Semana 7. Equações Separáveis, Exactas, e Lineares

7.1 Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais:

(a) $\dfrac{dy}{dt} - y^2 = 1 + t + ty^2$

(b) $(1+t^2)\dfrac{dy}{dt} = 1 + y^2$ (sugestão: $\tan\,(x+y) = \dfrac{\tan\,x + \tan\,y}{1 - \tan\,x\,\tan\,y}$).

7.2 Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais, indicando os intervalos de definição das soluções.

(a) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{1+t^2}$.

(b) $\dfrac{dy}{dt} + \cos t\; y = 0$.

7.3 Determine a solução dos problemas de valor inicial e o intervalo de existência de cada solução.

(a) $\cos\,y\;\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{-t\,\mathrm{sen}\,y}{1+t^2}\,,\qquad y(1) = \dfrac{\pi}{4}$.

(b) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{2\,t}{y - y\,t^2}\,,\qquad y(2) = 3$.

7.4 Resolva o seguinte problema de valor inicial, com $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} y(t)y'(t) = t \\ y(1) = \alpha \end{cases}$$

e diga para que valores de α é que a solução está definida em todo $\mathbb{R}$.

7.5 Determine α de modo a que as equações seguintes sejam exactas e resolva-as:

(a) $ty(y + \alpha e^{\alpha t^2 y}) + t^2(y + e^{\alpha t^2 y})\frac{dy}{dt} = 0$,

(b) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{t + \alpha y}{\alpha^2 t - y}$.

7.6 Determine a solução dos seguintes problemas de valor inicial

(a) $\dfrac{dy}{dt} - \mathrm{sen}\,t\;y = e^{-\cos t},\qquad y(\dfrac{\pi}{2}) = \pi$,

(b) $L\dfrac{di}{dt} + Ri = V\mathrm{sen}\,t,\qquad i(0) = 0$,

(c) $\dfrac{dy}{dt} + y = g(t),\qquad y(0) = 0,\qquad$ onde $g(t) = \begin{cases} e^{-(t-1)} & \text{se} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 1 & \text{se} \quad t > 1\ . \end{cases}$

7.7 Dada uma equação diferencial da forma $\dfrac{dy}{dt} + a(t)\,y = f(t)$ com $a(t)$ e $f(t)$ contínuas em $\mathbb{R}$, $a(t) \geqslant c > 0$ e $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$, mostre que todas as soluções tendem para zero quando t tende para infinito.

Semana 8. Equações redutíveis a exactas; teorema de Picard

8.1 Resolva os seguintes problemas de valor inicial e determine o intervalo de definição das soluções:

(a) $y\cos t + 2\,(y^2 + \operatorname{sen} t)\,\dfrac{dy}{dt} = 0, \qquad y(0) = \sqrt[4]{2},$

(b) $4yt + 2t + 2t^3 + 2t\operatorname{sen} y + (2 + \cos y)\dfrac{dy}{dt} = 0, \qquad y(0) = 0.$

8.2 Determine a solução dos seguintes problemas de valor inicial, indicando o intervalo máximo onde essa solução está definida.

(a) $ty^2 + 1 + 2t^2yy' = 0, \;\; y(1) = 2,$

(b) $y - 2t^2 + [2ty + t\log(t)]\,y' = 0, \;\; y(1) = 2.$

8.3 A equação diferencial

$$\cosh y + (e^{-t} + e^{y})\frac{dy}{dt} = 0$$

admite um factor de integração da forma $\mu = \mu(t + y)$. Determine-o e indique a solução da equação com $y(0) = 0$.

8.4 Resolvas as equações usando as mudanças de variável indicadas:

(a) $y' + y = e^t y^2 \qquad (y = 1/u),$

(b) $ty' = (1 + t)y + y^2 \qquad (y = tv).$

8.5 Mostre que mediante a mudança de variável $v = \dfrac{y}{t}$, as equações segiuntes são separáveis e resolva-as

(a) $\dfrac{dy}{dt} = 2\,\dfrac{y}{t} + \left(\dfrac{y}{t}\right)^2.$

(b) $2\,t\,y\dfrac{dy}{dt} = 3\,y^2 - t^2.$

(c) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{t + y}{t - y}.$

8.6 Para cada uma das seguintes equações diferenciais, esboce o campo de direcções e trace os respectivos tipos de soluções .

(a) $y' = \dfrac{t\,y}{1 + t^2}\,,$ (b) $y' = y\,(1 - y^2)\,,$

(c) $y' = \operatorname{sen}(y - t)\,,$ (d) $y' = \dfrac{y + t}{y - t}\,.$

8.7 Mostre que existe uma solução de classe C^1 para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 6t\sqrt[3]{y^2} \\ y(0) = 0 \ , \end{cases}$$

diferente da solução trivial $y(t) \equiv 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Explique porque é que isto não contradiz o teorema de Picard.

8.8 Considere a equação diferencial

$$\begin{cases} y' = -yg(t,y) + e^{-t} \\ y(0) = y_0 > 0, \end{cases}$$

onde $g : \mathbb{R}^2 \to [1, +\infty[$ tem derivadas parciais contínuas para todo o $(t, y) \in \mathbb{R}^2$. Mostre que a solução da equação dada está definida para todo o t positivo. O que pode dizer quanto ao limite de y quando $t \to +\infty$?

