Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IV – LEEC

TESTE 2 PARA PRATICAR – MAIO DE 2003

Instruções

- Duração: 50 minutos.
- Cada uma das oito alíneas vale 2.5 pontos.
- Apresente e justifique todos os cálculos.

Fórmulas de EDO's

Fórmulas de variação das constantes:

$$y(t) = e^{\int a(t)\,dt}\left(c + \int e^{-\int a(t)\,dt} b(t)\,dt\right), \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$y(t) = e^{At}c + \int^{t} e^{A(t-s)} b(s)\,ds\,, \qquad c \in \mathbb{R}^n$$

Aniquiladores:

$$(D-a)^{k+1}\left(t^k e^{at}\right) = 0$$

$$\left[(D-a)^2 + b^2\right]^{k+1}\left(t^k e^{at}\cos bt\right) = 0$$

Para a correcção

pergunta	classificação
1	
2(a)	
2(b)	
2(c)	
3	
4(a)	
4(b)	
5	
total	

(1) Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$\dot{y} = \frac{te^{-t^2}}{y\cos y^2} \quad \text{com} \quad y(0) = -\sqrt{3\pi}\ .$$

Explicite a sua solução indicando o intervalo máximo de definição.

(2) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} .$$

(a) Calcule uma decomposição de Jordan para A.

(b) Calcule e^{At}.

(c) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

(3) Suponha que as funções

$$\begin{bmatrix} e^t + e^{2t} \\ \\ e^{2t} \\ \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} e^t + e^{3t} \\ \\ e^{3t} \\ \\ e^{3t} \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} e^t - e^{3t} \\ \\ -e^{3t} \\ \\ -e^{3t} \end{bmatrix}$$

são três soluções $y(t)$ da equação $\dot{y} = Ay$. Determine os valores próprios de A.

(4) Considere a equação

$$y^{(2)} - 6\dot{y} + 9y = 18 \ .$$

(a) Utilizando o método dos coeficientes indeterminados, determine a sua solução geral.

(b) Calcule a solução particular que satisfaz as condições iniciais

$$y(0) = 3 \qquad \text{e} \qquad \dot{y}(0) = 4 \ .$$

(5) Sejam y_1 uma solução arbitrária da equação $\dot{y} - 10y = 0$, y_2 uma solução arbitrária da equação $\ddot{y} + 100y = 0$ e y_3 uma solução arbitrária da equação $y^{(1000)} = 0$. Exiba uma equação diferencial ordinária (não trivial) linear homogénea com coeficientes constantes e de ordem mínima que inclua o produto $y_1 y_2 y_3$ entre as suas soluções.