

<u>**Resolução**</u>:

a) Para calcular o determinante de A_μ usamos, por exemplo, a regra de Laplace por expansão segundo a primeira linha, obtendo-se:

$$\det A_\mu = -\begin{vmatrix} 1 & \mu \\ 3 & \mu \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & \mu^2 \end{vmatrix} = 2(\mu^2 + \mu - 12) = 2(\mu + 4)(\mu - 3).$$

b) De acordo com a alínea anterior, se $\mu \notin \{-4, 3\}$, então $\det A_\mu \neq 0$ e, consequentemente, A_μ é invertível, pelo que a sua característica é igual ao número de linhas ou de coluna de A_μ:

$$\operatorname{car} A_\mu = 3 \quad \text{se } \mu \notin \{-4, 3\}.$$

Se $\mu \in \{-4, 3\}$, a matriz A_μ é singular e, consequentemente a sua característica é inferior a 3. Para sabermos o valor exacto aplicamos a eliminação de Gauss a A_μ:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & \mu \\ 3 & \mu^2 & \mu \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 4 & \mu \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & \mu^2 & \mu \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 4 & \mu \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & \mu^2 - 12 & -2\mu \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 4 & \mu \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2(\mu^2 + \mu - 12) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & \mu \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

em que se usou o facto de ser $\mu^2 - 12 \neq 0$ para $\mu \in \{-4, 3\}$. Consequentemente

$$\operatorname{car} A_\mu = 2 \quad \text{se } \mu \in \{-4, 3\}.$$

uma vez que A_μ tem apenas dois pivôs.

Observe-se que o processo anterior permite determinar o valor da característica de A_μ para qualquer valor de μ, mas ter-se-ia de considerar separadamente os casos em que $\mu^2 - 12 = 0$.

c) Decorre da alínea (a) que, para $\mu = 1$, A_μ é invertível, pois $\det A_1 = -20 \neq 0$. Para calcular a inversa de A_1, determinamos a matriz dos cofactores de A_1 e usamos a expressão:

$$A_1^{-1} = \frac{1}{\det A_1} (\operatorname{cof} A_1)^t \,.$$

Tem-se

$$\operatorname{cof} A_1 = \operatorname{cof} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -11 \\ 1 & -6 & 3 \\ -7 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

e, portanto,

$$A_1^{-1} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} -3 & -1 & 7 \\ -2 & 6 & -2 \\ 11 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 2 *[2006/7 - 1° Teste - Problema 6 - MEC]*

Considere a matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ dada por $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Use o método de Gauss-Jordan para:

a) mostrar que A é invertível e para obter a sua inversa;

b) calcular o determinante de A.

....

Resolução:

a) Aplicamos o método de Gauss-Jordan à matriz aumentada $[A \,\vdots\, I]$, com a habitual convenção de notação: $X \xrightarrow{E} Y$ significa que $Y = EX$. Tem-se

$$
\begin{aligned}
[A \,\vdots\, I] \quad &= \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
(A \text{ invertível } \Leftarrow) \quad &\xrightarrow{P} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \\
&\xrightarrow{F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{D^{-1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{array}\right] = [I \,\vdots\, B]
\end{aligned}
$$

em que

$$
E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.
$$

No final da 1ª fase, que coincide com o final da eliminação de Gauss, conclui-se que A é não-singular (ou invertível), pois a matriz A deu origem a uma matriz triangular superior sem zeros na diagonal principal. No final do processo, tem-se $B = D^{-1}F_2F_3PE$ é tal que $BA = I$. Como B é invertível, por ser o produto de matrizes elementares cada uma delas invertível, conclui-se que é a inversa de A,

$$
A^{-1} = B = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}
$$

b) Da igualdade

$$
D^{-1}F_2F_3PEA = I,
$$

tendo em conta que o determinante de um produto é o produto dos determinantes, que $\det D^{-1} = 1/\det D$ e que

$$
\det E = \det F_3 = \det F_2 = 1, \quad \det P = -1, \quad \det D = 4
$$

obtém-se

$$
\det A = -\det D = -4.
$$

Exercício 3 *[2008/9 - 1° Teste - Problema 7 - LEIC]*

Seja
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Mostre que A é invertível e determine a sua inversa;

b) Calcule o determinante de A;

c) Resolva a equação
$$A^2\, u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

....

