Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IV – LEEC

TESTE 3 – 6 DE JUNHO DE 2003 – 18:10-19H

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada uma das cinco alíneas vale 4 pontos.
- Apresente e justifique todos os cálculos.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras.
- **A revisão de provas** é na 4ª feira, 11 de Junho, 11h-12h, na sala de dúvidas.
- Boa sorte!

Fórmulas para Transformadas de Laplace

Sendo $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, $\quad \mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$, $\mathcal{L}\{-tf(t)\} = \frac{d}{ds}F(s)$,

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0) \ , \ \mathcal{L}\{H_c(t)f(t-c)\} = e^{-cs}F(s) \ .$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \ , \ \mathcal{L}\{\cos bt\} = \frac{s}{s^2+b^2} \ , \ \mathcal{L}\{\sin bt\} = \frac{b}{s^2+b^2} \ , \ \mathcal{L}\{\delta_c(t)\} = e^{-cs} \ .$$

Fórmulas para Séries de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right) \ , \ a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx \ , \ b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx \ .$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}\right) \ , \ a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos \frac{n\pi x}{L}\,dx \ , \ b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin \frac{n\pi x}{L}\,dx \ .$$

Para a correcção

pergunta	classificação
1(a)	
1(b)	
2(a)	
2(b)	
3	
total	

Nº:

Sala: ____________________

Nome: ____

(1) (a) Calcule a transformada de Laplace de

$$f(t) = \begin{cases} te^{2t} \ , & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ te^{2t} + (t-1)e^{2(t-1)} \ , & \text{se } t \geq 1 \ . \end{cases}$$

(b) Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y^{(2)} - 4\dot{y} + 4y = f(t) \\ y(0) = 0 \ , \quad \dot{y}(0) = 2 \ , \end{cases}$$

onde $f(t)$ é a função da alínea anterior.

(2) (a) Ache o desenvolvimento em série de senos da função $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 1$, $\forall x \in [0,1]$.

(b) Determine a solução (satisfazendo a equação diferencial para $t > 0$ e $0 < x < 1$) do seguinte problema para a equação das ondas:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ , \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 \ , \\ u(0,x) = 0 \ , \ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 1 \ . \end{cases}$$

(3) Mostre que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} .$$

Sugestão: Considere a função $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 1$ para $x \in [0,1]$ e $g(x) = -1$ para $x \in [-1,0[$.