Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 23/5/2003

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

LEEC – PRIMAVERA 2003 – EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

TRANSFORMADA DE LAPLACE, SÉRIES DE FOURIER E EDP'S

Transformada de Laplace

(1) Utilizando a transformada de Laplace, resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y^{(2)} - 5\dot{y} + 4y = e^{2t} \\ y(0) = 1 \ , \quad \dot{y}(0) = -1 \ . \end{cases}$$

Resolução: *Seja $Y(s)$ a transformada de Laplace da solução $y(t)$. Aplicando a transformada de Laplace, a equação fica*

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}\{y^{(2)}\} - 5\mathcal{L}\{\dot{y}\} + 4Y(s) = \mathcal{L}\{e^{2t}\} \\
\Longleftrightarrow \quad & \big(s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)\big) - 5\left(sY(s) - y(0)\right) + 4Y(s) = \tfrac{1}{s-2} \\
\Longleftrightarrow \quad & s^2Y(s) - 5sY(s) + 4Y(s) - s + 6 = \tfrac{1}{s-2} \\
\Longleftrightarrow \quad & \big(s^2 - 5s + 4\big)\, Y(s) = \tfrac{1}{s-2} + s - 6 \\
\Longleftrightarrow \quad & Y(s) = \tfrac{1}{(s-2)(s^2-5s+4)} + \tfrac{s-6}{s^2-5s+4} \ .
\end{aligned}$$

Para reconhecer esta função como a transformada de Laplace de uma combinação de funções elementares, decompõe-se em fracções simples.
Cálculos auxiliares: Quanto à primeira parcela de $Y(s)$, tem-se

$$s^2 - 5s + 4 = 0 \iff s = 1 \text{ ou } s = 4$$

$$\tfrac{1}{(s-1)(s-2)(s-4)} = \tfrac{A}{s-1} + \tfrac{B}{s-2} + \tfrac{C}{s-4}$$

$$1 = A(s-2)(s-4) + B(s-1)(s-4) + C(s-1)(s-2) \ .$$

Quando $s = 1$, obtém-se que $A = \frac{1}{3}$; quando $s = 2$, obtém-se que $B = -\frac{1}{2}$; quando $s = 4$, obtém-se que $C = \frac{1}{6}$. Logo,

$$\frac{1}{(s-2)(s^2-5s+4)} = \frac{\frac{1}{3}}{s-1} - \frac{\frac{1}{2}}{s-2} + \frac{\frac{1}{6}}{s-4} \ .$$

Quanto à segunda parcela de $Y(s)$, tem-se

$$\tfrac{s-6}{s^2-5s+4} = \tfrac{s-4-2}{(s-1)(s-4)} = \tfrac{1}{s-1} - \tfrac{2}{(s-1)(s-4)}$$

$$\tfrac{1}{(s-1)(s-4)} = \tfrac{D}{s-1} + \tfrac{E}{s-4}$$

$$1 = D(s-4) + E(s-1) \ .$$

Quando $s=1$*, obtém-se que* $D=-\frac{1}{3}$*; quando* $s=4$*, obtém-se que* $E=\frac{1}{3}$*. Assim,*

$$\frac{s-6}{s^2-5s+4}=\frac{1}{s-1}+\frac{\frac{2}{3}}{s-1}-\frac{\frac{2}{3}}{s-4}\ .$$

Continuação da resolução: De acordo com os cálculos auxiliares,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \tfrac{\frac{1}{3}}{s-1}-\tfrac{\frac{1}{2}}{s-2}+\tfrac{\frac{1}{6}}{s-4}+\tfrac{1}{s-1}+\tfrac{\frac{2}{3}}{s-1}-\tfrac{\frac{2}{3}}{s-4} \\ &= \tfrac{2}{s-1}-\tfrac{\frac{1}{2}}{s-2}-\tfrac{\frac{1}{2}}{s-4} \\ &= 2\mathcal{L}\{e^t\}-\tfrac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{2t}\}-\tfrac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{4t}\} \end{aligned}$$

pelo que

$$y(t)=2e^t-\frac{1}{2}e^{2t}-\frac{1}{2}e^{4t}\ .$$

$\square$

(2) Sabendo que $y=y(t)$ satisfaz a equação diferencial

$$y^{(2)}-2\dot{y}+y=f(t)$$

e que a transformada de Laplace de $y(t)$ é dada por

$$Y(s)=\frac{2}{(s^2-1)(s-1)}+\frac{1}{(s-1)^2}\ ,$$

determine f e as condições iniciais de $y(t)$, ou seja, os valores de $y(0)$ e $\dot{y}(0)$.

Resolução:

Solução 1: Aplicando a transformada de Laplace, a equação fica

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}\{y^{(2)}\}-2\mathcal{L}\{\dot{y}\}+Y(s)=\mathcal{L}\{f(t)\} \\ \iff\ & \big(s^2Y(s)-sy(0)-\dot{y}(0)\big)-2\left(sY(s)-y(0)\right)+Y(s)=\mathcal{L}\{f(t)\} \\ \iff\ & \big(s^2-2s+1\big)\,Y(s)-sy(0)-\dot{y}(0)=\mathcal{L}\{f(t)\} \\ \iff\ & (s-1)^2\left(\tfrac{2}{(s^2-1)(s-1)}+\tfrac{1}{(s-1)^2}\right)=\mathcal{L}\{f(t)\}+\dot{y}(0)+sy(0) \\ \iff\ & \tfrac{2}{s+1}+1=\mathcal{L}\{f(t)\}+\dot{y}(0)+sy(0) \\ \iff\ & \begin{cases} \frac{2}{s+1} &= \mathcal{L}\{f(t)\} \quad \textit{donde se conclui que} \quad 2e^{-t}=f(t) \\ 1 &= \dot{y}(0) \\ 0 &= y(0) \end{cases} \end{aligned}$$

porque a transformada de Laplace de uma função não pode incluir termos da forma $a+bs$*. Portanto,*

$$\begin{cases} f(t)=2e^{-t}\ , \\ \dot{y}(0)=1 \quad \textit{e} \\ y(0)=0\ . \end{cases}$$

