Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IV – LEEC

TESTE 3 PARA PRATICAR – JUNHO DE 2003

Instruções

- Duração: 50 minutos.
- Cada uma das cinco alíneas vale 4 pontos.
- Apresente e justifique todos os cálculos.

Fórmulas para Transformadas de Laplace

Sendo $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, $\quad \mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$, $\mathcal{L}\{-tf(t)\} = \frac{d}{ds}F(s)$,

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0) \ , \ \mathcal{L}\{H_c(t)f(t-c)\} = e^{-cs}F(s) \ .$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \ , \ \mathcal{L}\{\cos bt\} = \frac{s}{s^2+b^2} \ , \ \mathcal{L}\{\sin bt\} = \frac{b}{s^2+b^2} \ , \ \mathcal{L}\{\delta_c(t)\} = e^{-cs} \ .$$

Fórmulas para Séries de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \ , \ a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\, dx \ , \ b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\, dx \ .$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \frac{n\pi x}{L}\right) \ , \ a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos \frac{n\pi x}{L}\, dx \ , \ b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin \frac{n\pi x}{L}\, dx \ .$$

Para a correcção

pergunta	classificação
1(a)	
1(b)	
2(a)	
2(b)	
3	
total	

(1) (a) Calcule a transformada de Laplace de

$$f(t) = \begin{cases} -2\sin t\ , & \text{se } 0 \leq t \leq 2\pi \text{ ou } 4\pi \leq t \leq 6\pi\ , \\ 0\ , & \text{caso contrário}\ . \end{cases}$$

(b) Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dot{y} - y = f(t) \\ y(0) = 0 \ , \end{cases}$$

onde $f(t)$ é a função da alínea anterior.

(2) (a) Ache o desenvolvimento em série de co-senos da função $g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ definida por
$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \ , \\ -1 & \text{se } \frac{\pi}{2} < x \le \pi \ . \end{cases}$$

(b) Determine as soluções (satisfazendo a equação diferencial para $0 < x < \pi$ e $0 < y < \frac{\pi}{2}$) do seguinte problema de Neumann para a equação de Laplace:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \ , \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, y) = 0 \ , \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0 \ , \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, \frac{\pi}{2}) = g(x) \ , \end{cases}$$

onde $g(x)$ é a função da alínea anterior.

(3) Sabendo que o desenvolvimento em série de senos no intervalo $[0,1]$ da função $h(x) = H_{\frac{1}{2}}(x)$ (onde $H_{\frac{1}{2}}$ designa a função de Heaviside com salto no ponto $x = \frac{1}{2}$) é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi)\right)}{n\pi} \sin(n\pi x) \ ,$$

calcule a soma da série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \ .$$