# Álgebra Linear
# Exercícios de Avaliação

Setembro 2015

[Exercícios baseados em provas de avaliação a cursos leccionados por Amarino Lebre.]

## Sistemas de Equações Lineares, Matrizes e Determinantes

---

**Exercício 1** *[2005/6 - 2º Exame - V1 - Problema 11 - LEEC]*

Sejam $\mu \in \mathbb{R}$ e $A_\mu = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & \mu \\ 3 & \mu^2 & \mu \end{bmatrix}$. Determine:

a) o determinante de $A_\mu$, em função de $\mu$;

b) a característica de $A_\mu$, em função de $\mu$;

c) a inversa de $A_\mu$ para $\mu = 1$.

---

**Exercício 2** *[2006/7 - 1º Teste - Problema 6 - MEC]*

Considere a matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ dada por $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Use o método de Gauss-Jordan para:

a) mostrar que $A$ é invertível e para obter a sua inversa;

b) calcular o determinante de $A$.

---

**Exercício 3** *[2008/9 - 1º Teste - Problema 7 - LEIC]*

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Mostre que $A$ é invertível e determine a sua inversa;

b) Calcule o determinante de $A$;

c) Resolva a equação

$$A^2 u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

---

**Exercício 4** *[2009/10 - 1º Teste - Problema 6 - MEC]*

Considere as seguintes matrizes de $\mathbb{R}^{3\times 3}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}.$$

1. Calcule sucessivamente:
   (a) a matriz dos cofactores de $A$, (b) o determinante de $A$, (c) a inversa de $A$ (se existir).

2. Use o método de eliminação de Gauss para mostrar que, independentemente do vector $b \in \mathbb{R}^3$ considerado, a equação $Bu = b$ tem uma única solução.

3. Qual é a solução da equação $ABv = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$?

---

**Exercício 5** *[2010/11 - 1° Teste - V1 - Problema 3 - MEEC]*

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine sucessivamente:

a) A matriz dos cofactores de $A$;

b) O determinante de $A$;

c) (Todas) as soluções da equação $Au = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

---

**Exercício 6** *[2012/13 - 1° Teste - V1 - Problema 4 - LEGM, MEC]*

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

e note que elas apenas diferem na primeira linha. Determine sucessivamente:

a) A matriz dos cofactores de $A$;

b) Os determinantes das matrizes $A$ e $B$;

c) (Todas) as soluções da equação $ABu = \begin{bmatrix} 16 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

---

**Exercício 7** *[2013/14 - 1° Teste - V1 - Problema 4 - LEGM, MEC]*

Considere a matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ dada por $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -8 \end{bmatrix}$ e seja $b = \begin{bmatrix} 1 \\ \det A \\ 3 \end{bmatrix}$. Determine:

a) A matriz dos cofactores de $A$ e o determinante de $A$; b) As soluções da equação $Au = b$; c) Dessas soluções a que pertence ao plano $P = \{\alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

d) Mostre que uma matriz quadrada não pode ser simultaneamente singular e invertível.

---

**Exercício 8** *[2013/14 - Exame - V1 - Problema 6 - LEGM, MEC]*

Sejam $\mu \in \mathbb{R}$ e $A_\mu = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & \mu \\ 2 & \mu^2 & 2(\mu+1) \end{bmatrix}$.

(a) Calcule o determinante de $A_\mu$ (em função de $\mu$); (b) Determine a característica de $A_\mu$ (em função de $\mu$); (c) Para $\mu = 1$ determine a matriz dos cofactores de $A_1$ e use-a para obter a inversa de $A_1$; (d) Seja $X$ uma matriz invertível, com inversa $X^{-1}$, $X^t$ a sua transposta e cof $X$ a matriz dos cofactores de $X$: mostre que (i) $X^t$ é invertível e que (ii) $(\operatorname{cof} X)^t = \operatorname{cof}(X^t)$.

---

**Exercício 9** *[2014/15 - 1° Teste - V1 - Problema 4 - MEEC]*

Considere as matrizes reais: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -3 \\ -2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Mostre que $A$ é invertível e determine a sua inversa pelo método de Gauss-Jordan; (b) Sendo $b = (0, 0, 1)$, determine se existirem (todas) as soluções do SEL: $ABu = b$; (c) Alguma dessas soluções pertence ao plano $P = \{(x, y, z) : y = z\}$?

---

**Exercício 10** *[2014/15 - Exame - V1 - Problema 6 - MEEC]*

Sejam $\mu \in \mathbb{R}$ e $A_\mu = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & \mu^2 \\ 2 & \mu + 6 & 4 \end{bmatrix}$.

a) Calcule, em função de $\mu$, a característica de $A_\mu$; b) Calcule, em função de $\mu$, o determinante de $A_\mu$;

c) Para $\mu = 2$, considere o sistema de equações lineares $A_2 u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ e determine as suas soluções (caso as haja).

---

---

**Exercício 11** *[2005/6 - 1° Teste - Problema 6 - LEEC]*

Considere a matriz $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ dada por $S = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 12 & 10 \end{bmatrix}$.

a) Use o método de Gauss-Jordan para mostrar que $S$ é invertível e para obter a sua inversa.

b) Seja $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$ e suponha que $S$ representa a matriz de mudança da base $\mathcal{B}$ para a base canónica de $\mathbb{R}^3$. Identifique a base $\mathcal{B}$ e determine as componentes do vector $x = (1, 2, 3)$ nesta base.

---

**Exercício 12** *[2005/6 - 1° Teste - Problema 7 - LEEC]*

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e considere a matriz $A_\alpha$ dada por:

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ \alpha & 1 & -2 \\ 2 & 5 & \alpha \end{bmatrix} .$$

a) Calcule o determinante de $A_\alpha$ e indique todos os valores de $\alpha$ para os quais $A_\alpha$ é invertível.

b) Para $\alpha = 1$ indique a matriz dos cofactores de $A_\alpha$, cof $A_\alpha$, e use-a para determinar a inversa de $A_\alpha$.

c) Para $\alpha = 2$ indique uma base para $N_{A_\alpha}$, o núcleo ou espaço nulo de $A_\alpha$.

---

**Exercício 13** *[2005/6 - 1° Exame - V1 - Problema 11 - LEEC]*

Considere a matriz $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ dada por $S = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Mostre que $S$ é invertível e obtenha a sua inversa.

b) Suponha que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ é uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$ em que as componentes do vector $v_j$, $j = 1, 2, 3$, na base canónica constituem a linha $j$ da matriz $S^2$. Identifique a base $\mathcal{B}$ e determine as componentes do vector $v = (1, 1, 1)$ nesta base.