Resolução:

a):b) Resolvemos as duas primeiras alíneas por dois processos alternativos:
1° processo:

Aplicamos o método de Gauss-Jordan à matriz aumentada $[A \,\vdots\, I]$, com a habitual convenção de notação: $X \xrightarrow{E} Y$ significa que $Y = EX$. Tem-se

$$[A \,\vdots\, I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$(A \text{ invertível } \Leftarrow) \quad \xrightarrow{E_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{D^{-1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right] = [I \,\vdots\, B]$$

em que

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad F_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

No final da 1ª fase, que coincide com o final da eliminação de Gauss, conclui-se que A é não-singular (ou invertível), pois a matriz A deu origem a uma matriz triangular superior sem zeros na diagonal principal. No final do processo, tem-se $B = D^{-1}F_3E_2E_1$ é tal que $BA = I$. Como B é invertível, por ser o produto de matrizes elementares cada uma delas invertível, conclui-se que é a inversa de A,

$$A^{-1} = B = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Da igualdade
$$D^{-1}F_3E_2E_1A = I,$$
tendo em conta que o determinante de um produto é o produto dos determinantes, que $\det D^{-1} = 1/\det D$ e que
$$\det E_2 = \det E_1 = \det F_3 = 1, \quad \det D = -2$$
obtém-se
$$\det A = \det D = -2.$$

Uma outra forma de obter este resultado consiste em usar o facto de o método de eliminação sem troca de linhas (como é o caso) não alterar o determinante de uma matriz.

2° processo: Uma condição necessária e suficiente de invertibilidade de uma matriz é que o seu determinante seja diferente de zero. Se $\det A \neq 0$, a inversa de A pode ser calculada por via da matriz dos cofactores:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\big(\operatorname{cof} A\big)^t, \quad \operatorname{cof} A = [a'_{ij}], \quad a'_{ij} = (-1)^{i+j}\det A_{ij},$$

em que A_{ij} é a matriz que se obtém de A eliminando a linha i e a coluna j.

Para calcular o determinante de A podemos usar, por exemplo, a fórmula de Laplace por expansão segundo a 1ª linha, obtendo-se

$$\det A = a'_{11} + a'_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2.$$

Sendo $\det A \neq 0$, A é invertível. Para determinar a sua inversa basta calcular a matriz dos cofactores. Tem-se (dois dos cofactores da primeira linha já foram calculados)

$$a'_{11} = -1, \quad a'_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad a'_{13} = -1,$$

$$a'_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad a'_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad a'_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$a'_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad a'_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad a'_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

pelo que

$$\operatorname{cof} A = (\operatorname{cof} A)^t = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Em consequência

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

c) Comecemos por notar que a matriz dos coeficientes, A^2, é invertível, sendo a sua inversa $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2 = A^{-2}$. Efectivamente, da associatividade do produto de matrizes resulta que

$$(A^{-1})^2A^2 = (A^{-1}A^{-1})(AA) = A^{-1}(A^{-1}A)A = A^{-1}A = I.$$

Ora, sendo A^2 invertível, a equação $A^2u = b$ tem uma única solução dada por

$$u = (A^2)^{-1}b = A^{-2}b.$$

Neste caso

$$u = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}.$$

Exercício 4 *[2009/10 - 1° Teste - Problema 6 - MEC]*

Considere as seguintes matrizes de $\mathbb{R}^{3\times 3}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}.$$

1. Calcule sucessivamente:
   (a) a matriz dos cofactores de A, (b) o determinante de A, (c) a inversa de A (se existir).
2. Use o método de eliminação de Gauss para mostrar que, independentemente do vector $b \in \mathbb{R}^3$ considerado, a equação $Bu = b$ tem uma única solução.
3. Qual é a solução da equação $ABv = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$?

....

Resolução:

1. (a) A matriz dos cofactores de A, cof A, é a dada por

$$\operatorname{cof} A = [a'_{ij}]_{i,j=1}^{3}, \quad a'_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij},$$

em que A_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ é a matriz de ordem 2 que se obtém de A eliminando a linha i e a coluna j. Assim temos:

$$a'_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4, \qquad a'_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2, \qquad a'_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 6 = -3,$$
$$a'_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(-3) = 3, \quad a'_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1, \quad a'_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3,$$
$$a'_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2, \qquad a'_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(-1) = 1, \quad a'_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

