Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IV – LEEC

RECUPERAÇÃO DO TESTE 2 – 12/JUNHO/2003 – 18H10-19H

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada uma das oito alíneas vale 2.5 pontos.
- Apresente e justifique todos os cálculos.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras.
- **A revisão de provas** é na 6ª feira, 20 de Junho, 11h-12h, na sala de dúvidas.
- Boa sorte!

Fórmulas de EDO's

Fórmulas de variação das constantes:

$$y(t) = e^{\int a(t)\,dt}\left(c + \int e^{-\int a(t)\,dt} b(t)\,dt\right) \ , \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$y(t) = e^{At}c + \int^t e^{A(t-s)} b(s)\,ds \ , \qquad c \in \mathbb{R}^n$$

Aniquiladores:

$$(D-a)^{k+1}\left(t^k e^{at}\right) = 0$$

$$\left[(D-a)^2 + b^2\right]^{k+1}\left(t^k e^{at}\cos bt\right) = 0$$

Para a correcção

pergunta	classificação
1(a)	
1(b)	
2(a)	
2(b)	
2(c)	
3	
4	
5	
total	

Nº:

Sala: ________________

Nome: ____

(1) (a) Determine a solução geral da equação diferencial

$$(1+t^2)^2 e^{-y} \frac{dy}{dt} = 2t \ .$$

(b) Mostre que $y(t) = \ln(1+t^2)$, $\forall t$, é a única solução da equação da alínea anterior que satisfaz a condição inicial $y(0) = 0$.

(2) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} .$$

(a) Calcule uma decomposição de Jordan para A.

(b) Calcule e^{At}.

(c) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \begin{bmatrix} y_1(1) \\ y_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

(3) Determine a solução geral da equação diferencial

$$y^{(2)} - \dot{y} - 2y = e^t \ .$$

(4) Escreva, justificando, uma equação de ordem mínima da forma

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \frac{d^k y}{dt^k} = 0 \ ,$$

onde $c_0, \ldots, c_n$ são constantes reais ou complexas não todas nulas, e admitindo a função $t \sin t \cos t$ como solução.

(5) Ache o limite quando $t \to +\infty$ da solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \left(e^y + \sin^4 y\right) \frac{dy}{dt} = y - y^4 \ , \\ y(0) = \frac{1}{2} \ . \end{cases}$$