---

**Exercício 14** *[2006/7 - 1° Teste - Problema 7 - MEC]*

1. Seja $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset \mathbb{R}^4$ com

$$v_1 = (1, 1, 2, 3) \quad , \quad v_2 = (1, 1, -2, -3) \quad , \quad v_3 = (1, 1, 4, 6) \quad , \quad v_4 = (3, 3, 4, 6) \quad .$$

   a) Indique a dimensão e determine uma base $B$ do subespaço $L(S)$, o subespaço gerado por $S$;

   b) Mostre que o vector $u = (1, -1, 0, 0)$ não pertence a $L(S)$;

   c) Construa uma base de $\mathbb{R}^4$ que contém o conjunto $B$.

2. Sendo $X$ uma matriz quadrada, representemos por $\operatorname{cof} X$ a matriz dos cofactores de $X$. Sejam $A$ e $B$ matrizes invertíveis da mesma ordem. Mostre que

$$\operatorname{cof}(AB) = \operatorname{cof} A \operatorname{cof} B\ .$$

---

**Exercício 15** *[2007/8 - 1° Teste - Problema 6 - MEC]*

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = BA.$$

1. Mostre que $A$ é invertível, determine a sua inversa e resolva a equação $Au = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.
2. Identifique o núcleo da matriz $B$.
3. Sem efectuar mais cálculos, indique uma base para o núcleo da matriz $C$.

---

**Exercício 16** *[2007/8 - 1° Teste - Problema 7 - MEC]*

1. Seja $R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Determine
   a) uma base para o espaço das colunas de $R$,
   b) uma base para o núcleo de $R$.
   c) Sem efectuar mais cálculos, diga se é possível existir uma matriz $S$ tal que $RS$ é invertível.
2. Designe por $\mathcal{S}$ o subespaço de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ gerado pelas quatro matrizes seguintes:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

   a) Qual é a dimensão de $\mathcal{S}$?
   b) Sendo $M = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -10 & 1 \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, mostre que $M \in \mathcal{S}$ e que $N \notin \mathcal{S}$.

---

**Exercício 17** *[2007/8 - 1° Exame - V1 - Problema 11 - MEC]*

Usando a habitual convenção de escrever os elementos de $\mathbb{R}^n$ na forma de vectores coluna, considere um sistema de equações na forma matricial $Au = b$, em que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

1. Obtenha uma base para $N_A$, o núcleo da matriz $A$;

2. Mostre que o vector $u = (5, -2, 1, 2, -3)$ pertence a $N_A$ e indique as suas componentes em relação à base que indicou em 1.;

3. Escolha da lista seguinte um vector $b$ para o qual o sistema $Au = b$ seja possível e determine o conjunto das soluções deste sistema.

   (a) $b$=(2,3,2), (b) $b$=(2,3,1), (c) $b$=(1,0,2), (d) $b$=(1,1,2).

---

**Exercício 18** *[2008/9 - 1° Teste - Problema 8 - LEIC]*

Seja
$$S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z - w = 0\}.$$

a) Mostre que $S$ é um subespaço de $\mathbb{R}^4$, calcule a sua dimensão e indique uma base de $S$; Designe essa base por $\mathcal{B}_S$.

b) Escolha uma base ordenada $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ que contenha $\mathcal{B}_S$.

c) Como se representa na base canónica o elemento de $\mathbb{R}^4$ cujo vector das componentes na base $\mathcal{B}$ (que indicou na alínea anterior) é (1,2,3,4)?

---

**Exercício 19** *[2009/10 - 1° Teste - Problema 7 - MEC]*

Seja $S$ o subconjunto de $\mathbb{R}^4$ formado pelos seguintes quatro vectores
$$v_1 = (1, 1, 2, 3), \quad v_2 = (0, 1, 2, 2), \quad v_3 = (2, -1, -1, 0), \quad v_4 = (3, 1, 2, 5).$$

1. Indique um subconjunto $U$ de $S$, com três elementos, tal que

   a) $U$ é linearmente independente;

   b) $U$ é linearmente dependente.

2. Indique uma base para $L(S)$ — o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por $S$ — e determine as componentes do vector $v_1 + v_2 - v_4$ nessa base.

3. Representando por $A$ a matriz $4 \times 4$ cuja coluna $j$ (j=1,2,3,4) é constituída pelas componentes (na base canónica) do vector $v_j$, determine uma base de $N_A$ — o núcleo ou espaço nulo de $A$ — e resolva a equação
$$Au = b, \quad b = v_1 + v_2 - v_4.$$

---

**Exercício 20** *[2009/10 - 1° Exame - Problema 11 - MEC]*

Considere as seguintes matrizes de $\mathbb{R}^{3\times 3}$:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & -1 \end{bmatrix}.$$

1. (a) Calcule $\det A$; (b) mostre que $A$ é invertível e, posteriormente, (c) calcule a inversa de $A$.

2. Indique bases para o espaço das linhas, para o espaço das colunas e para o núcleo da matriz $B$.

3. Verifique que a equação

$$BAu = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

é possível e determine todas as soluções desta equação.

---

**Exercício 21** *[2009/10 - 1° Exame - Problema 12 - MEC]*

1. Sejam

$$v_1 = (1, 2, 3), \quad v_2 = (1, 1, 1), \quad v_3 = (1, 0, 2).$$

   a) Mostre que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ é uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$.

   b) Determine o vector $y \in \mathbb{R}^3$ das componentes do vector $x = (1, 1, 2)$ na base $\mathcal{B}$.

2. Considere a matriz de permutação

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a seja $\mathcal{S}$ o subconjunto de $\mathbb{R}^{3\times 3}$ formado pelas matrizes $A$ tais que

$$PA = AP.$$

Mostre que $\mathcal{S}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^{3\times 3}$ e indique uma base para $\mathcal{S}$, bem como a sua dimensão.

---

**Exercício 22** *[2010/11 - Exame - V1 - Problema 6 - MEEC]*

Usando a habitual convenção de escrever os elementos de $\mathbb{R}^4$ na forma de vectores coluna, considere um sistema de equações na forma matricial $Au = b$, em que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & -7 & 7 \end{bmatrix}.$$

a) Obtenha uma base para $N_A$, o núcleo da matriz $A$;

b) Mostre que o vector $u = (-5, 2, 2, 1)$ pertence a $N_A$ e indique as suas componentes em relação à base que indicou em a);

c) Escolha da lista seguinte um vector $b$ para o qual o sistema $Au = b$ seja possível e determine o conjunto das soluções deste sistema.

(A) $b$=(3,1,0,7), (B) $b$=(3,1,0,-7), (C) $b$=(3,1,1,-7), (D) $b$=(1,-1,-4,5).

---

**Exercício 23** *[2012/13 - Exame - V1 - Problema 6 - LEGM, MEC]*

Considere a matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ definida por

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & -5 \end{bmatrix}.$$

Determine:

a) A matriz dos cofactores de $A$; use-a para obter o determinante de $A$, pela regra de Laplace;

b) Bases para os subespaços $N_A$, $L_A$ e $C_A$ de $\mathbb{R}^3$, respectivamente, o núcleo, o espaço das linhas e o espaço das colunas de $A$, indicando também as respectivas dimensões;

c) Uma base ordenada $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ com as seguintes características: o primeiro e o segundo elementos de $\mathcal{B}$ pertencem a $N_A$ e a $C_A$, respectivamente; represente o vector $(2, -1, 2)$ nesta base.