Solução 2: Sabendo que

$$Y(s)=\frac{2}{(s^2-1)(s-1)}+\frac{1}{(s-1)^2}\ ,$$

pode-se calcular $y(t)$ desenvolvendo a expressão da direita em fracções simples. Cálculos auxiliares:

$$(s^2-1)(s-1)=(s-1)^2(s+1)$$

$$\frac{2}{(s^2-1)(s-1)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{(s-1)^2}+\frac{C}{s+1}$$

$$2=A(s-1)(s+1)+B(s+1)+C(s-1)^2$$

Quando $s=1$, obtém-se que $B=1$; quando $s=-1$, obtém-se que $C=\frac{1}{2}$. Derivando a expressão acima,

$$0=A(s-1)+A(s+1)+B+2C(s-1)\ ,$$

e avaliando, por exemplo, em $s=1$, obtém-se que $A=-\frac{1}{2}$. Logo,

$$\begin{aligned}Y(s) &= -\tfrac{\frac{1}{2}}{s-1}+\tfrac{\frac{1}{2}}{s+1}+\tfrac{2}{(s-1)^2}\\ &= -\tfrac{1}{2}\mathcal{L}\{e^t\}+\tfrac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-t}\}-2\tfrac{d}{ds}\mathcal{L}\{e^t\}\\ &= -\tfrac{1}{2}\mathcal{L}\{e^t\}+\tfrac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-t}\}+2\mathcal{L}\{te^t\}\end{aligned}$$

donde se conclui que

$$y(t)=-\frac{1}{2}e^t+\frac{1}{2}e^{-t}+2te^t\ .$$

Como

$$\dot{y}(t)=\frac{3}{2}e^t-\frac{1}{2}e^{-t}+2te^t\ ,$$

os valores em 0 são:

$$y(0)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0 \qquad \text{e} \qquad \dot{y}(0)=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1\ .$$

A função $f(t)$ pode ser calculada substituindo $y(t)$ na equação:

$$y^{(2)}(t)=\frac{7}{2}e^t+\frac{1}{2}e^{-t}+2te^t\ ,$$

pelo que

$$\begin{aligned}&y^{(2)}-2\dot{y}+y\\ =\ &\left(\tfrac{7}{2}e^t+\tfrac{1}{2}e^{-t}+2te^t\right)-2\left(\tfrac{3}{2}e^t-\tfrac{1}{2}e^{-t}+2te^t\right)+\left(-\tfrac{1}{2}e^t+\tfrac{1}{2}e^{-t}+2te^t\right)\\ =\ &2e^{-t}\ .\end{aligned}$$

□

(3) Utilizando a transformada de Laplace, resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases}y^{(2)}-4\dot{y}+4y=f(t)\\ y(0)=0\ ,\quad \dot{y}(0)=2\ ,\end{cases}$$

onde

$$f(t)=\begin{cases}te^{2t}\ , & \text{se}\quad 0\le t\le 1\\ te^{2t}+(t-1)e^{2(t-1)}\ , & \text{se}\quad t\ge 1\ .\end{cases}$$

(4) Utilizando a transformada de Laplace, resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y^{(2)} + 2\dot{y} + y = 2(t-3)H_3(t) \\ y(0) = 2 \ , \quad \dot{y}(0) = 1 \ , \end{cases}$$

onde

$$H_3(t) = \begin{cases} 0 \ , & \text{se} \quad 0 \leq t \leq 3 \\ 1 \ , & \text{se} \quad t \geq 3 \ . \end{cases}$$

Séries de Fourier

(5) Desenvolva em série de Fourier as seguintes funções:

(a) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad -1 \leq x \leq 0 \\ +1 & \text{se} \quad 0 < x \leq 1 \ ; \end{cases}$$

(b) $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos^2(x) - \sin^3(x)$.

Resolução:

(a) *A série de Fourier da função f é da forma*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x)\right)$$

onde

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-1}^{1} f(x) \cos(n\pi x)\, dx && \textit{para } n \geq 0 \ , \\ b_n &= \int_{-1}^{1} f(x) \sin(n\pi x)\, dx && \textit{para } n \geq 1 \ . \end{aligned}$$

Como f é uma função ímpar, todos os a_n's são zero e

$$\begin{aligned} b_n &= 2\int_0^1 f(x) \sin(n\pi x)\, dx \\ &= 2\int_0^1 \sin(n\pi x)\, dx \\ &= -\tfrac{2}{n\pi}(\cos n\pi - \cos 0) \\ &= \tfrac{2-2(-1)^n}{n\pi} \\ &= \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \textit{se } n \textit{ é ímpar ,} \\ 0 & \textit{se } n \textit{ é par .} \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, a série de Fourier de f é

$$\sum_{\substack{n=1\\ n\text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{4}{n\pi}\sin(n\pi x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi}\sin((2n+1)\pi x) \ .$$

Comentário: Como a função f é seccionalmente diferenciável em $[-1,1]$, a sua série de Fourier converge em $[-1,1]$ para

$$\begin{cases} f(x) & \text{se } x \in]-1,0[\text{ ou } x \in]0,1[\\ \\ 0 & \text{se } x=0 \text{ ou } x=\pm 1 \end{cases} = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in]-1,0[\\ \ \ 0 & \text{se } x=0 \text{ ou } x = \pm 1 \\ \ \ 1 & \text{se } x \in]0,1[\ . \end{cases}$$

Nos pontos da forma $x = k \in \mathbb{Z}$, a série converge para 0 porque este valor é a média dos limites laterais nestes pontos da extensão de f a $\mathbb{R}$ como função periódica de período 2:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = -1 \ .$$