Consequentemente

$$\operatorname{cof} A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. (b) Uma vez que na alínea anterior já foram determinados os cofactores de A, para calcular o determinante de A vamos usar a regra de Laplace,

$$\det A = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} a'_{ij} = \sum_{i=1}^{3} a_{ij} a'_{ij}$$

por expansão segundo uma linha ou coluna de A que seja mais vantajosa (ou seja com o maior número possível de zeros, para que o cálculo seja o mais simples possível). Neste caso, tanto as linha 1 e 2 como as colunas 2 e 3 servem esse objectivo. Escolhendo, a título de exemplo, a linha $i = 1$, tem-se:

$$\det A = a'_{11} + a'_{13} = 4 - 3 = 1.$$

1. (c) É condição necessária e suficiente para que A seja invertível que $\det A \neq 0$. Como vimos na alínea anterior $\det A = 1 \neq 0$. Consequentemente, A é invertível. Para determinar a sua inversa podemos usar os resultados anteriores, já que a inversa de A, A^{-1}, pode ser calculada por

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\operatorname{cof} A)^t.$$

Neste caso, tem-se

$$A^{-1} = (\operatorname{cof} A)^t = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Seja $b = (b_1, b_2, b_3)$ um elemento arbitrário de $\mathbb{R}^3$, que escrevemos na forma de vector coluna. Aplicamos o método de eliminação de Gauss à matriz aumentada $\left[B \,\vdots\, b\right]$, com a habitual convenção de notação: $X \xrightarrow{E} Y$ significa que $Y = EX$.

$$\left[B \vdots b\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 3 & 2 & 1 & b_2 \\ 2 & 5 & 9 & b_3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & -4 & -8 & b_2 - 3b_1 \\ 0 & 1 & 3 & b_3 - 2b1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & -4 & -8 & b_2 - 3b_1 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 + b_2/4 - 11b_1/4 \end{array}\right] = \left[U \vdots c\right]$$

em que

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1 \end{bmatrix}.$$

O método de eliminação de Gauss mantém invariante o conjunto das soluções de $Bu = b$ e, portanto, os sistemas $Bu = b$ e $Uu = c$ (U e c estão definidos acima e são, respectivamente, o resultado da eliminação de Gauss aplicado à matriz dos coeficientes e ao vector dos termos independentes) têm o mesmo conjunto de soluções. Como U é uma matriz triangular superior sem zeros na diagonal principal (ou seja, U tem tantos pivôs quantas as linhas ou colunas), a equação $Uu = c$ tem uma única solução, que pode ser obtida recursivamente. Sendo o processo válido para qualquer vector $b \in \mathbb{R}^3$, fica estabelecido o resultado pretendido.

3. Vimos na alínea 1 que a matriz A é invertível. Consequentemente, a única solução Bv de $ABv = e_3$, com $e_3 = (0, 0, 1)$ (escrito como vector coluna) é tal que $Bv = b$, em que b coincide com a terceira coluna de A^{-1}:

$$b = A^{-1}e_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, na alínea anterior vimos que o vector $v = (v_1, v_2, v_3)$, solução de $Bv = b$ se pode obter resolvendo o sistema mais simples $Uv = c$, cuja matriz aumentada é neste caso

$$\left[U \vdots c\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & -8 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 31/4 \end{array}\right].$$

Resolvendo, obtém-se

$$\begin{cases} v_3 = 31/4 \\ -4v_2 - 8v_3 = 7 \\ v_1 + 2v_2 + 3v_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_3 = 31/4 \\ v_2 = -69/4 \\ v_1 = 37/4 \end{cases}$$

Em conclusão, a solução da equação $ABv = e_3$ é $v = 1/4(37, -69, 31)$.

Exercício 5 *[2010/11 - 1° Teste - V1 - Problema 3 - MEEC]*

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine sucessivamente:

a) A matriz dos cofactores de A;

b) O determinante de A;

c) (Todas) as soluções da equação $Au = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

. . . .

Resolução:

a) Usando a notação habitual: $\operatorname{cof} A = [a'_{ij}]$, com $a'_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$, em que a matriz A_{ij} se obtém de A eliminando a linha i e a coluna j, neste caso temos:

$$a'_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad a'_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad a'_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1,$$
$$a'_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad a'_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad a'_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2,$$
$$a'_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad a'_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad a'_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1,$$

pelo que a matriz dos cofactores de A é

$$\operatorname{cof} A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

b) Uma vez que já conhecemos os cofactores de A o método mais simples para calcular o determinante consiste em usar a regra de Laplace, apesar de a matriz dada não ter nenhum zero. Usando a regra de Laplace, por expansão segundo a primeira linha (por exemplo), temos

$$\det A = a_{11}a'_{11} + a_{12}a'_{12} + a_{13}a'_{13} = a'_{11} + 2a'_{12} + a'_{13} = -1 + 2 - 1 = 0.$$

c) Como o segundo membro da equação a resolver coincide com a terceira coluna da matriz A, uma solução (particular) daquela equação é $u_p = (0, 0, 1)$. Resulta da alínea anterior que que a matriz A não é invertível (pois $\det A = 0$) e, portanto, a equação considerada tem infinitas soluções. A solução geral da equação em estudo é da forma $u = u_p + u_h$ em que $u_h \in N_A$, ou seja, $Au_h = 0$. Falta pois determinar as soluções desta equação (homogénea). Para tal podemos usar qualquer um dos dois processos a seguir indicados:

