Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 14/5/2003

ANÁLISE MATEMÁTICA IV – LEEC

INDICAÇÕES PARA A SOLUÇÃO DO TESTE 2 PARA PRATICAR

(1) Trata-se de uma equação separável. Para $y \neq 0$:

$$\dot{y} = \frac{te^{-t^2}}{y\cos y^2} \iff \int y\cos y^2 \dot{y}\,dt = \int te^{-t^2}\,dt + c \iff \sin y^2 = -e^{-t^2} + c\ ,\ c \in \mathbb{R}\ .$$

De acordo com a condição inicial, tem que ser $0 = -1 + c$ ou seja $c = 1$, donde

$$\sin y^2 = 1 - e^{-t^2}\ .$$

Invertendo a função $\sin$ numa vizinhança do ponto 3π, obtém-se

$$y = \pm\sqrt{3\pi - \arcsin\left(1 - e^{-t^2}\right)}\ .$$

Como $y(0) = -\sqrt{3\pi}$, a solução do problema é

$$y = -\sqrt{3\pi - \arcsin\left(1 - e^{-t^2}\right)}\ ,$$

a qual tem intervalo de definição $\mathbb{R}$, pois o radicando é sempre positivo e $0 \leq 1 - e^{-t^2} < 1$ está sempre no domínio de $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

(2) (a) Uma decomposição de Jordan de A é obtida calculando os seus valores próprios e vectores próprios:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ i & -i \end{bmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{bmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{bmatrix}}_{J} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{i}{2} \end{bmatrix}}_{S^{-1}}\ .$$

(b) De acordo com a alínea anterior,

$$e^{At} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ i & -i \end{bmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{bmatrix} e^{2it} & 0 \\ 0 & e^{-2it} \end{bmatrix}}_{e^{Jt}} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{i}{2} \end{bmatrix}}_{S^{-1}} = \begin{bmatrix} \cos 2t & 2\sin 2t \\ -\frac{\sin 2t}{2} & \cos 2t \end{bmatrix}\ .$$

(c) A solução é dada, por exemplo, pela fórmula de variação das constantes:

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{At}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t e^{A(t-s)}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} ds \\ &= \begin{bmatrix} \cos 2t \\ -\frac{\sin 2t}{2} \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 2\sin 2(t-s) \\ \cos 2(t-s) \end{bmatrix} ds \\ &= \begin{bmatrix} \cos 2t \\ -\frac{\sin 2t}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left[\cos 2(t-s)\right]_{s=0}^{s=t} \\ \left[-\frac{1}{2}\sin 2(t-s)\right]_{s=0}^{s=t} \end{bmatrix} ds \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\ , \quad \forall t \in \mathbb{R}\ . \end{aligned}$$

(3) Pela fórmula de variação das constantes, as soluções de sistemas lineares de equações de primeira ordem homogéneas, $\dot{y} = Ay$, são combinações lineares de exponenciais multiplicadas por potências de t da forma $t^k e^{\lambda t}$, onde λ é um valor próprio complexo da matriz dos coeficientes, A. As três funções dadas envolvem as exponenciais e^t, e^{2t} e e^{3t} para um sistema 3 por 3. Logo, os valores próprios de A são 1, 2 e 3.

(4) (a) Como o polinómio característico da equação é

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 \ ,$$

a solução geral da equação homogénea associada $\left(y^{(2)} - 6\dot{y} + 9y = 0\right)$ é

$$y_H(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} \ , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \ .$$

Pelo método dos coeficientes indeterminados, uma solução particular da equação dada pode ser obtida entre as funções que são solução da equação

$$D\left(D^2 - 6D + 9\right) y = D(18) = 0 \ .$$

Como o polinómio característico desta equação é

$$\lambda\left(\lambda^2 - 6\lambda + 9\right) = \lambda(\lambda - 3)^2 \ ,$$

a solução geral desta equação é $a_1 + a_2 e^{3t} + a_3 t e^{3t}$, $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. Ora, os termos $a_2 e^{3t}$ e $a_3 t e^{3t}$ são solução da equação homogénea associada, logo não adiantam na busca de uma solução particular. Procura-se então uma solução particular entre as funções da forma $y_P(t) = a_1$, substituindo na equação original para determinar o coeficiente a_1:

$$\underbrace{y_P^{(2)}}_{0} - 6 \underbrace{\dot{y}}_{0} + 9 \underbrace{y}_{a_1} = 18 \implies a_1 = 2 \ .$$

Tomando então a solução particular $y_P(t) = 2$, obtém-se a solução geral

$$y(t) = \underbrace{c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}}_{y_H} + \underbrace{2}_{y_P} \ , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \ .$$

(b) De acordo com a solução da alínea anterior, $\dot{y}(t) = 3c_1 e^{3t} + c_2(1 + 3t)e^{3t}$, donde

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + 2 = 3 \\ \dot{y}(0) = 3c_1 + c_2 = 4 \end{cases} \implies \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

pelo que a solução particular pedida é

$$y(t) = e^{3t} + t e^{3t} + 2 \ , \quad \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

(5) Como $y_1(t) = c_1 e^{10t}$, $y_2(t) = c_2 \cos 10t + c_3 \sin 10t$ e $y_3(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_{999} t^{999}$, para certos $c_1, c_2, c_3, a_0, \ldots, a_{999} \in \mathbb{R}$, a função $y_1 y_2 y_3$ é da forma

$$\left(a_0 + a_1 t + \ldots + a_{999} t^{999}\right)\left(b_1 e^{10t} \cos 10t + b_2 e^{10t} \sin 10t\right) \ ,$$

pelo que $y_1 y_2 y_3$ é solução da equação

$$\left((D - 10)^2 + 100\right)^{1000} y = 0 \ .$$