$\diamondsuit$

(b) *A série de Fourier da função f é da forma*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \ .$$

Uma vez que o desenvolvimento de Fourier é único, qualquer desenvolvimento que obtenhamos para f em termos das funções base $1,\ \cos(nx)$ e $\sin(nx)$ será o desenvolvimento de Fourier de f. Ora tem-se

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$$

e, pela fórmula de DeMoivre,

$$\begin{aligned} & \mathrm{Im}\left((\cos x + i\sin x)^3\right) = \mathrm{Im}(\cos(3x) + i\sin(3x)) \\ \iff\ & 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x = \sin(3x) \\ \iff\ & 3(1-\sin^2 x)\sin x - \sin^3 x = \sin(3x) \\ \iff\ & \sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin(3x) \ . \end{aligned}$$

Portanto o desenvolvimento de Fourier de f é

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{3}{4}\sin x + \frac{1}{4}\sin(3x) \ ,$$

isto é, $a_0 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_n = 0$ para $n \neq 0,2$ e $b_1 = -\frac{3}{4},\ b_3 = \frac{1}{4},\ b_n = 0$ para $n \neq 1,3$.

$\square$

(6) Desenvolva as seguintes funções em série de Fourier:

(a) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ e^{-x} & \text{se } -1 \leq x < 0 \ ; \end{cases}$

(b) $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sin^4 x$;

(c) $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ 0 & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \ . \end{cases}$

(7) Desenvolva a função $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = e^{-x}$$
em série de senos.

Resolução: *A série de senos da função f é da forma*
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$
onde, para $n \geq 1$ se tem
$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-x} \sin(nx)\, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \mathrm{Im} \left(\int_0^{\pi} e^{(-1+in)x}\, dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \mathrm{Im} \left(\left. \frac{e^{(-1+in)x}}{-1+in} \right|_0^{\pi} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \mathrm{Im} \left(\frac{e^{-\pi}(-1)^n - 1}{-1+in} \right) \\ &= \frac{2n\left(1 - e^{-\pi}(-1)^n\right)}{\pi(1+n^2)} \end{aligned}$$
Logo, a série de senos de f é
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\left(1 - e^{-\pi}(-1)^n\right)}{\pi(1+n^2)} \sin(nx).$$

$\square$

(8) Seja ℓ um número real positivo. Desenvolva a função $f : [0, \ell] \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{\ell}{2} \\ \ell - x & \text{se } \frac{\ell}{2} < x \leq \ell \end{cases}$$
em série de co-senos.

Resolução: *A série de co-senos da função f é da forma*
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\tfrac{n\pi x}{\ell}\right)$$
onde, para $n \geq 0$ se tem
$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos\frac{n\pi x}{\ell}\, dx$$
Assim,
$$a_0 = \frac{2}{\ell} \left(\int_0^{\frac{\ell}{2}} x\, dx + \int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} (\ell - x)\, dx \right) = \frac{\ell}{2}$$

e, para $n \geq 1$,

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\ell}\left(\int_0^{\frac{\ell}{2}} x\cos\left(\tfrac{n\pi x}{\ell}\right)\,dx + \int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell}(\ell-x)\cos\left(\tfrac{n\pi x}{\ell}\right)\,dx\right)\\
&= \frac{2}{\ell}\left(\frac{\ell x}{n\pi}\sin\left(\tfrac{n\pi x}{\ell}\right)\Big|_0^{\frac{\ell}{2}} - \int_0^{\frac{\ell}{2}}\frac{\ell}{n\pi}\sin\left(\tfrac{n\pi x}{\ell}\right)\,dx\right.\\
&\quad \left. + \frac{(\ell-x)\ell}{n\pi}\sin\left(\tfrac{n\pi x}{\ell}\right)\Big|_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} - \int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} -\frac{\ell}{n\pi}\sin\left(\tfrac{n\pi x}{\ell}\right)\,dx\right)\\
&= \frac{2}{\ell}\left(\frac{\ell^2}{2n\pi}\sin\left(\tfrac{n\pi}{2}\right) + \left(\frac{\ell^2}{n^2\pi^2}\cos\left(\tfrac{n\pi x}{\ell}\right)\right)\Big|_0^{\frac{\ell}{2}}\right.\\
&\quad \left. -\frac{\ell^2}{2n\pi}\sin\left(\tfrac{n\pi}{2}\right) - \left(\frac{\ell^2}{n^2\pi^2}\cos\left(\tfrac{n\pi x}{\ell}\right)\right)\Big|_{\frac{\ell}{2}}^{\ell}\right)\\
&= \frac{2\ell}{n^2\pi^2}\left(\cos\left(\tfrac{n\pi}{2}\right) - 1 - \cos(n\pi) + \cos\left(\tfrac{n\pi}{2}\right)\right)\\
&= \frac{2\ell}{n^2\pi^2}\left(2\cos\left(\tfrac{n\pi}{2}\right) - 1 - (-1)^n\right)\ .
\end{aligned}
$$

Tendo em conta que

$$
\cos\left(\tfrac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \textit{se } n \textit{ é ímpar}\\ 1 & \textit{se } n = 4k \textit{ para algum inteiro } k\\ -1 & \textit{se } n = 4k+2 \end{cases}
$$

tem-se

$$
a_n = \begin{cases} -\frac{8\ell}{n^2\pi^2} & \textit{se } n = 4k+2\\ 0 & \textit{caso contrário}\ . \end{cases}
$$

Portanto a série de co-senos de f *é*

$$
\frac{\ell}{4} + \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{8\ell}{(4k+2)^2\pi^2}\cos\left(\tfrac{(4k+2)\pi x}{\ell}\right)\ .
$$

□

(9) Desenvolva as seguintes funções em série de co-senos:

(a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{2}\\ 2-2x & \text{se } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$ para $x \in [0,1]$;

(b) $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ para $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

(10) Desenvolva as seguintes funções em série de senos:

(a) $f(x) = 1$ para $x \in [0,1]$;

(b) $f(x) = (\pi - x)x$ para $x \in [0,\pi]$;

(c) $f(x) = 55 - 40x$ para $x \in [0,1]$;

(d) $f(x) = x(x^2-1)$ para $x \in [0,1]$.