---

**Exercício 24** *[2014/15 - 2º Teste - V1 - Problema 4 - MEEC]*

Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ que é representada nas bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^{2\times 2}$ pela matriz $A$: (a) Obtenha bases para o núcleo e para o espaço das colunas de $A$; (b) Determine uma base para a imagem (ou contradomínio) de $T$ e indique as componentes de $B$ nessa base; (c) Mostre que o conjunto $P$ das soluções da equação $Tu = B$ pode ser escrito na forma $P = \{v\} + S$, explicitando o vector $v \in \mathbb{R}^4$ e uma equação cartesiana para o subespaço $S$ de $\mathbb{R}^4$; (d) Identifique $P \cap U$ em que $U = L(\{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,1)\})$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ -1 & 1 & -1 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 10 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

---

---

**Exercício 25** *[2005/6 - 1° Exame - V1 - Problema 12 - LEEC]*

Considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ definida como se segue: sendo $p \in \mathcal{P}_2$ com $p(t) = p_0 + p_1\, t + p_2\, t^2$ então

$$T(p) = (p_0 + 2p_1 + 3p_2, -p_0 + 2p_1 + p_2, 2p_0 + 2p_2)\ .$$

a) Determine a matriz $A$ que representa $T$ em relação às bases canónicas de $\mathcal{P}_2$ e de $\mathbb{R}^3$.

b) Indique justificadamente quais das seguintes afirmações são verdadeiras:
1. $\dim N(T) = 1$ , 2. $T$ é injectiva , 3. $\dim I(T) = 2$ , 4. $T$ não é invertível ,
em que $N(T)$ e $I(T)$ representam o núcleo e a imagem de $T$, respectivamente.

---

**Exercício 26** *[2006/7 - 1° Exame - V1 - Problema 12 - MEC]*

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $T_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$T(x, y, z) = (x + 2y - 3z, x + 3y + z, \alpha y + \alpha^3 z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Determine todos os valores de $\alpha$ para os quais $T_\alpha$ é invertível.
2. Tomando $\alpha = 2$,

a) existe algum vector $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ para o qual a equação $T_\alpha(x, y, z) = (a, b, c)$ é impossível?
b) resolva a equação $T_\alpha(x, y, z) = (1, 2, 2)$.

---

**Exercício 27** *[2008/9 - 1° Exame - Problema 13 - LEIC]*

Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (x + 2y + 3z, x - y, 2x + y + 3z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

a) Represente $T$ em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$;

b) $T$ é injectiva? $T$ é sobrejectiva?

c) Resolva a equação $Tu = (1, 1, 2)$.

---

**Exercício 28** *[2009/10 - 2° Exame - V1 - Problema 11 - MEC]*

Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$T(x, y, z, w) = (x - y + z, x - y + w, w - z), \quad (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4.$$

1. Comece por calcular as imagens por $T$ dos vectores da base canónica de $\mathbb{R}^4$ e use-as para escrever a matriz que representa $T$ em relação às bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$.

2. Indique uma base e a dimensão de $N(T)$ - o núcleo ou espaço nulo de $T$;

3. Indique uma base e a dimensão de $I(T)$ - a imagem ou contradomínio de $T$;

4. Indique um valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ para o qual a equação

$$Tv = (1, 2, \alpha)$$

é possível e, para esse valor de $\alpha$, determine as soluções daquela equação.

---

**Exercício 29** *[2009/10 - 1º Exame - Problema 13 - MEC]*

Seja $\mathcal{P}_2$ o espaço linear real dos polinómios $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de grau menor ou igual a dois e considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ definida como se segue: sendo $p \in \mathcal{P}_2$ dado por $p(t) = a+bt+ct^2, t \in \mathbb{R}$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, então

$$T(p) = (a + b - 2c, 2a + 3b + 4c, 5a + 6b - 2c).$$

1. Obtenha a representação matricial $A$ de $T$ em relação às bases canónicas de $\mathcal{P}_2$ e de $\mathbb{R}^3$.
2. Seja $U$ uma matriz que se obtém por eliminação de Gauss a partir da matriz $A$. Use-a para determinar se $T$ é injectiva e/ou sobrejectiva.
3. a) Mantendo em $\mathcal{P}_2$ a base canónica, determine uma base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ por forma que a representação matricial de $T$ (em relação ao novo par de bases) seja a matriz $U$, que identificou na alínea anterior.

   b) Resolva a equação
   $$T(p) = b_1$$
   em que $b_1$ é o primeiro elemento da base $\mathcal{B}$.

---

**Exercício 30** *[2010/11 - 2º Teste - V1 - Problema 4 - MEEC]*

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

a) Obtenha uma base para o espaço das colunas da matriz $A$.

b) Seja $\mathcal{P}_2$ o espaço linear real dos polinómios definidos em $\mathbb{R}$ de grau menor ou igual a 2 e considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2$ que é representada pela matriz $A$ em relação às bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e de $\mathcal{P}_2$. Mostre que qualquer solução $x$ da equação

$$Tx = p,$$

em que $p(t) = t + 2t^2, t \in \mathbb{R}$, pode ser escrita na forma $x = v_1 + \alpha v_0$ com $\alpha \in \mathbb{R}$ e identifique os vectores $v_0$ e $v_1$.

c) Qual das soluções da equação anterior pertence ao plano de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores $(1, 0, -1)$ e $(0, 1, -1)$.

---

**Exercício 31** *[2010/11 - Exame - V1 - Problema 7 - MEEC]*

Seja $\mathcal{P}_2$ o espaço linear real dos polinómios de grau menor ou igual a 2 e suponha que

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

representa a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ relativamente à base canónica.

a) Qual é a matriz que representa $T$ em relação à base ordenada $\mathcal{B} = (p_1, p_2, p_3)$, em que

$$p_1(t) = 1 - t + t^2, \quad p_2(t) = -1 + t + t^2, \quad p_3(t) = 1 + t - t^2, \quad t \in \mathbb{R}?$$

b) $T$ é invertível ?
Se respondeu SIM, determine a inversa de $T$; Se respondeu NÃO, identifique o núcleo de $T$.
c) Resolva a equação $Tp = q$, em que $q(t) = -1 + t + t^2, t \in \mathbb{R}$.