1 - Como se sabe, para qualquer matriz quadrada é válida a relação $A(\operatorname{cof} A)^t = (\det A)I$, em que I é a matriz identidade da ordem considerada. Por outro lado, vimos na alínea anterior que $\det A = 0$. Consequentemente, as colunas de $(\operatorname{cof} A)^t$ ou, o que é equivalente, as linhas de $\operatorname{cof} A$, contêm vectores que são soluções da equação $Au_h = 0$. Daqui resulta que as soluções desta equação são da forma $u_h = y(-1, 1, -1)$ com $y \in \mathbb{R}$ arbitrário.

2 - Usando o método de eliminação de Gauss:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

Daqui resulta que as soluções $u_h = (x, y, z)$ são tais que

$$\begin{cases} y + z & = 0 \\ x + 2y + z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -y \\ x = -y \end{cases}$$

e $y \in \mathbb{R}$ é arbitrário. Consequentemente, $u_h = y(-1, 1, -1), y \in \mathbb{R}$.

Tendo em conta as observações anteriores, concluímos finalmente que o conjunto das soluções da equação $Au = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é

$$\{u = (0, 0, 1) + y(-1, 1, -1) : y \in \mathbb{R}\} = \{u = (-y, y, 1 - y) : y \in \mathbb{R}\}.$$

Exercício 6 *[2012/13 - 1° Teste - V1 - Problema 4 - LEGM, MEC]*

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

e note que elas apenas diferem na primeira linha. Determine sucessivamente:

a) A matriz dos cofactores de A;

b) Os determinantes das matrizes A e B;

c) (Todas) as soluções da equação $ABu = \begin{bmatrix} 16 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

. . . .

Resolução:

a) Por definição a matriz dos cofactores de A é a matriz

$$\operatorname{cof} A = [a'_{ij}], \quad a'_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij},$$

em que A_{ij} se obtém de A eliminando a linha i e a coluna j. Neste caso particular temos:

$$\begin{array}{lll} a'_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1, & a'_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1, & a'_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1, \\ a'_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 9, & a'_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -10, & a'_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7, \\ a'_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -6, & a'_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 7, & a'_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5, \end{array}$$

pelo que a matriz dos cofactores de A é

$$\operatorname{cof} A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 9 & -10 & 7 \\ -6 & 7 & -5 \end{bmatrix}.$$

b) Uma vez que já conhecemos os cofactores de A o método mais simples para calcular o determinante de A consiste em usar a regra de Laplace, apesar de a matriz dada não ter nenhum zero. Como, por outro lado, a matriz B só difere de A no elemento 13, os cofactores dos elementos da primeira linha (ou, em alternativa, da terceira coluna) são iguais para ambas as matrizes:

$$a'_{11} = b'_{11} = 1, \quad a'_{12} = b'_{12} = -1, \quad a'_{13} = b'_{13} = 1.$$

Então, usando a regra de Laplace, por expansão segundo a primeira linha, temos

$$\det A = a_{11}a'_{11} + a_{12}a'_{12} + a_{13}a'_{13} = a'_{11} + 3a'_{12} + 3a'_{13} = 1 - 3 + 3 = 1,$$

$$\det B = b_{11}b'_{11} + b_{12}b'_{12} + b_{13}b'_{13} = b'_{11} + 3b'_{12} + 2b'_{13} = 1 - 3 + 2 = 0.$$

c) Como vimos na alínea anterior o determinante de A é diferente de zero e, portanto, a matriz A é invertível. A sua inversa é dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\operatorname{cof} A)^t = (\operatorname{cof} A)^t = \begin{bmatrix} 1 & 9 & -6 \\ -1 & -10 & 7 \\ 1 & 7 & -5 \end{bmatrix}.$$

Sendo A invertível, a equação $ABu = \begin{bmatrix} 16 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ é equivalente a

$$Bu = A^{-1} \begin{bmatrix} 16 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad Bu = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Note-se agora que o segundo membro da última desta equações coincide com a primeira coluna da matriz B, pelo que uma solução particular desta equação é o vector $u_p = (1, 0, 0)$ escrito como vector coluna. Como se sabe, a solução geral u dessa equação é da forma

$$u = u_p + u_h, \quad \text{com } u_h \in N_B,$$

em que $N_B = \{u_h : Bu_h = 0\}$ é o núcleo da matriz B e pode ser facilmente determinado usando o método de eliminação de Gauss. Implementando-o, vem