Comentário: *As respostas às primeiras três alíneas deste exercício estão contidas nas resoluções dos exercícios 5, 17 e 13, respectivamente.* ♢

Equações do calor, de Laplace e das ondas

(11) Seja c um parâmetro real positivo. Recorrendo ao método de separação de variáveis, determine a solução do seguinte problema para a equação das ondas

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 \\ u(0,x) = 0 \ , \ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 1 \end{cases}$$

para $t \geq 0$ e para $x \in [0,1]$ (satisfazendo a equação diferencial para $0 < x < 1$).

Resolução: *Pelo método de separação de variáveis, procura-se soluções da EDP da forma*

$$u(t,x) = T(t)X(x) \ ,$$

para as quais

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} T(t)X(x) &= T^{(2)}(t)X(x) \quad \textit{e} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(t)X(x) &= T(t)X^{(2)}(x) \ . \end{aligned}$$

Substituindo na equação, e assumindo que $T(t)X(x) \neq 0$, fica

$$T^{(2)}(t)X(x) = c^2 T(t)X^{(2)}(x) \iff \underbrace{\frac{T^{(2)}(t)}{T(t)}}_{k} = \underbrace{c^2 \frac{X^{(2)}(x)}{X(x)}}_{k}$$

onde cada um dos membros tem que ser uma constante real k (porque o membro esquerdo não depende de x, o membro direito não depende de t e eles têm que ser iguais).

Para que a condição na fronteira,

$$T(t)X(0) = T(t)X(1) = 0 \ ,$$

seja satisfeita por uma solução não identicamente nula, tem que ser

$$X(0) = X(1) = 0$$

(já que, se $X(0) \neq 0$ ou $X(1) \neq 0$, teria que ser $T(t) = 0$, $\forall t$).

A solução geral de

$$X^{(2)}(x) = \frac{k}{c^2} X(x)$$

é, consoante os casos,

$$\begin{cases} X(x) = c_1 e^{\frac{\sqrt{k}}{c}x} + c_2 e^{-\frac{\sqrt{k}}{c}x} & \textit{se } k > 0 \\ X(x) = c_1 + c_2 x & \textit{se } k = 0 \\ X(x) = c_1 \cos(\frac{\sqrt{-k}}{c}x) + c_2 \sin(\frac{\sqrt{-k}}{c}x) & \textit{se } k < 0 \ . \end{cases}$$

Quando $k \geq 0$, a única solução $X(x)$ que satisfaz a condição na fronteira é a solução identicamente nula, ou seja, nesses casos,

$$X(0) = X(1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = c_2 = 0 \ .$$

Quando $k < 0$, a condição $X(0) = 0$ impõe $c_1 = 0$ e depois a condição $X(1) = 0$ impõe a uma solução não identicamente nula que

$$\sin(\frac{\sqrt{-k}}{c}) = 0 \ .$$

Esta condição pode ser satisfeita por uma solução não identicamente nula desde que

$$\frac{\sqrt{-k}}{c} = n\pi \ , \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

ou seja,

$$k = -c^2 n^2 \pi^2 \ , \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Para $k < 0$, a solução geral de

$$T^{(2)}(t) = kT(t)$$

é

$$T(t) = c_1 \cos(\sqrt{-k}t) + c_2 \sin(\sqrt{-k}t) \ .$$

A condição inicial

$$T(0)X(x) = 0$$

impõe que seja $T(0) = 0$ para que a solução não seja identicamente nula. Quando $T(t)$ é uma combinação linear de $\sin$ e $\cos$ como acima, tem que então ser $c_1 = 0$.

Obtêm-se assim todas as seguintes soluções para o problema de valor na fronteira conjugado com a primeira condição inicial:

$$u_n(t, x) = \underbrace{\sin(cn\pi t)}_{T(t)} \ \underbrace{\sin(n\pi x)}_{X(x)} \ , \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

definidas para $t \geq 0$ e para $x \in [0, 1]$. Por linearidade, qualquer combinação linear finita desta soluções é ainda solução e, mais geralmente, qualquer série

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n u_n(t, x)$$

é uma solução formal.

Para que a solução mais geral da forma acima satisfaça a segunda condição inicial

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 1 \ ,$$

tem que ser

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \left. \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|_{t=0} = 1 \ .$$

Como

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = cn\pi \cos(cn\pi t) \sin(n\pi x) \ ,$$

a condição fica

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n cn\pi \sin(n\pi x) = 1 \ .$$

Para encontrar as constantes d_n adequadas, desenvolve-se a função 1 em série de senos. Isso é equivalente a estender esta função ao intervalo $[-1, 1]$ como função ímpar, e desenvolver a extensão em série de Fourier, trabalho esse que foi feito no exercício 5 onde se encontrou que a série de senos para a função 1 é

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \sin(n\pi x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi} \sin((2n+1)\pi x) \ .$$

Logo, os d_n's devem ser 0 quando n é par e devem satisfazer

$$d_n cn\pi = \frac{4}{n\pi}$$

quando n é ímpar.
Conclui-se que a série que dá a solução formal do problema posto é

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{4}{cn^2\pi^2} \sin(cn\pi t)\sin(n\pi x)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{c(2n+1)^2\pi^2} \sin\left(c(2n+1)\pi t\right)\sin((2n+1)\pi x) \ .$$

□

(12) Use o método de separação de variáveis para determinar a solução do seguinte problema de valor na fronteira para a equação de Laplace:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x,0) = u(x,\pi) = u(0,y) = 0 \\ u(\pi,y) = \sin(2y) \end{cases}$$

para $0 \le x \le \pi$ e $0 \le y \le \pi$.