---

**Exercício 32** *[2012/13 - 2º Teste - V1 - Problema 4 - LEGM, MEC]*

Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^4$ definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+b, c+d, a+d, b+c), \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

a) Obtenha a matriz que representa $T$ em relação às bases canónicas de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ e de $\mathbb{R}^4$;

b) Determine uma base para o núcleo de $T$ e uma base para a imagem de $T$;

c) Das duas equações seguintes apenas uma é possível,

$$T(X) = (1, -1, 1, -1); \quad T(Y) = (1, 1, 1, -1);$$

Identifique-a e resolva-a.

---

**Exercício 33** *[2012/13 - Exame - V1 - Problema 7 - LEGM, MEC]*

Considere os seguintes vectores de $\mathbb{R}^3$,

$$v_1 = (1, 0, 0), \quad v_2 = (1, 1, 0), \quad v_3 = (1, 1, 2),$$

e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que

$$Tv_1 = v_2 + v_3, \quad Tv_2 = v_2, \quad Tv_3 = v_3.$$

a) Mostre que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ é uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$ e, representando os elementos de $\mathbb{R}^3$ como vectores coluna e sendo $B$ a matriz cuja representação por colunas é $B = [v_1\ v_2\ v_3]$, determine a inversa de $B$;

b) Mostre que $T$ está bem definida e determine a sua representação matricial na base $\mathcal{B}$. $T$ é injectiva e/ou sobrejectiva?;

c) Qual é a expressão analítica de $T$? (ou seja, sendo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, quais são as componentes de $T(x, y, z)$ na base canónica de $\mathbb{R}^3$?)

---

**Exercício 34** *[2013/14 - 2º Teste - V1 - Problema 4 - LEGM, MEC]*

(a) Sejam $s_1 = (1, 2, 3)$, $s_2 = (1, -1, 2), u = (3, 4, 4)$. Mostre que $\mathcal{B} = (s_1, s_2, u)$ é uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$ (vectores definidos no Problema 1), (b) Obtenha as componentes de $y = (-1, -3, 1)$ na base $\mathcal{B}$; (c) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que $Ts_1 = s_1 + s_2$, $Ts_2 = s_2 + u$, $Tu = u$. Mostre que $T$ está bem definida e determine a representação matricial de $T$ na base $\mathcal{B}$, (d) Resolva a equação $Tx = y$ e apresente a solução na base canónica de $\mathbb{R}^3$.

**Exercício 35** *[2013/14 - Exame - V1 - Problema 7 - LEGM, MEC]*

Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z, w) = (x + 2z + w, x + 2y + 2z + 3w, x + y + 2z + 2w), \quad (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4.$$

(a) Determine bases para o núcleo de $T$, $N(T)$, e para a imagem de $T$; (b) Mostre que $(-3, 1, 2, -1)$ pertence a $N(T)$ e determine as suas componentes na base indicada anteriormente; (c) Mostre que a equação $Tu = (-1, 1, 0)$ é possível e determine o conjunto das suas soluções.

---

**Exercício 36** *[2014/15 - Exame - V1 - Problema 7 - MEEC]*

Sejam $S$ e $U$ os subespaços de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ das matrizes simétricas e anti-simétricas, respectivamente ($A \in S$, se $A = A^t$ e $A \in U$, se $A = -A^t$, em que $A^t$ é a transposta de $A$).

a) Mostre que $S$ e $U$ têm dimensão 3 e 1, respectivamente, e explicite uma base para cada um deles; b) Mostre que $S \cap U = \{O\}$ (em que $O$ é a matriz nula) e que $\mathbb{R}^{2\times 2} = S + U$; c) Sendo $B_c = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ a base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ e $B_S = (s_1, s_2, s_3)$, $B_U = (u)$ as bases identificadas na alínea anterior para $S$ e $U$, respectivamente, considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que

$$Te_j = s_j, \text{ se } j = 1, 2, 3, \quad Te_4 = u$$

c1) Como se representa $T$ na base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$? c2) Como se representa $T$ na base $B = (s_1, s_2, s_3, u)$ de $\mathbb{R}^{2\times 2}$? c3) Mostre que $T$ é invertível e obtenha a representação matricial da sua inversa numa das bases, que escolherá, $B_c$ ou $B$.

---

---

**Exercício 37** *[2005/6 - 1° Exame - V1 - Problema 13 - LEEC]*

Sejam $v_1 = (1, -1, 2)$ $v_2 = (4, 2, 3)$, $v_3 = (2, 4, -1)$ e $A$ a matriz cuja representação por colunas é $A = [\, v_1\, v_2\, v_3\, ]$.

a) Indique as dimensões de $N_A$ e $C_A$, respectivamente o núcleo de $A$ e o espaço das colunas de $A$, e obtenha bases ortogonais para estes subespaços de $\mathbb{R}^3$,

b) determine a equação cartesiana do plano $\mathbb{P}$ em $\mathbb{R}^3$ que contém a origem e é ortogonal ao subespaço $N_A$,

c) Mostre que $L_A = \mathbb{P}$, em que $L_A$ representa o espaço das linhas de $A$, e indique uma base ortogonal deste subespaço.

---

**Exercício 38** *[2005/6 - 2° Exame - V1 - Problema 13 - LEEC]*

Sejam $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (1, -1, 5)$, $v_3 = (1, 8, -1)$.

a) Indique uma base ortogonal para o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por $v_1, v_2$ e $v_3$;

b) Indique uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que contém o vector $v_1$ e determine as componentes do vector $v_3$ nessa base.

c) Determine uma equação cartesiana da recta $\mathcal{R}$ cuja equação vectorial é $\mathcal{R} = \{v_3\} + L(\{v_1\})$.

---

**Exercício 39** *[2006/7 - 1° Exame - V1 - Problema 11 - MEC]*

Considere uma matriz pertencente a $\mathbb{R}^{3\times 4}$ com a seguinte estrutura:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \square & \square \\ 1 & \square & 3 & 4 \\ 0 & 1 & \square & \square \end{bmatrix},$$

em que $\square$ representa um elemento não especificado.

a) Indique uma matriz, designe-a por $A$, que se obtém escolhendo os elementos não especificados por forma a que o núcleo de $A$ seja gerado pelo vector (1,1,-1,-1).

b) Para a escolha efectuada na alínea anterior, determine bases e indique as dimensões dos subespaços de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$, respectivamente, gerados pelas colunas e pelas linhas de $A$.

c) Continuando a usar a escolha efectuada em a), determine a solução geral da equação $Au = b$ com $b = (1, 1, 0)^t$.

---

**Exercício 40** *[2006/7 - 1° Exame - V1 - Problema 13 - MEC]*

Considere o subespaço $S$ e $\mathbb{R}^3$ gerado pelos três vectores seguintes:

$$v_1 = (1, 1, 0), \quad v_2 = (2, 2, 1), \quad v_3 = (1, 1, 1).$$

a) Determine uma base ortogonal de $S$ e designe-a por $\mathcal{A}$,

b) Obtenha uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que contenha $\mathcal{A}$ e calcule as componentes do vector $v = (1, 2, 3)$ nesta base.

c) Indique uma equação cartesiana da recta que é ortogonal ao plano $S$ e que passa pela origem.

