Semana 12. Problemas de valor fronteira e séries de Fourier

12.1 Determine os valores de λ para os quais os seguintes problemas de valores fronteira têm soluções não triviais.

a) $y'' - 2y' + (1+\lambda)y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$

b) $y'' + \lambda y = 0; \quad y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi).$

12.2 Calcule a série de Fourier da função $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ +1 & \text{se} \quad 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

12.3 Determine a série de Fourier da função $f(x) = x$, no intervalo $]-1,1[$, indicando o respectivo conjunto de convergência pontual.

12.4 Desenvolva a função definida no intervalo $[0,1]$ por $f(x) = x$ numa série de cosenos e indique para que valores converge pontualmente a série obtida.

12.5 Seja a função f definida no intervalo $(0,\pi)$ por $f(x) = \operatorname{sen}(x)$. Determine a série de Fourier de cosenos da função f, indicando o respectivo conjunto de convergência pontual.

12.6 Determine a série de Fourier da função $g(x) = L - |x|$, no intervalo $[-L, L]$. Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

12.7 a) Calcule, utilizando o Teorema dos Resíduos, os integrais

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{inx}}{5 + 4\cos x} dx, \qquad n = 0, 1, 2 \ldots.$$

b) Deduza, da alínea anterior, os valores de

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nx}{5 + 4\cos x} dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} nx}{5 + 4\cos x} dx.$$

c) Diga, justificando, qual o valor da soma da série $\dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \cos nx$ para cada $x \in [-\pi, \pi]$.

Semana 13. Equações diferenciais parciais

13.1 Recorrendo ao método de separação de variáveis, determine as soluções para $t \geqslant 0$ e para $x \in [0,1]$ de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \\ u(0,t) = 0 \ , u(1,t) = \operatorname{sen} 1 \end{cases}$$

(satisfazendo a equação diferencial para $x \in]0,1[$). Determine a solução que satisfaz a condição inicial

$$u(x,0) = 3\operatorname{sen}(2\pi x) - 7\operatorname{sen}(4\pi x) + \operatorname{sen}(x) \ .$$

13.2 Determine a solução dos seguinte problema de valore inicial e condição na fronteira (PVIF):

$$u_t = u_{xx} - u, \ x \in (0,L), \ \text{com} \begin{cases} u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \\ u(x,0) = \cos(3\pi x/L). \end{cases}$$

13.3 Considere a equação de propagação do calor $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. $\quad (*)$

(a) Mostre que esta equação possui uma solução estacionária (isto é, que não depende do tempo) da forma $u(x) = Ax + B$.

(b) Determine a solução estacionária para o problema correspondente a uma barra situada entre os pontos $x = 0$ e $x = L$, em que se fixam as temperaturas $u(0,t) = T_1, \ u(L,t) = T_2$.

(c) Resolva a equação $(*)$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$ e para as condições iniciais e de fronteira

$$\begin{cases} u(0,t) = 20 \\ u(1,t) = 60 \\ u(x,0) = 75. \end{cases}$$

13.4 Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação das ondas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t,0) = u(t,L) = 0 \\ u(0,x) = 0 \ , \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 1 \end{cases}$$

para $t \geqslant 0$ e para $x \in [0,1]$, (satisfazendo a equação diferencial para $x \in]0,1[$) e onde c é um parâmetro real.

13.5 Seja f a função definida no intervalo $]0,2\pi[$ por $f(x) = x$.

(a) Determine a série de cosenos da função f.

(b) Resolva a equação

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - tu, \ x \in (0,2\pi) \\ u_x(0,t) = u_x(2\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

13.6 Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação de Laplace

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,1) = \cos\,(2\pi x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,y) = \cos\,(2\pi y) \end{cases}$$

para $x, y \in [0,1]$.

13.7 Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação das ondas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ u(x,0,t) = x \ , \quad u(x,1,t) = x \\ u(0,y,t) = 0 \ , \quad u(1,y,t) = 1 \\ u(x,y,0) = x \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = \cos\left(2\pi\left(x-y\right)\right) - \cos\left(2\pi\left(x+y\right)\right) \end{cases}$$

para $x, y \in [0,1]$ e $t \in \mathbb{R}$.