Resolução: *Pelo método de separação de variáveis, procura-se soluções do problema da forma*

$$u(x,y) = X(x)Y(y).$$

Substituindo na equação obtém-se, para $X(x)Y(y) \neq 0$,

$$X^{(2)}(x)Y(y) + X(x)Y^{(2)}(y) = 0 \iff \frac{X^{(2)}(x)}{X(x)} = -\frac{Y^{(2)}(y)}{Y(y)} \ .$$

Conclui-se que existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{X^{(2)}(x)}{X(x)} = k = -\frac{Y^{(2)}(y)}{Y(y)} \ .$$

Para que a condição na fronteira

$$X(x)Y(0) = X(x)Y(\pi) = 0$$

seja satisfeita por uma solução não identicamente nula, tem que ser

$$Y(0) = Y(\pi) = 0 \ .$$

A equação

$$Y^{(2)}(y) + kY(y) = 0$$

só tem soluções não identicamente nulas que verifiquem a condição fronteira $Y(0) = Y(\pi) = 0$ se $k > 0$. Nesse caso, a solução geral é

$$Y(y) = c_1\cos(\sqrt{k}y) + c_2\sin(\sqrt{k}y) \ .$$

A condição $Y(0) = 0$ implica $c_1 = 0$ e a condição $Y(\pi) = 0$ impôe

$$\sin(\sqrt{k}\pi) = 0 \iff k = n^2 \text{ para algum } n \text{ inteiro} \ .$$

Para que a solução não seja identicamente nula, tem que ser $n \neq 0$ e claramente basta considerar $n > 0$. A solução geral da equação

$$X^{(2)}(x) - n^2X(x) = 0$$

é

$$X(x) = c_1e^{nx} + c_2e^{-nx} \ .$$

Para uma solução não identicamente nula, a condição na fronteira $X(0)Y(y) = 0$ implica

$$X(0) = 0 \iff c_1 + c_2 = 0 \iff c_2 = -c_1$$

pelo que

$$X(x) = 2c_1 \left(\frac{e^{nx} - e^{-nx}}{2} \right) = 2c_1 \sinh(nx) \ .$$

Obtêm-se assim as seguintes soluções que verificam todas as condições na fronteira excepto possivelmente a que foi imposta para $x = \pi$:

$$u_n(x, y) = \sinh(nx) \sin(ny), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

definidas para $0 \leq x \leq \pi$ e $0 \leq y \leq \pi$.

Por linearidade obtem-se a solução formal

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n u_n(x, y) \ .$$

Para que esta série satisfaça a condição fronteira que resta devemos ter

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} d_n u_n(\pi, y) = \sin 2y \\ \iff \quad & \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sinh(n\pi) \sin(ny) = \sin 2y \ . \end{aligned}$$

Conclui-se que d_n=0 para $n \neq 2$ e que

$$d_2 = \frac{1}{\sinh(2\pi)} \ .$$

Isto é, a solução do problema do enunciado é

$$u(x, y) = \frac{1}{\sinh(2\pi)} \sinh(2x) \sin(2y) \ .$$

□

(13) Considere a equação do calor
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ ,$$
onde α é um parâmetro real positivo, $t \geq 0$ e $x \in [0, L]$. Uma solução *estacionária* da equação do calor é uma solução que não depende do tempo, t.

(a) Mostre que todas as soluções estacionárias da equação do calor são lineares em x, i.e., são funções da forma
$$u(x) = ax + b \ .$$

(b) Determine uma solução estacionária para a equação do calor com a seguinte condição na fronteira:
$$u(t, 0) = T_1 \qquad \text{e} \qquad u(t, L) = T_2 \ .$$

(c) Ache uma solução da equação do calor (verificando a equação diferencial para $0 < x < L$) com as seguintes condições de fronteira e inicial
$$\begin{cases} u(0, x) = 75 \\ u(t, 0) = 20 \ , \ u(t, 1) = 60 \ . \end{cases}$$

Sugestão: Considere soluções da forma
$$u(t, x) = v(x) + w(t, x) \ ,$$
onde $v(x)$ é uma solução estacionária do problema com condição na fronteira:
$$u(t, 0) = 20 \qquad \text{e} \qquad u(t, 1) = 60 \ .$$

Resolução:

(a) *Seja $u(x)$ uma solução estacionária da equação do calor. Substituindo $u(x)$ na equação, obtém-se*
$$0 = \alpha^2 u^{(2)}$$
cuja solução geral é
$$u(x) = c_1 + c_2 x \ ,$$
que é uma função linear.

(b) *Procura-se os coeficientes c_1 e c_2 tais que a correspondente solução estacionária, $u(x) = c_1 + c_2 x$, satisfaça*
$$\begin{cases} u(0) = c_1 = T_1 \\ u(L) = c_1 + c_2 L = T_2 \ . \end{cases}$$
A solução deste sistema linear é
$$\begin{cases} c_1 = T_1 \\ c_2 = \frac{T_2 - T_1}{L} \ . \end{cases}$$
Encontra-se então a seguinte solução estacionária para a equação do calor com a condição na fronteira dada:
$$u(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} \, x \ .$$

(c) *De acordo com a sugestão, procura-se uma solução da forma*
$$u(t, x) = v(x) + w(t, x) \ ,$$

onde $v(x)$ *é uma solução estacionária do problema da alínea (b) tomando* $T_1 = 20$*,* $T_2 = 60$ *e* $L = 1$*. Então*

$$v(x) = 20 + 40x \ ,$$

e $w(t,x) = u(t,x) - v(x)$ *terá de ser uma solução do problema homogéneo*

$$(\star) \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ w(t,0) = w(t,1) = 0 \ . \end{cases}$$