---

**Exercício 41** *[2006/7 - 2º Exame - V1 - Problema 11 - MEC]*

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \\ 1 & -4 & 9 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. Determine a solução geral da equação $Au = b$.

2. Sendo $A^t$ a matriz transposta de $A$, determine uma base para $C_{A^t}$, o espaço das colunas de $A^t$.

3.a) Verifique que, considerando em $\mathbb{R}^3$ o produto interno usual e sendo $N_A$ o núcleo de $A$, os subespaços $C_{A^t}$ e $N_A$ são ortogonais: $N_A \perp C_{A^t}$.

3.b) Mostre que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e considerando em $\mathbb{R}^n$ o produto interno usual, o resultado anterior é válido para qualquer matriz $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ou seja, que $N_X \perp C_{X^t}$ .

4. Determine uma equação cartesiana para o plano que contém a origem e que é gerado pelo subespaço $C_{A^t}$.

---

**Exercício 42** *[2007/8 - 2º Exame - V1 - Problema 11 - MEC]*

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 6 & -5 \end{bmatrix}$ e considere em $\mathbb{R}^n (n \in \mathbb{N})$ o produto interno usual.

1. Determine uma base (qualquer) para $C_A$ (o espaço das colunas de $A$) e uma base ortogonal para $N_A$ (o núcleo de $A$).

2. Da lista seguinte apenas um dos vectores (designado por $b$) pertence a $C_A$. Identifique-o e escreva a solução geral da equação $Au = b$.

   (a) $b = (1, 2, 3)$, (b) $b = (1, 3, 3)$, (c) $b = (1, 3, 2)$.

3. Qual das soluções da equação anterior está mais próxima da origem?

4. Determine uma equação cartesiana para o plano de $\mathbb{R}^3$ gerado pelas colunas de $A$.

5. Decomponha o vector $x = (4, -1, 0)$ na forma $x = y + z$ com $y \in C_A$ e $z \in {C_A}^{\perp}$.

---

**Exercício 43** *[2007/8 - 1º Exame - V1 - Problema 12 - MEC]*

Considere os seguintes vectores de $\mathbb{R}^3$:

$$u_1 = (1, 0, -1), \quad u_2 = (2, 1, 2), \quad u_3 = (1, 2, 7).$$

1. Determine uma base ortogonal para o subespaço gerado por $u_1$,$u_2$ e $u_3$.

2. Determine as componentes do vector $p = 3u_1 + 2u_2 + u_3$ na base indicada em 1.

3. Considere o plano $\mathbb{P}$ de $\mathbb{R}^3$ definido por $\mathbb{P} = \{p\} + L(\{u_1, u_2\})$. Determine uma equação cartesiana para $\mathbb{P}$.

4. Qual a distância do plano $\mathbb{P}$ à origem?.

**Exercício 44** *[2008/9 - 1° Exame - Problema 14 - LEIC]*

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e considere o subconjunto $B_\alpha = \{s, t, u_\alpha\}$ de $\mathbb{R}^3$, em que

$$s = (1, 1, 2), \quad t = (1, -1, 0), \quad u_\alpha = (1, 1, \alpha).$$

Determine

a) todos os valores de $\alpha$ para os quais $B_\alpha$ é uma base de $\mathbb{R}^3$;

b) o único valor de $\alpha$ para o qual $B_\alpha$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$;

c) uma equação cartesiana do plano $R = L(\{s, t\})$.

---

**Exercício 45** *[2008/9 - 2° Exame - Problema 14 - LEIC]*

Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno usual. Sejam $s = (1, 1, 1)$, $t = (2, 0, 1)$ e $u_\beta = (3, -1, \beta)$ com $\beta \in \mathbb{R}$, e $\mathcal{S}_\beta = L(\{s, t, u_\beta\})$.

a) Use o método de ortogonalização de Gram-Schmidt para obter um conjunto ortogonal $C_\beta$ tal que $L(C_\beta) = \mathcal{S}_\beta$;

b) Determine em função de $\beta$ a dimensão de $\mathcal{S}_\beta$.

c) Sempre que $\mathcal{S}_\beta \neq \mathbb{R}^3$ identifique $\mathcal{S}_\beta^\perp$ e decomponha o vector $x = (1, 2, 3)$ na forma $x = y + z$ com $y \in \mathcal{S}_\beta$ e $z \in \mathcal{S}_\beta^\perp$;

d) Determine uma equação cartesiana da recta $R = L(\{s\})$.

---

**Exercício 46** *[2009/10 - 1° Exame - Problema 14 - MEC]*

Considere em $\mathbb{R}^3$, que se supõe munido do produto interno usual, o subespaço, adiante designado por $S$, gerado pelos quatro vectores seguintes:

$$v_1 = (1, 1, -1), \quad v_2 = (2, 2, 1), \quad v_3 = (4, 4, -1), \quad v_4 = (1, 1, 5).$$

1. Obtenha uma base ortogonal para o subespaço $S$. Qual a dimensão de $S$?

2. Identifique uma base para $S^\perp$, o (complemento) ortogonal de $S$. Sendo $v = (3, 1, 1)$, obtenha a representação deste vector na forma:

$$v = s + s_\perp, \quad s \in S, s_\perp \in S^\perp.$$

3. Seja $A$ a matriz cuja coluna $j = 1, 2, 3, 4$ contém as componentes de $v_j$ (na base canónica) e considere a equação

$$Au = s_\perp,$$

em que $s_\perp$ foi determinado na alínea anterior e é representado como vector coluna.

Classifique, justificadamente, como possível ou impossível esta equação.

---

**Exercício 47** *[2009/10 - 2º Exame - Problema 12 - MEC]*

Seja $S$ o subespaço (plano) de $\mathbb{R}^3$ formado pelos elementos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que satisfazem a equação (cartesiana):

$$2x + y - z = 0.$$

Determine sucessivamente:

1. Uma base de $S^\perp$, o (complemento) ortogonal de $S$;
2. Uma base ortogonal de $S$;
3. A distância de $v = (1, 1, 1)$ ao subespaço $S$;
4. Uma equação cartesiana do subespaço (plano) que é ortogonal a $S$ e que contém o vector $(1, 1, 3)$.

---

**Exercício 48** *[2010/11 - 3º Teste - V1 - Problema 6 - MEEC]*

Seja $S$ o subespaço (plano) de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores $(1, 1, 2)$ e $(1, -1, 1)$. Determine sucessivamente:
a) Uma base ortogonal de $S$;
b) Uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ contendo a base indicada em a);
c) Uma equação cartesiana de $S$;
d) Um conjunto gerador da recta $S \cap U$, em que $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$;
e) A distância do ponto $(1, 2, 3)$ ao plano $S$.

