Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IV – LEEC

TESTE 1 PARA PRATICAR – MARÇO DE 2003

Instruções

- Duração: 50 minutos.
- Cada uma das oito alíneas vale 2.5 pontos.
- Apresente e justifique todos os cálculos.

Fórmulas de Análise Complexa

$$z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\arg z + 2k\pi}{n}} \ , \ k = 0, 1, \ldots, n-1 \qquad \operatorname{Log} z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi) \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \qquad \sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}}\, dz \qquad \text{(fórmulas integrais de Cauchy)}$$

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}}\, dz \qquad \text{(coeficientes das séries de Taylor e de Laurent)}$$

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(z - z_0)^n f(z)\right] \qquad \text{(resíduo num pólo de ordem n)}$$

Para a correcção

pergunta	classificação
1(a)	
1(b)	
1(c)	
2(a)	
2(b)	
3(a)	
3(b)	
4	
total	

(1) Considere a função

$$u(x,y) = \cos x \cosh y \ .$$

(a) Mostre que u é harmónica.

(b) Determine uma função analítica $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ cuja parte real seja u e com $f(0) = 1$.

(c) Calcule o integral de $\frac{f(z)}{z(z-7i)}$ ao longo da elipse $x^2 + 2y^2 = 4$ percorrida no sentido positivo, onde f é a função da alínea anterior.

(2) Seja γ a circunferência $|z| = 10$ percorrida uma vez no sentido positivo.

(a) Calcule $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin z}{(z-\frac{\pi}{2})^2}\,dz$.

(b) Determine uma estimativa do integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{i\mathrm{Re}(z)}}{z^2}\,dz$.

(3) Seja $f(z) = \frac{\sin z}{z(z-4i)^2}$.

(a) Calcule os resíduos de f nas suas singularidades.

(b) Calcule $\int_\gamma f(z)\,dz$ onde γ é a circunferência de centro $-i$ e de raio 2 percorrida uma vez no sentido negativo.

(4) Determine todos os valores possíveis do integral

$$\oint_\gamma \frac{z}{z^4-1}\,dz$$

onde γ é uma curva fechada simples contida no domínio da função integranda e percorrida uma vez no sentido positivo.