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -7 & -7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde se conclui facilmente que $u_h = \alpha(1, -1, 1), \alpha \in \mathbb{R}$. Consequentemente a solução geral da equação considerada é da forma

$$u = (1, 0, 0) + \alpha(1, -1, 1) = (1 + \alpha, -\alpha, \alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Exercício 7 *[2013/14 - 1° Teste - V1 - Problema 4 - LEGM, MEC]*

Considere a matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ dada por $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -8 \end{bmatrix}$ e seja $b = \begin{bmatrix} 1 \\ \det A \\ 3 \end{bmatrix}$. Determine:

a) A matriz dos cofactores de A e o determinante de A; b) As soluções da equação $Au = b$; c) Dessas soluções a que pertence ao plano $P = \{\alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

d) Mostre que uma matriz quadrada não pode ser simultaneamente singular e invertível.

....

Resolução:

(a) Por definição, a matriz dos cofactores de A, cof A, é a dada por

$$\operatorname{cof} A = [a'_{ij}]_{i,j=1}^3, \quad a'_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij},$$

em que A_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ é a matriz de ordem 2 que se obtém de A eliminando a linha i e a coluna j. Assim temos:

$$\begin{aligned} a'_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} ; \\ &= -8 - 10 = -18 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a'_{12} &= -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} ; \\ &= -(-16 - 2) = 18 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a'_{13} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} ; \\ &= 10 - 1 = 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a'_{21} &= -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} ; \\ &= -(-16 + 10) = 6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a'_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} ; \\ &= -8 + 2 = -6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a'_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} ; \\ &= -(5 - 2) = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a'_{31} &= \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} ; \\ &= 4 + 2 = 6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a'_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} ; \\ &= -(2 + 4) = -6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a'_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} . \\ &= 1 - 4 = -3 \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\operatorname{cof} A = \begin{bmatrix} -18 & 18 & 9 \\ 6 & -6 & -3 \\ 6 & -6 & -3 \end{bmatrix}.$$

Uma vez que já foram determinados os cofactores de A, para calcular o determinante de A vamos usar a regra de Laplace,

$$\det A = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} a'_{ij} = \sum_{i=1}^{3} a_{ij} a'_{ij}$$

por expansão segundo uma linha ou coluna de A. Neste caso, não havendo elementos nulos na matriz A, não há escolha preferencial do ponto de vista do trabalho de cálculo. Escolhendo, a título de exemplo, a linha $i = 1$, tem-se:

$$\det A = a_{11}a'_{11} + a_{12}a'_{12} + a_{13}a'_{13} = 1 \times (-18) + 2 \times 18 - 2 \times 9 = 0.$$

(b) As soluções do sistema $Au = b$ podem ser obtidas pelo método de eliminação de Gauss. Neste caso, o segundo membro depende do valor do determinante da matriz dos coeficientes, que foi determinado anteriormente, $b = (1, 0, 3)$. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz aumentada do sistema $\left[A \vdots b\right]$, com a habitual convenção de notação: $X \xrightarrow{E} Y$ significa que $Y = EX$, vem

$$\left[A \vdots b\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -8 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[U \vdots c\right]$$

em que

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

O método de eliminação de Gauss mantém invariante o conjunto das soluções de $Au = b$ e, portanto, os sistemas $Au = b$ e $Uu = c$ (U e c estão definidos acima e são, respectivamente, o resultado da eliminação de Gauss aplicado à matriz dos coeficientes e ao vector dos termos independentes) têm o mesmo conjunto de soluções. Como U é uma matriz triangular superior com um zero na diagonal principal, na posição 33, sendo a linha 3 nula, e o vector c tem a 3ª componente nula, o sistema $Uu = c$ é possível e indeterminado. As soluções podem ser obtidas em função da incógnita livre (a terceira, a que corresponde à coluna sem pivô), por um processo recursivo. Usando $u = (x, y, z)$ para o vector solução, $z \in \mathbb{R}$ é arbitrário. Da segunda equação obtém-se: $-3y + 6z = -2 \Leftrightarrow y = 2z + 2/3$. Substituíndo este resultado na primeira equação: $x + 2y - 2z = 1$, vem $x = -2z - 1/3$. Estes resultados poderiam ser obtidos directamente pelo método de Gauss-Jordan se a eliminação prosseguisse, dispensando a determinação recursiva das incógnitas.