---

**Exercício 49** *[2010/11 - Exame - V1 - Problema 13 - MEEC]*

Seja $S$ o subespaço (plano) de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores $(1, 2, 4)$ e $(-1, 5, 3)$. Determine sucessivamente:
a) Uma base ortogonal de $S$;
b) Uma equação cartesiana de $S$;
d) A representação na forma $x = s + u$, em que $s \in S$ e $u \in S^\perp$, no caso de $x = (-3, 0, 6)$;
e) Um vector $y \in \mathbb{R}^3$ cuja distância ao subespço $S$ seja igual a 1.

---

**Exercício 50** *[2012/13 - 3º Teste - V1 - Problema 6 - LEGM, MEC]*

Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno usual, sejam

$$v_1 = (1, -1, -1), \quad v_2 = (1, 2, 2),$$

$P = L(\{v_1, v_2\})$ e $P^\perp$ o (complemento) ortogonal de $P$.

1. Determine:

   (a) Uma base ortogonal de $P$ contendo $v_1$, uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que contenha a anterior, e a representação de $x = (3, -1, 1)$ na forma $x = p + p_\perp$ com $p \in P$ e $p_\perp \in P^\perp$;

   (b) Uma equação cartesiana de $P$ e uma equação cartesiana de um plano $Q$ que é ortogonal a $P$ e que contém $x$.

2. Representando os elementos de $\mathbb{R}^3$ como vectores coluna, considere a matriz cuja representação por colunas é $A = [v_1\, v_2\, x]$. Mostre que $A = BL$, em que $L$ é uma matriz triangular e $B$ é uma matriz "ortogonal"(i. e. as suas colunas constituem um conjunto ortogonal).

---

**Exercício 51** *[2012/13 - Exame - V1 - Problema 13 - LEGM, MEC]*

Representando os vectores de $\mathbb{R}^3$ na forma $(x, y, z)$, considere o plano $P$ definido pela equação cartesiana

$$x - y - z = 0.$$

Determine:

a) Uma base ortogonal de $P$;

b) Uma base de $\mathbb{R}^3$ contendo a base indicada na alínea anterior;

c) A melhor aproximação do vector $w = (2, 0, -1)$ por elementos de $P$, a distância de $w$ a $P$ e a equação cartesiana de uma recta ortogonal a $P$ contendo a origem.

---

**Exercício 52** *[2013/14 - 3º Teste - V1 - Problema 6 - LEGM, MEC]*

Seja $S$ o subespaço (plano) de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores $(1, 2, 1)$ e $(-2, 5, 4)$. Determine: (a) Uma base ortogonal de $S$; (b) Uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que contém a base indicada na alínea anterior; (c) A decomposição de $x = (-2, 1, 6)$ na forma $x = s + t$ com $s \in S$ e $t \in S^\perp$; (d) Uma equação cartesiana do plano $Q = \{(1, 1, 1)\} + S$.

---

**Exercício 53** *[2013/14 - Exame - V1 - Problema 13 - LEGM, MEC]*

Seja $S$ o subespaço (plano) de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores $(1, 2, 2)$ e $(2, 3, 5)$. Determine sucessivamente: a) Uma base ortogonal de $S$; b) Uma base ortogonal $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ contendo a base indicada em a); c) A representação de $x = (10, 3, 1)$ na base $\mathcal{B}$ e a distância de $x$ ao plano $S$; d) Uma equação cartesiana do subespaço (plano) gerado pelo vector $(1, 2, 2)$ e por um vector ortogonal ao subespaço $S$.

---

**Exercício 54** *[2014/15 - 3º Teste - V1 - Problema 6 - MEEC]*

Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno usual e o seguinte subespaço $S = L(\{s_1, s_2\})$ com $s_1 = (1, 1, 1)$ e $s_2 = (1, -5, 1)$.
(a) Determine um vector não nulo $t$ pertencente a $S^\perp$ (o complemento ortogonal de $S$); (b) Construa uma base ortogonal $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$, ordenada, contendo $t$ e represente o vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ nessa base $\mathcal{B}$; (c) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear que a cada vector de $\mathbb{R}^3$ faz corresponder o vector de $\mathbb{R}^3$ das suas componentes na base $\mathcal{B}$. Como se representa $T$ na base canónica? $T$ é invertível? (d) Use a desigualdade de Cauchy-Schwarz para mostrar que para quaisquer três números reais $a, b$ e $c$ se tem

$$ab + bc + ac \leq a^2 + b^2 + c^2.$$

---

**Exercício 55** *[2014/15 - Exame - V1 - Problema 13 - MEEC]*

Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno usual e sejam $v_1 = (1, -1, 1), v_2 = (3, 1, 1)$ e $v_3 = (2, 6, -2)$.
a) Indique uma base ortogonal para o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores $v_1, v_2$ e $v_3$; b) Indique uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que contém o vector $v_1$; c) Determine uma equação cartesiana para o plano $P = v_3 + L(\{v_1, v_2\})$ e calcule a distância da origem (o ponto (0,0,0)) ao plano $P$. d) Mostre que a equação cartesiana do plano definido em $\mathbb{R}^3$ pelos pontos $P_1 = (x_1, y_1, z_1), P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ e $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$ se pode escrever na forma:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

---

## Valores e vectores próprios

---

**Exercício 56** *[2005/6 - 1° Exame - V1 - Problema 14 - LEEC]*

1. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por:

$$T(x, y, z) = (x, 2y + 2z, 2y + 5z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 .$$

   a) Identifique os valores próprios de $T$ e os espaços próprios associados aos valores próprios de $T$,

   b) Mostre que $T$ é diagonalizável e identifique uma base de $\mathbb{R}^3$ relativamente à qual a representação matricial de $T$ é diagonal.

2. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$, $B_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ e considere a forma quadrática que lhe está associada, $Q_{B_\alpha}(x) = x^t B_\alpha x$, em que $x \in \mathbb{R}^3$ se encontra representado como vector coluna.

   Identifique todos os valores de $\alpha$ para os quais

   *a)* $Q_{B_\alpha}$ é definida positiva, *b)* $Q_{B_\alpha}$ é semi-definida positiva, *c)* $Q_{B_\alpha}$ é indefinida.

---

**Exercício 57** *[2005/6 - 2° Exame - V1 - Problema 12 - LEEC]*

Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$T(x, y, z) = \frac{1}{2}(5x + y - z, -x + 5y + z, 2y + 4z) , \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

a) Obtenha a matriz $A$ que representa $T$ em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ e mostre que $T$ é invertível.

b) Seja $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)$. Mostre que $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ e obtenha a matriz $B$ que representa $T$ nesta base. $T$ é diagonalizável?

c) Determine a inversa de $B$ e use-a para obter uma expressão para a inversa de $T$ na forma $T^{-1}(x, y, z) = (f, g, h)$, em que $f, g$ e $h$ são funções de $x, y$ e $z$.