Semana 9. Equações vectoriais lineares de ordem 1

9.1 Para cada uma das seguintes matrizes $\mathbf{A}$, calcule $e^{t\mathbf{A}}$ e resolva o problema de valor inicial, $\dot{u} = \mathbf{A}u, \quad u(0) = [\ 1, 1, 1\ ]^T$.

$$\text{(a)}\quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad\qquad \text{(b)}\quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

9.2 Para cada uma das matrizes $\mathbf{A}$ acima indicadas, calcule $e^{t\mathbf{A}}$.

$$\text{(a)}\quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{(b)}\quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(c)}\quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

9.3 Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Determine $e^{t\mathbf{A}}$ e resolva o problema de valor inicial $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}\,(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.

9.4 Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Determine $e^{\mathbf{A}t}$ e resolva o problema de valor inicial $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(\pi/2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$.

9.5 Determine a solução geral do seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} x' = 14x - 10y + 1 \\ y' = 10x - 2y + 2 \end{cases}$$

(Sugestão: Determine primeiro uma solução particular constante.)

9.6 Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x' = -2x + 4y + t^6 \\ y' = -x + 2y + t^5 \end{cases}, \qquad x(0) = y(0) = 1.$$

9.7 Determine uma matriz 2×2, $\mathbf{A}$, tal que uma das soluções de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\,\mathbf{x}$ seja

$$\mathbf{x}(t) = \left(e^{2t} - 2e^{-t}\,,\, e^{2t} + 4\,e^{-t}\right) .$$

A solução encontrada é única?

Semana 10. Transformada de Laplace.

10.1 Calcule a transformada de Laplace de

(a) $\operatorname{sen}(\sqrt{2}t)$,

(b) t^3,

(c) t^2e^{at},

(d) $\cosh bt$,

(e) $e^{at}\cos bt$,

(f) $t^2\cos bt$.

10.2 Calcule a transformada de Laplace inversa de

(a) $\dfrac{3s+1}{s^2+4}$,

(b) $\dfrac{s^2-5}{s^3+4s^2+3s}$,

(c) $8(s^4+10s^2+9)^{-1}$,

(d) $(s^2-1)^{-2}$,

(e) $\dfrac{2s}{(s+3)^2+1}$.

10.3 Resolva os seguinte problemas de valor inicial:

(a) $y''' - 4\pi y'' + 3\pi^2 y' = 10\pi^3\cos(\pi t)\,, \qquad y(0)=4,\ y'(0)=4\pi,\ y''(0)=7\pi^2$,

(b) $y'' - 3\pi y' + 2\pi^2 y = \pi^2 e^{\pi t}, \qquad y(0)=1,\ y'(0)=\pi$.

10.4 Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais:

(a) $y'' + y' - 2y = e^t + \cos(t)$,

(b) $y'' - 2y' + y = t$,

(c) $y'' + y = \cos(t)$.

10.5 Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais:

(a) $y''' - y'' + y' - 1 = 0$,

(b) $y''' - 4y' = 8t - 16\operatorname{sen}(2t)$,

(c) $y'' - 3y' + 2y = te^{2t}$.

10.6 Utilizando a transformada de Laplace resolva os seguintes problemas de valor inicial (onde H e por δ designam respectivamente, a função de Heaviside e a "função" delta de Dirac com suporte na origem)

(a) $y'' + 2y' + 2y = h(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ $\qquad h(t) = \begin{cases} 1, & \pi \leq t < 2\pi \\ 0, & 0 \leq t < \pi \text{ e } t \geq 2\pi, \end{cases}$

(b) $y'' + 2y' + 2y = \delta(t - \pi)$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$,

(c) $y'' + 4y = H(t - \pi) - H(t - 2\pi)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$,

(d) $y'' + y = \delta(t - \pi)\cos t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

10.7 Os polinómios de Laguerre são definidos por

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!}\left(\frac{d}{dt}\right)^n \left(t^n e^{-t}\right) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Mostre que $\mathcal{L}\left[L_n(t)\right] = (s-1)^n / s^{n+1}$ e que

$$t\frac{d^2}{dt^2}L_n + (1-t)\frac{d}{dt}L_n + nL_n = 0.$$

Semana 11. Equações de ordem superior

11.1 Resolva os sistemas

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{t} \end{pmatrix},$$

reduzindo-os a equações escalares em apenas uma variável.

11.2 Determine uma equação diferencial de 2^a ordem que tenha como soluções a família dada:

(a) $y(t) = A\,t + B\,t^2$,

(b) $y(t) = (A + B\,t)\,e^t$,

(c) $y(y) = At + B\mathrm{sen}\,(2t)$.

11.3 Considere a seguinte equação diferencial linear:

$$\left(e^t + 1\right) y'' - y' - \frac{e^{2t}}{e^t + 1} y = 2e^t\ .$$

(a) Verifique que $y = e^t + 1$ e $y = \frac{1}{e^t+1}$ são duas soluções linearmente independentes da equação homogénea associada.

(b) Resolva a equação (não homogénea) com as condições iniciais: $y(0) = y'(0) = 0$ (Sugestão: Divida a equação por $e^t + 1$.)

11.4 Determine a solução geral de:

(a) $y'' + t\,(y')^2 = 0$.

(b) $2t^2 y'' + (y')^3 = 2ty'$.

(c) $yy'' + (y')^2 = 0$.

(d) $yy'' = 2\,(y')^2$.

11.5 Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} = -2\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 \tan y\,, \\[2ex] y(1) = \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{dy}{dt}(1) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

(Sugestão: Determine primeiro uma função $v(y)$, tal que $\frac{dy}{dt} = v(y)$).