Assim se conclui que o conjunto S das soluções de $Au = b$ é dado por

$$\begin{aligned} S &= \{u \in \mathbb{R}^3 : u = (-1/3 - 2z, 2/3 + 2z, z), z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{u \in \mathbb{R}^3 : u = (-1/3, 2/3, 0) + z(-2, 2, 1), z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

(c) O plano P é caracterizado por ser formado por vectores de $\mathbb{R}^3$ com a terceira componente nula. Ora, das soluções anteriormente determinadas a única que satisfaz a esta condição é $(-1/3, 2/3, 0)$ (a solução particular, correspondente a tomar $z = 0$), pelo que $\alpha = -1/3, \beta = 2/3$. Consequentemente, $S \cap P = \{(-1/3, 2/3, 0)\}$.

Alternativamente, poderiamos ter usando o seguinte procedimento: Escrevendo os vectores de P na forma de vectores coluna e tendo em conta que

$$A\left(\alpha\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)=\alpha\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}2\\1\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\\1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix}$$

facilmente se conclui que o par (α,β) solução da equação

$$\begin{bmatrix}1&2\\2&1\\1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\\det A\\3\end{bmatrix}\qquad(\det A=0)$$

coincide com o par das duas primeiras componentes de vector $(-1/3,2/3,0)$, solução particular da equação considerada em b), i.e. $\alpha=-1/3,\beta=2/3$ (Verifique!).

(d) Efectivamente, supondo que a matriz quadrada A é invertível, com inversa A^{-1}, o sistema de equações $Au=0$ tem como única solução o vector zero, pois $u=(A^{-1}A)u=A^{-1}(Au)=A^{-1}0=0$. Por outro lado, supondo que a matriz quadrada A é singular, tal significa que a matriz triangular superior U que dela se obtém por eliminação de Gauss, tem (pelo menos) um zero na diagonal principal, sendo o sistema de equações $Uu=0$ possível e indeterminado, com grau de indeterminação maior ou igual a 1. Como os sistemas $Au=0$ e $Uu=0$ têm o mesmo conjunto de soluções, tal implica que $Au=0$ tem soluções não nulas. Daqui resulta que A não pode ser simultaneamente singular e invertível.

Exercício 8 *[2013/14 - Exame - V1 - Problema 6 - LEGM, MEC]*

Sejam $\mu\in\mathbb{R}$ e $A_\mu=\begin{bmatrix}0&3&-1\\1&5&\mu\\2&\mu^2&2(\mu+1)\end{bmatrix}$.

(a) Calcule o determinante de A_μ (em função de μ); (b) Determine a característica de A_μ (em função de μ); (c) Para $\mu=1$ determine a matriz dos cofactores de A_1 e use-a para obter a inversa de A_1; (d) Seja X uma matriz invertível, com inversa X^{-1}, X^t a sua transposta e cof X a matriz dos cofactores de X: mostre que (i) X^t é invertível e que (ii) $(\mathrm{cof}\,X)^t=\mathrm{cof}\,(X^t)$.

....

Resolução:

(a) e (b) Tendo em conta o que se pede na alínea (b), há vantagem em resolver simultaneamente (a) e (b), uma vez que o método de eliminação de Gauss também permite calcular o determinante de A_μ. Implementando-o, obtém-se:

$$A_\mu=\begin{bmatrix}0&3&-1\\1&5&\mu\\2&\mu^2&2(\mu+1)\end{bmatrix}\xrightarrow{P}\begin{bmatrix}1&5&\mu\\0&3&-1\\2&\mu^2&2(\mu+1)\end{bmatrix}\xrightarrow{E_1}\begin{bmatrix}1&5&\mu\\0&3&-1\\0&\mu^2-10&2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_2}\begin{bmatrix}1&5&\mu\\0&3&-1\\0&0&2+\frac{\mu^2-10}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&5&\mu\\0&3&-1\\0&0&\frac{(\mu-2)(\mu+2)}{3}\end{bmatrix}=U_\mu$$

Como se sabe, em consequência da regra do produto de determinantes, o método de eliminação de Gauss não altera o valor absoluto do determinante, apenas podendo alterar o sinal caso haja trocas de linhas, como foi o caso no primeiro passo. Então

$$\det A_\mu=-\det U_\mu=-(\mu-2)(\mu+2).$$

A característica de A_μ, $\operatorname{car} A_\mu$, é, por definição, o número de pivôs de U_μ, pelo que

$$\operatorname{car} A_\mu = \begin{cases} 2 & \text{se } \mu = \pm 2, \\ 3 & \text{se } \mu \neq \pm 2. \end{cases}$$