---

**Exercício 58** *[2005/6 - 2° Exame - V1 - Problema 14 - LEEC]*

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e considere a matriz $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \alpha + 1 \\ \alpha - 1 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Determine todos os valores de $\alpha$ para os quais $A_\alpha$ é diagonalizável, quer quando encarada como matriz real quer como matriz complexa.

b) Tome $\alpha = 1$. Considere em $\mathbb{R}^2$ a forma quadrática definida por $Q_{A_1} = x^t A_1 x$ e diagonalize-a, isto é, determine uma matriz unitária $U$ tal que fazendo $y = U^t x = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ se tem

$$Q_{A_1}(x) = x^t A_1 x = \mu_1 y_1^2 + \mu_2 y_2^2$$

para valores adequados dos escalares $\mu_1$ e $\mu_2$. Aproveite este resultado para classificar a forma $Q_{A_1}$.

---

**Exercício 59** *[2006/7 - 1º Exame - V1 - Problema 14 - MEC]*

1. Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ e $B_{\alpha,\beta,\gamma} = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 1 \\ \gamma & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   a) Determine o polinómio característico de $B_{\alpha,\beta,\gamma}$ e daí conclua que $B_{\alpha,\beta,\gamma}$ é invertível se e só se $\gamma \neq 0$.

   b) Tomando $\alpha = \gamma = 0$ e $\beta = 1$, determine os valores próprios de $B_{0,1,0}$ e os correspondentes espaços próprios. $B_{0,1,0}$ é diagonalizável?

2. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $A^t\,A = I$ ($I$ representa a matriz identidade de ordem $n$).

   a) Representando por $< .,. >$ o produto interno usual de $\mathbb{R}^n$, mostre que a função $p$ definida por $p(x, y) =< Ax, Ay >, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$, define um produto interno em $\mathbb{R}^n$ que coincide com o produto interno usual, ou seja $p(x, y) =< x, y >$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$.

   b) Mostre que se $\lambda$ é valor próprio (real ou complexo) de $A$ então $|\lambda| = 1$.

---

**Exercício 60** *[2006/7 - 2º Exame - V1 - Problema 12 - MEC]*

Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

1.a) Verifique que $\lambda = 2$ é um valor próprio de $A$ e determine o correspondente espaço próprio.

1.b) Determine os outros valores e vectores próprios de $A$,

1.c) Mostre que $A$ é diagonalizável, identificando uma matriz diagonal $\Lambda$ e uma matriz invertível $S$ tais que $\Lambda = S^{-1}AS$.

2.a) Seja $\mathcal{P}_2$ o espaço linear real dos polinómios de grau menor ou igual a 2 e suponha que $A$ representa uma transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ relativamente à base canónica. Qual é a matriz que representa $T$ em relação à base ordenada $\mathcal{B} = (p_1, p_2, p_3)$, em que

$$p_1(t) = 1 - t + t^2, \quad p_2(t) = -1 + t + t^2, \quad p_3(t) = 1 + t - t^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2.b) $T$ é invertível ?

3. Mostre que se $B$ é uma matriz invertível e $\mu$ é um valor próprio de $B$, então $\mu^{-1}$ é valor próprio de $B^{-1}$ (a inversa de $B$).

---

**Exercício 61** *[2007/8 - 2º Exame - V1 - Problema 12 - MEC]*

Seja $\mathcal{P}_2$ o espaço linear real dos polinómios definidos em $\mathbb{R}$ de grau menor ou igual a 2. Considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida como se segue: sendo $p \in \mathcal{P}_2$, com $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$, $t \in \mathbb{R}$, então

$$Tp(t) = 2a_0 + a_1 + a_2 + (2a_0 + 3a_1 + 2a_2)t + (a_0 + a_1 + 2a_2)t^2, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

1. a) Indique a matriz $C$ que representa $T$ em relação à base canónica de $\mathcal{P}_2$.

   b) Mostre que o conjunto ordenado $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, p_3\} \subset \mathcal{P}_2$, em que

   $$p_1(t) = 1 - t^2, \quad p_2(t) = 2t, \quad p_3(t) = 1 + t^2, \quad t \in \mathbb{R},$$

   é outra base de $\mathcal{P}_2$. Represente o polinómio $1 + t + t^2$ nesta base.

c) Verifique que a matriz $A$ que representa $T$ em relação à base $\mathbb{P}$ é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. a) Mostre que $\lambda = 1$ é um valor próprio de $T$ e determine o correspondente espaço próprio.
   b) Determine outros valores próprios de $T$ bem como os correspondentes espaços próprios.
   c) Justifique que $A$ é diagonalizável como matriz real. Determine então uma matriz diagonal $\Lambda \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ e uma matriz invertível $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $A = S\Lambda S^{-1}$.

3. Justifique que $T$ é invertível e determine a sua inversa.

---

**Exercício 62** *[2008/9 - 1° Exame - Problema 15 - LEIC]*

Sejam $\beta \in \mathbb{R}$ e $B_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Identifique o polinómio característico e os valores próprios de $B_\beta$; quais os valores de $\beta$ para os quais $B_\beta$ é invertível?

b) Determine os valores de $\beta$ para os quais a função $f$ dada por

$$f(x, y) = x^t B_\beta y, \quad x, y \in \mathbb{R}^3,$$

define um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

c) Tomando $\beta = 2$, determine os espaços próprios de $B_2$; $B_2$ é diagonalizável?

---

**Exercício 63** *[2008/9 - 2° Exame - V1 - Problema 13 - LEIC]*

Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (2x + 2y + 2z, -x + 3y, x - 3y), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

a) Obtenha a matriz $A$ que representa $T$ em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$;

b) Mostre que o conjunto $\mathcal{B} = ((1, 1, -1), (0, 1, -1), (3, 1, -4))$ é uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores próprios de $T$.

c) Mostre que $T$ é diagonalizável e identifique uma matriz diagonal $\Lambda$, e uma matriz invertível $S$ tal que $\Lambda = S^{-1}AS$.

d) Sendo $\alpha \in \mathbb{R}$ e $b_\alpha = (4, 3, \alpha)$, determine o vector das componentes de $b_\alpha$ na base $\mathcal{B}$.

e) Sempre que possível resolva a equação $Tu = b_\alpha$.

---

**Exercício 64** *[2009/10 - 2° Exame - Problema 13 - MEC]*

Seja $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ a matriz definida por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Determine os valores próprios de $A$ e uma base para cada um dos espaços próprios (subespaços de $\mathbb{R}^3$) associados;

2. Mostre que $A$ é diagonalizável. Indique uma base de $\mathbb{R}^3$ e uma matriz de mudança de base $S$ tal que $D = S^{-1}AS$ é diagonal.

