Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IV – LEEC

RECUPERAÇÃO DO TESTE 3 – 12/JUNHO/2003 – 18H10-19H

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada uma das cinco alíneas vale 4 pontos.
- Apresente e justifique todos os cálculos.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras.
- **A revisão de provas** é na 6ª feira, 20 de Junho, 11h-12h, na sala de dúvidas.
- Boa sorte!

Fórmulas para Transformadas de Laplace

Sendo $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, $\quad \mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$, $\mathcal{L}\{-tf(t)\} = \frac{d}{ds}F(s)$,

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0) \ , \ \mathcal{L}\{H_c(t)f(t-c)\} = e^{-cs}F(s) \ .$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \ , \ \mathcal{L}\{\cos bt\} = \frac{s}{s^2+b^2} \ , \ \mathcal{L}\{\sin bt\} = \frac{b}{s^2+b^2} \ , \ \mathcal{L}\{\delta_c(t)\} = e^{-cs} \ .$$

Fórmulas para Séries de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \ , \ a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx \, dx \ , \ b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx \, dx \ .$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}\right) \ , \ a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos \frac{n\pi x}{L} \, dx \ , \ b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin \frac{n\pi x}{L} \, dx \ .$$

Para a correcção

pergunta	classificação
1(a)	
1(b)	
2(a)	
2(b)	
3	
total	

Nº:

Sala: ____________________

Nome: ____

(1) (a) Calcule a transformada de Laplace de

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t}\ , & \text{se } 0 \leq t \leq 1\ , \\ e^{-t} + 3\ , & \text{se } t > 1\ . \end{cases}$$

(b) Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dot{y} + y = f(t) + \delta_2(t) \\ y(0) = 1 \ , \end{cases}$$

onde $f(t)$ é a função da alínea anterior.

(2) (a) Ache o desenvolvimento em série co-senos da função $g(x) = \cos^2 \frac{x}{2}$, $x \in [0, \pi]$.
Sugestão: $\sin(2\theta) = 2 \sin\theta \cos\theta$ e $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$.

(b) Determine a solução (satisfazendo a equação diferencial para $t > 0$ e $0 < x < \pi$) do seguinte problema para a equação do calor:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ , \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,\pi) = 0 \ , \\ u(0,x) = \cos^2 \frac{x}{2} \ . \end{cases}$$

(3) Seja $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$\int_0^\pi f(x) \sin(nx)\ dx = 0$$

para todos os inteiros $n \geq 1$. Será que f tem que ser a função identicamente nula?