Aplica-se o método de separação de variáveis na pesquisa de soluções de $(\star)$*: procura-se soluções da forma*

$$T(t)X(x) \ ,$$

para as quais

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} T(t)X(x) &= \dot{T}(t)X(x) \quad \text{e} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(t)X(x) &= T(t)X^{(2)}(x) \ . \end{aligned}$$

Substituindo na equação, e assumindo que $T(t)X(x) \neq 0$*, fica*

$$\dot{T}(t)X(x) = \alpha^2 T(t)X^{(2)}(x) \iff \underbrace{\frac{\dot{T}(t)}{T(t)}}_{k} = \underbrace{\alpha^2 \frac{X^{(2)}(x)}{X(x)}}_{k}$$

onde cada um dos membros tem que ser uma constante real k *(porque o membro esquerdo não depende de* x*, o membro direito não depende de* t *e eles têm que ser iguais).*
A solução geral de

$$\dot{T}(t) = kT(t)$$

é

$$T(t) = ce^{kt} \qquad \text{com } c \in \mathbb{R} \ .$$

A solução geral de

$$X^{(2)}(x) - \frac{k}{\alpha^2} X(x) = 0$$

é, consoante os casos,

$$\begin{cases} X(x) = c_1 e^{\frac{\sqrt{k}}{\alpha}x} + c_2 e^{-\frac{\sqrt{k}}{\alpha}x} & \text{se } k > 0 \\ X(x) = c_1 + c_2 x & \text{se } k = 0 \\ X(x) = c_1 \cos(\frac{\sqrt{-k}}{\alpha}x) + c_2 \sin(\frac{\sqrt{-k}}{\alpha}x) & \text{se } k < 0 \ . \end{cases}$$

Para que a condição homogénea na fronteira,

$$T(t)X(0) = T(t)X(1) = 0 \ ,$$

seja satisfeita por uma solução não identicamente nula, tem que ser

$$X(0) = X(1) = 0$$

(já que, se $X(0) \neq 0$ *ou* $X(1) \neq 0$*, teria que ser* $T(t) = 0$*,* $\forall t$*). Quando* $k \geq 0$*, a única solução* $X(x)$ *que satisfaz esta condição na fronteira é a solução identicamente nula, ou seja, nesses casos,*

$$X(0) = X(1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = c_2 = 0 \ .$$

Quando $k < 0$*, a condição* $X(0) = 0$ *impõe* $c_1 = 0$ *e depois a condição* $X(1) = 0$ *impõe a uma solução não identicamente nula que*

$$\sin(\frac{\sqrt{-k}}{\alpha}) = 0 \ .$$

Esta condição pode ser satisfeita por uma solução não identicamente nula desde que

$$\frac{\sqrt{-k}}{\alpha} = n\pi \ , \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

ou seja,

$$k = -n^2\pi^2\alpha^2 \ , \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Obtêm-se assim todas as seguintes soluções para o problema homogéneo ($\star$)*:*

$$w_n(t,x) = \underbrace{e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t}}_{T(t)} \underbrace{\sin(n\pi x)}_{X(x)} \ , \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

definidas para $t \geq 0$ *e para* $x \in [0,1]$*. Por linearidade, qualquer combinação linear finita desta soluções é ainda solução e, mais geralmente, qualquer série uniformemente convergente da forma*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n w_n(t,x)$$

é ainda solução.

Obtêm-se assim as seguintes funções que verificam todas as condições do problema posto excepto a condição inicial:

$$20 + 40x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n w_n(t,x) \ .$$

Finalmente, impondo a condição inicial, $u(0,x) = 75$*, terá que ser*

$$20 + 40x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n w_n(0,x) = 75 \ ,$$

ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x) = 55 - 40x \ .$$

Para encontrar as constantes b_n *adequadas, desenvolve-se a função* $55 - 40x$ *em série de senos. Isso é equivalente a estender esta função ao intervalo* $[-1,1]$ *como função ímpar, e desenvolver a extensão em série de Fourier. Os coeficientes* a_n *de uma função ímpar anulam-se e os coeficientes* b_n*, para* $n \geq 1$*, são dados por*

$$\begin{aligned}
b_n &= \int_{-1}^{1} f(x)\sin(n\pi x)\,dx \\
&= 2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)\,dx \\
&= 2\int_0^1 (55 - 40x)\sin(n\pi x)\,dx \\
&= 2\left[-55\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} + 40x\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} - 40\frac{\sin(n\pi x)}{n^2\pi^2}\right]_0^1 \\
&= 2\left[-55\frac{(-1)^n}{n\pi} + 55\frac{1}{n\pi} + 40\frac{(-1)^n}{n\pi}\right] \\
&= \tfrac{110 - 30(-1)^n}{n\pi} \ .
\end{aligned}$$

Conclui-se que a solução formal do problema posto é

$$20 + 40x + \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{110-30(-1)^n}{n\pi} \, e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t} \sin(n\pi x) \ .$$

$\square$

Comentário: *O problema anterior diz respeito à evolução da distribuição de temperatura numa barra situada entre os pontos $x = 0$ e $x = L$. No instante inicial todos os pontos da barra estão à mesma temperatura (75) e as temperaturas nas extremidades são mantidas constantes, igual a 20 em $x = 0$ e igual a 60 na extremidade $x = 1$.* $\diamondsuit$

(14) Determine a solução do seguinte problema para a equação do calor:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ 75 & \text{se } 1 < x \le 2 \end{cases} \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(2,t) = 0 \end{cases}$$

para $t \ge 0$ e $0 \le x \le 2$ (satisfazendo a equação diferencial para $0 < x < 2$).

(15) Seja c um parâmetro real positivo. Determine a solução do seguinte problema de valor na fronteira para a equação das ondas:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = x\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u(0,t) = u(1,t) = 0 \end{cases}$$

para $t \ge 0$ e $0 \le x \le 1$ (satisfazendo a equação diferencial para $0 < x < 1$).