(c) Por definição, a matriz dos cofactores de A_1, $\operatorname{cof} A_1$, é a dada por

$$\operatorname{cof} A_1 = [a'_{ij}]_{i,j=1}^3, \quad a'_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_1)_{ij},$$

em que $(A_1)_{ij}$ $(i,j = 1,2,3)$ é a matriz de ordem 2 que se obtém de A_1 eliminando a linha i e a coluna j. Assim temos:

$$\begin{aligned} a'_{11} &= \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 20 - 1 = 19 \end{aligned}; \quad \begin{aligned} a'_{12} &= -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= -(4-2) = -2 \end{aligned}; \quad \begin{aligned} a'_{13} &= \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 - 10 = -9 \end{aligned};$$

$$\begin{aligned} a'_{21} &= -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= -(12+1) = -13 \end{aligned}; \quad \begin{aligned} a'_{22} &= \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 0 + 2 = 2 \end{aligned}; \quad \begin{aligned} a'_{23} &= -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -(0-6) = 6 \end{aligned};$$

$$\begin{aligned} a'_{31} &= \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3 + 5 = 8 \end{aligned}; \quad \begin{aligned} a'_{32} &= -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -(0+1) = -1 \end{aligned}; \quad \begin{aligned} a'_{33} &= \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 0 - 3 = -3 \end{aligned}.$$

Consequentemente,

$$\operatorname{cof} A_1 = \begin{bmatrix} 19 & -2 & -9 \\ -13 & 2 & 6 \\ 8 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

A inversa de A_1 obtém-se da matriz dos cofactores pela fórmula ${A_1}^{-1} = \frac{1}{\det A_1}(\operatorname{cof} A_1)^t$. Resulta da alínea a) que $\det A_1 = 3$, pelo que

$${A_1}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 19 & -13 & 8 \\ -2 & 2 & -1 \\ -9 & 6 & -3 \end{bmatrix}.$$

(d) Sendo X invertível com inversa X^{-1}, tem-se

$$XX^{-1} = X^{-1}X = I.$$

Por transposição das igualdades anteriores, segue-se que

$$(X^{-1})^t X^t = X^t (X^{-1})^t = I,$$

o que significa que X^t é invertível, com inversa $(X^{-1})^t$, ou seja $(X^t)^{-1} = (X^{-1})^t$, o que prova a primeira parte. Tomando Y em vez de X nas relações anteriores conclui-se que, se Y é invertível, então $(Y^t)^{-1} = (Y^{-1})^t$. Como se sabe e usámos na alínea anterior, a inversa de Y pode ser calculada por $Y^{-1} = \frac{1}{\det Y}(\operatorname{cof} Y)^t$. Então, tomando $X = Y^t$, X e Y são simultaneamente invertíveis, $\det X = \det Y$ e

$$X^{-1} = (Y^t)^{-1} = (Y^{-1})^t = \frac{1}{\det Y} \operatorname{cof} Y = \frac{1}{\det X} \operatorname{cof} X^t.$$

Tendo em conta que $X^{-1} = \frac{1}{\det X}(\operatorname{cof} X)^t$ e a unicidade da inversa de uma matriz, tal prova que

$$(\operatorname{cof} X)^t = \operatorname{cof} X^t.$$

Exercício 9 *[2014/15 - 1° Teste - V1 - Problema 4 - MEEC]*

Considere as matrizes reais: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -3 \\ -2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Mostre que A é invertível e determine a sua inversa pelo método de Gauss-Jordan; (b) Sendo $b = (0,0,1)$, determine se existirem (todas) as soluções do SEL: $ABu = b$; (c) Alguma dessas soluções pertence ao plano $P = \{(x,y,z) : y = z\}$?

....

__Resolução__:

(a) Aplicamos o método de Gauss-Jordan à matriz aumentada $[A \vdots I]$, com a habitual convenção de notação: $X \xrightarrow{E} Y$ significa que $Y = EX$. Tem-se

$$[A \vdots I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$(A \text{ invertível } \Leftarrow) \xrightarrow{E_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -11 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{D^{-1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 2 & -1 \end{array}\right] = [I \vdots B]$$

em que

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad F_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

No final da 1ª fase, que coincide com o final da eliminação de Gauss, conclui-se que A é não-singular (ou invertível), pois a matriz A deu origem a uma matriz triangular superior sem zeros na diagonal principal. No final do processo, tem-se $B = D^{-1}F_3E_2E_1$ é tal que $BA = I$. Como B é invertível, por ser o produto de matrizes elementares cada uma delas invertível, conclui-se que é a inversa de A,

$$A^{-1} = B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ -6 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