3. Escreva uma expressão analítica da transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ que é representada pela matriz $A$ em relação à base canónica de $\mathcal{P}_2$; Mais precisamente, sendo $p(t) = a + bt + ct^2, t \in \mathbb{R}$, escreva
$$Tp(t) = X + Yt + Zt^2, \quad t \in \mathbb{R}$$
(onde $X, Y$ e $Z$ dependem dos coeficientes $a, b, c \in \mathbb{R}$ de $p$).

4. Indique uma base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}_2$ em relação à qual $T$ é representada por $D$ (determinada em 2).

5. Resolva a equação
$$Tp = p_1 + p_2 + p_3,$$
em que $\mathcal{B} = (p_1, p_2, p_3)$.

---

**Exercício 65** *[2010/11 - 3º Teste - V1 - Problema 7 - MEEC]*

1. Seja
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ -4 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

a) Mostre que $\lambda = 5$ é valor próprio de $A$ e determine o espaço próprio associado;

b) Identifique os restantes valores próprios e os espaços próprios associados;

c) $A$ é diagonalizável?

d) Classifique a forma quadrática associada à matriz $A$.

2. Seja $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ($n \in \mathbb{N}$) uma matriz invertível. Mostre que se $\Lambda$ é o conjunto dos valores próprios de $B$, então $\Lambda_{-1} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda^{-1} \in \Lambda\}$ é o conjunto dos valores próprios da inversa de $B$.

---

**Exercício 66** *[2010/11 - Exame - V1 - Problema 14 - MEEC]*

1. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e
$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 2 & \alpha \\ \alpha & 8 \end{bmatrix}.$$

a) Determine, em função de $\alpha$, o polinómio característico de $A_\alpha$ e use-o para identificar os valores próprios de $A_\alpha$.
b) Para $\alpha = 4$ diagonalize a matriz $A_4$, indicando uma matriz diagonal $\Lambda$ e uma matriz invertível $S$ tal que $\Lambda = S^{-1}A_4S$.
c) Classifique, em função de $\alpha$, a forma quadrática associada à matriz $A_\alpha$.

2. Sejam $U$ e $V$ espaços lineares (ou vectoriais) sobre $\mathbb{C}$ e $T : U \to V$ uma transformação linear injectiva. Mostre que se $u_1$,..., $u_k$ são vectores de $U$ linearmente independentes, então também os vectores $T(u_1)$,..., $T(u_k)$ são linearmente independentes.

**Exercício 67** *[2012/13 - 3º Teste - V1 - Problema 7 - LEGM, MEC]*

Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$T(x, y, z) = (2x + \sqrt{2}y, \sqrt{2}x + 2y + \sqrt{2}z, \sqrt{2}y + 2z) \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Identifique a matriz $A$ que a representa em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$;

(b) Calcule os valores próprios de $T$ e os correspondentes espaços próprios;

(c) Diagonalize a transformação $T$ identificando uma base de $\mathbb{R}^3$ relativamente à qual ela é representada por uma matriz diagonal;

(d) Existe algum vector $x \in \mathbb{R}^3$ não nulo tal que $<Tx, x>= 0$? (O produto interno em $\mathbb{R}^3$ aqui considerado é o usual.)

---

**Exercício 68** *[2012/13 - Exame - V1 - Problema 14 - LEGM, MEC]*

1. Considere a transformação linear $T$ definida no Problema 7:
   a) Identifique os valores próprios de $T$ e os respectivos espaços próprios;
   b) Mostre que $T$ é diagonalizável, identificando uma base de $\mathbb{R}^3$ relativamente à qual $T$ é representada por uma matriz diagonal, que deve explicitar;
2. Mostre que os valores próprios de uma transformação linear definida e com valores em $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) não dependem da base escolhida para a representar. Mais precisamente, se $A$ e $B$ são duas representações matriciais dessa transformação linear em relação a duas bases distintas, então
$$\det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I).$$

---

**Exercício 69** *[2013/14 - 3º Teste - V1 - Problema 7 - LEGM, MEC]*

Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z, w) = (x + 2z + w, x + 2y + 2z + 3w, x + y + 2z + 2w), \quad (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4.$$

(a) Determine bases para o núcleo de $T$, $N(T)$, e para a imagem de $T$; (b) Mostre que $(-3, 1, 2, -1)$ pertence a $N(T)$ e determine as suas componentes na base indicada anteriormente; (c) Mostre que a equação $Tu = (-1, 1, 0)$ é possível e determine o conjunto das suas soluções.

---

**Exercício 70** *[2013/14 - Exame - V1 - Problema 14 - LEGM, MEC]*

Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$T(x, y, z) = (5x + 2z, 3y, 3x + 6z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Represente-a na base canónica de $\mathbb{R}^3$; $T$ é invertível? (b) Determine os valores próprios de $T$ e os espaços próprios associados; (c) Indique uma base de $\mathbb{R}^3$ relativamente à qual $T$ é representada por uma matriz diagonal, que deve explicitar. (d) Dê um exemplo de uma matriz simétrica de ordem 2, sem elementos nulos, e que tenha como valores próprios 2 e 3.

**Exercício 71** *[2014/15 - 3º Teste - V1 - Problema 7 - MEEC]*

Sejam $\alpha$ um número real e $T_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear cuja representação em relação à base canónica de $\mathbb{R}^2$ é a matriz $A_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha - 1 \\ -1 & 2\alpha \end{bmatrix}$.
(a) Determine, em função de $\alpha$, os valores próprios de $T_\alpha$ e os correspondentes espaços próprios;
(b) Diga para que valores de $\alpha$ a transformação $T_\alpha$ admite uma representação matricial diagonal e para esses valores indique a forma diagonal e a matriz diagonalizante de $A_\alpha$; (c) Para $\alpha = 3$, use os resultados da alínea anterior para obter os valores e vectores próprios da transformação linear ${T_3}^n - I$, em que $n \in \mathbb{N}$ e $I$ é a transformação identidade; (d) Para $\alpha = 2$, como se representa $T_2$ na base ordenada $((1,1),(0,1))$? Quais são os valores próprios de ${T_2}^n - I$? $(n \in \mathbb{N})$

---

**Exercício 72** *[2014/15 - Exame - V1 - Problema 14 - MEEC]*

Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Calcule os valores próprios de $A$ bem como os correspondentes espaços próprios; b) Justifique que existe uma matriz de mudança de base $S$ tal que $D = S^{-1}AS$ é uma matriz diagonal. Identifique $D$ e $S$; c) Mostre que se $\lambda$ é valor próprio de uma matriz quadrada $B$ então $\lambda^2$ é um valor próprio da matriz $B^2$ e que se $u$ é um vector próprio de $B$ associado ao valor próprio $\lambda$, também é vector próprio de $B^2$ associado ao valor próprio $\lambda^2$; d) Seja $C$ uma matriz quadrada diagonalizável cujos únicos valores próprios são 1 e -1. Use a alínea anterior para mostrar que $C^2$ é a matriz identidade.

---