(16) Use o método de separação de variáveis para determinar uma solução do seguinte problema para a equação de Laplace:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,1) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,y) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = \sin(2\pi y) \end{cases}$$

para $0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1$.

Método de separação de variáveis

(17)
(a) Determine as soluções para $t \ge 0$ e para $x \in [0,\pi]$ de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \end{cases}$$

(satisfazendo a equação diferencial para $x \in]0,\pi[$).

(b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial

$$u(0,x) = (\pi - x)x \ .$$

Resolução:

(a) *Pelo método de separação de variáveis, procura-se soluções da EDP da forma*

$$u(t,x) = T(t)X(x) \ ,$$

para as quais

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}T(t)X(x) &= \dot{T}(t)X(x) \quad \text{e} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}T(t)X(x) &= T(t)X^{(2)}(x) \ . \end{aligned}$$

Substituindo na equação, e assumindo que $T(t)X(x) \neq 0$, fica

$$\dot{T}(t)X(x) = T(t)X^{(2)}(x) - T(t)X(x) \iff \underbrace{\frac{\dot{T}(t)}{T(t)}}_{k} = \underbrace{\frac{X^{(2)}(x)}{X(x)} - 1}_{k}$$

onde cada um dos membros tem que ser uma constante real k (porque o membro esquerdo não depende de x, o membro direito não depende de t e eles têm que ser iguais).
A solução geral de

$$\dot{T}(t) = kT(t)$$

é

$$T(t) = ce^{kt} \qquad \text{com } c \in \mathbb{R} \ .$$

A solução geral de

$$X^{(2)}(x) - (k+1)X(x) = 0$$

é, consoante os casos,

$$\begin{cases} X(x) = c_1 e^{\sqrt{k+1}x} + c_2 e^{-\sqrt{k+1}x} & \text{se } k+1 > 0 \\ X(x) = c_1 + c_2 x & \text{se } k+1 = 0 \\ X(x) = c_1 \cos(\sqrt{-k-1}x) + c_2 \sin(\sqrt{-k-1}x) & \text{se } k+1 < 0 \ . \end{cases}$$

Para que a condição na fronteira,

$$T(t)X(0) = T(t)X(\pi) = 0 \ ,$$

seja satisfeita por uma solução não identicamente nula, tem que ser

$$X(0) = X(\pi) = 0$$

(já que, se $X(0) \neq 0$ ou $X(\pi) \neq 0$, teria que ser $T(t) = 0$, $\forall t$). Quando $k+1 \geq 0$, a única solução $X(x)$ que satisfaz esta condição na fronteira é a solução identicamente nula, ou seja, nesses casos,

$$X(0) = X(\pi) = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = c_2 = 0 \ .$$

Quando $k+1 < 0$, a condição $X(0) = 0$ impõe $c_1 = 0$ e depois a condição $X(\pi) = 0$ impõe a uma solução não identicamente nula que

$$\sin(\sqrt{-k-1}\pi) = 0 \ .$$

Esta condição pode ser satisfeita por uma solução não identicamente nula desde que

$$\sqrt{-k-1}\pi = n\pi \ , \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

ou seja,

$$k = -1 - n^2 \ , \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

Obtêm-se assim todas as seguintes soluções para o problema de valor na fronteira dado:

$$u_n(t,x) = \underbrace{e^{-(1+n^2)t}}_{T(t)} \underbrace{\sin(nx)}_{X(x)} , \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

definidas para $t \geq 0$ *e para* $x \in [0, \pi]$*. Por linearidade, qualquer combinação linear finita destas soluções é ainda solução e, mais geralmente, qualquer série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \, u_n(t,x)$$

é uma solução formal.

(b) *Para que a solução geral da forma acima satisfaça a condição inicial*

$$u(0,x) = (\pi - x)x \ ,$$

tem que ser

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n(0,x) = (\pi - x)x \ ,$$

ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) = (\pi - x)x \ .$$

Para encontrar as constantes b_n *adequadas, desenvolve-se a função* $(\pi - x)x$ *em série de senos. Isso é equivalente a estender esta função ao intervalo* $[-\pi, \pi]$ *como função ímpar, e desenvolver a extensão em série de Fourier. Os coeficientes da série são*

$$\begin{aligned}
b_n &= \tfrac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x)x \sin(nx) \, dx \\
&= 2 \int_0^{\pi} x \sin(nx) \, dx - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin(nx) \, dx \\
&= 2 \left[-\tfrac{x}{n} \cos(nx) + \tfrac{1}{n^2} \sin(nx) \right]_0^{\pi} \\
&\quad - \tfrac{2}{\pi} \left[-\tfrac{x^2}{n} \cos(nx) + \tfrac{2x}{n^2} \sin(nx) + \tfrac{2}{n^3} \cos(nx) \right]_0^{\pi} \\
&= \tfrac{4}{n^3 \pi} [1 - (-1)^n] \\
&= \begin{cases} \frac{8}{n^3 \pi} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 0 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}
\end{aligned}$$

(onde as primitivas foram obtidas por primitivação por partes, uma vez no primeiro integral e duas no segundo). Logo, a solução pretendida é

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{8}{n^3 \pi} e^{-(1+n^2)t} \sin(nx) \\
= \ &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{(2n+1)^3 \pi} e^{-\left(1+(2n+1)^2\right)t} \sin((2n+1)x) \ .
\end{aligned}$$

□

(18)

(a) Determine as soluções para $t \geq 0$ e para $x \in [0,1]$ de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \\ u(t,0) = 0 \ , \quad u(t,1) = \sin 1 \end{cases}$$

(satisfazendo a equação diferencial para $x \in]0,1[$).