(b) Vimos na alínea anterior que A é invertível. Consequentemente, a equação que se pretende resolver é equivalente à seguinte:

$$Bu = \tilde{b}, \text{ com } \tilde{b} = A^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

pois $Bu = A^{-1}(ABu) = A^{-1}b$. Note-se que o vector $\tilde{b}$ coincide com a terceira coluna de A^{-1}. Para resolver a equação anterior podemos usar o método de eliiminação de Gauss-Jordan, aplicado à matriz aumentada $[B \vdots \tilde{b}]$. Implementando-o, obtém-se

$$[B \vdots \tilde{b}] \quad = \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{D^{-1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

em que

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad F_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Daqui se conclui que o sistema em consideração é possível e indeterminado, sendo a terceira das incógnitas livre. Sendo $u = (x, y, z)$ (escrito como vector coluna), vem $x = 1/2 - z, y = 1/2, z \in \mathbb{R}$, pelo que a solução geral da equação original é dada por

$$u = (1/2, 1/2, 0) + z(-1, 0, 1), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Em alternativa, para determinar as soluções, poder-se-ia ter usado apenas a eliminação de Gauss.

(c) O plano P é caracterizado por ter as segunda e terceira componentes iguais. Ora, como as soluções anteriormente obtidas têm a segunda componente determinada, $y = 1/2$, a solução u_P que pertence ao plano P é aquela que se obtém da solução geral tomando $z = 1/2$, ou seja,

$$u_P = (0, 1/2, 1/2).$$

Exercício 10 *[2014/15 - Exame - V1 - Problema 6 - MEEC]*

Sejam $\mu \in \mathbb{R}$ e $A_\mu = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & \mu^2 \\ 2 & \mu+6 & 4 \end{bmatrix}$.

a) Calcule, em função de μ, a característica de A_μ; b) Calcule, em função de μ, o determinante de A_μ; c) Para $\mu = 2$, considere o sistema de equações lineares $A_2 u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ e determine as suas soluções (caso as haja).

. . . .

Resolução:

(a) Por definição, a característica de A_μ, car A_μ, é o número de pivôs da matriz que se obtém de A_μ por eliminação de Gauss; Implementando-o para este caso concreto, usando a habitual convenção de notação, vem

$$A_\mu = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & \mu^2 \\ 2 & \mu+6 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \mu^2-4 \\ 0 & \mu+2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{P} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & \mu+2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu^2-4 \end{bmatrix},$$

em que

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tendo em conta que $\mu^2 - 4 = (\mu - 2)(\mu + 2)$, conclui-se que

$$\operatorname{car} A_\mu = \begin{cases} 1 & , \text{ se } \mu = -2 \\ 2 & , \text{ se } \mu = 2 \\ 3 & , \text{ se } \mu \neq \pm 2 \end{cases} .$$

(b) Um dos métodos de cálculo de determinantes que vimos foi baseado no método eliminação de Gauss: O valor absoluto do determinante não é alterado por este, havendo apenas troca do sinal por cada troca de linhas efectuada ao longo do processo. Tendo em conta que no passo 2 trocámos as linhas 2 e 3, concluímos que:

$$\det A_\mu = -\det U_\mu = -(\mu + 2)(\mu^2 - 4) = -(\mu - 2)(\mu + 2)^2,$$

pois o determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos da diagonal principal.

(c) Uma vez que já implementámos a eliminação de Gauss para a matriz dos coeficientes, basta analisar como se altera o termo independente. Tem-se

$$c = PEb = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, a matriz aumentada do SEL considerado ($\mu = 2$) é transformada como se segue:

$$[A_2 \vdots b] \overset{PE}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 4 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} = [U_2 \vdots c].$$

Daqui resulta que o SEL é possível, pois as características das matrizes dos coeficientes e aumentada do SEL são iguais, que o sistema é indeterminado (havendo uma linha de zeros na matriz dos coeficientes, a terceira, a componente de ordem 3 do termo independente é nula), que não havendo pivô na terceira coluna a terceira incógnita é livre, e que as soluções $u = (x, y, z)$ do sistema com $z \in \mathbb{R}$, são tais que $y = 1/4$ e $x + 2y + 2z = 1$ (ou, o que é equivalente $x = -2z + 1/2$). Consequentemente, a solução geral do SEL considerado é

$$u = (-2z + 1/2, 1/4, z) = (1/2, 1/4, 0) + z(-2, 0, 1), \quad z \in \mathbb{R}.$$