(b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial

$$u(0,x) = 3\sin(2\pi x) - 7\sin(4\pi x) + \sin x \ .$$

Resolução:

(a) *A solução geral deste problema com condições não homogéneas pode ser obtida somando a uma solução particular do problema não homogéneo a solução geral do problema homogéneo associado.*
Vai-se procurar uma solução particular entre as soluções estacionárias, *i.e., que não dependem do tempo t. Em resumo, procura-se escrever a solução geral na forma*

$$u(t,x) = v(x) + w(t,x) \ ,$$

onde $v(x)$ é uma solução particular estacionária do problema dado e $w(t,x)$ é a solução geral do problema homogéneo

$$(\star) \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + w \\ w(t,0) = w(t,1) = 0 \ . \end{cases}$$

Solução particular estacionária:
Substituindo $v(x)$ na equação, obtém-se

$$0 = v^{(2)} + v$$

cuja solução geral é

$$v(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x \ .$$

Para que a condição em $x = 0$, $v(0) = 0$, seja satisfeita, tem que ser $c_1 = 0$. Depois para que a condição em $x = 1$, $v(1) = \sin 1$, seja satisfeita, tem que ser $c_2 = 1$. Conclui-se que

$$v(x) = \sin x$$

é uma solução particular (estacionária) do problema não homogéneo.
Solução geral homogénea:
Pelo método de separação de variáveis, procura-se soluções do problema homogéneo $(\star)$ da forma

$$w(t,x) = T(t)X(x) \ ,$$

para as quais

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} T(t)X(x) &= \dot{T}(t)X(x) \quad \text{e} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(t)X(x) &= T(t)X^{(2)}(x) \ . \end{aligned}$$

Substituindo na equação, e assumindo que $T(t)X(x) \neq 0$, fica

$$\dot{T}(t)X(x) = T(t)X^{(2)}(x) + T(t)X(x) \iff \underbrace{\frac{\dot{T}(t)}{T(t)}}_{k} = \underbrace{\frac{X^{(2)}(x)}{X(x)} + 1}_{k}$$

onde cada um dos membros tem que ser uma constante real k (porque o membro esquerdo não depende de x, o membro direito não depende de t e eles têm que ser iguais).
A solução geral de

$$\dot{T}(t) = kT(t)$$

é

$$T(t) = ce^{kt} \qquad \text{com } c \in \mathbb{R} \ .$$

A solução geral de

$$X^{(2)}(x) - (k-1)X(x) = 0$$

é, consoante os casos,

$$\begin{cases} X(x) = c_1 e^{\sqrt{k-1}x} + c_2 e^{-\sqrt{k-1}x} & \text{se } k-1>0 \\ X(x) = c_1 + c_2 x & \text{se } k-1=0 \\ X(x) = c_1\cos(\sqrt{1-k}x) + c_2\sin(\sqrt{1-k}x) & \text{se } k-1<0 \ . \end{cases}$$

Para que a condição na fronteira,

$$T(t)X(0) = T(t)X(1) = 0 \ ,$$

seja satisfeita por uma solução não identicamente nula, tem que ser

$$X(0) = X(1) = 0$$

(já que, se $X(0) \neq 0$ ou $X(1) \neq 0$, teria que ser $T(t) = 0$, $\forall t$). Quando $k-1 \geq 0$, a única solução $X(x)$ que satisfaz esta condição na fronteira é a solução identicamente nula, ou seja, nesses casos,

$$X(0) = X(1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = c_2 = 0 \ .$$

Quando $k-1<0$, a condição $X(0)=0$ impõe $c_1 = 0$ e depois a condição $X(1) = 0$ impõe a uma solução não identicamente nula que

$$\sin(\sqrt{1-k}) = 0 \ .$$

Esta condição pode ser satisfeita por uma solução não identicamente nula desde que

$$\sqrt{1-k} = n\pi \ , \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

ou seja,

$$k = 1 - n^2\pi^2 \ , \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

Obtêm-se assim todas as seguintes soluções para o problema homogéneo ($\star$):

$$w_n(t,x) = \underbrace{e^{(1-n^2\pi^2)t}}_{T(t)} \ \underbrace{\sin(n\pi x)}_{X(x)} \ , \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

definidas para $t \geq 0$ e para $x \in [0,1]$. Por linearidade, qualquer combinação linear finita desta soluções é ainda solução e, mais geralmente, qualquer série

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n w_n(t,x)$$

é uma solução formal.

<u>Solução geral:</u> $$\sin x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n w_n(t,x) \ .$$

(b) *Para que a solução geral da forma acima satisfaça a condição inicial*

$$u(0,x) = 3\sin(2\pi x) - 7\sin(4\pi x) + \sin x \ ,$$

tem que ser

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n w_n(0,x) = 3\sin(2\pi x) - 7\sin(4\pi x) \ ,$$

ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x) = 3\sin(2\pi x) - 7\sin(4\pi x) \ .$$

As constantes b_n adequadas são

$$b_2 = 3 \ , \qquad b_4 = -7 \ , \qquad \text{todos os outros } b_n\text{'s são zero} \ .$$

(A função $3\sin(2\pi x) - 7\sin(4\pi x)$ já é dada em série de Fourier.)
A solução pretendida é

$$\sin x + 3e^{(1-4\pi^2)t}\sin(2\pi x) - 7e^{(1-16\pi^2)t}\sin(4\pi x) \ .$$

□

(19)

(a) Calcule a série de Fourier da função $f(x) = x(x^2-1)$ para $x \in [-1,1]$.

(b) Recorrendo ao método de separação de variáveis, determine as soluções para $t \geq 0$ e para $x \in [0,1]$ de

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\frac{\partial u}{\partial t} + u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 \ . \end{cases}$$

(c) Determine a solução que satisfaz a condição inicial

$$u(0,x) = \sin(\pi x) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = x(x^2-1) \ .$$

(20)

(a) Calcule a série de Fourier da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \left|\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right| \ .$$

(b) Recorrendo ao método de separação de variáveis, determine as soluções para $t \geq 0$ e para $x \in [0,1]$ de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,1) = 0 \ . \end{cases}$$

(c) Determine a solução que satisfaz a condição inicial $u(0,x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.