Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 8/Dez/2005

ANÁLISE MATEMÁTICA III A

TESTE 4 PARA PRATICAR – DEZEMBRO DE 2005

RESOLUÇÃO

(As soluções aqui propostas não são únicas!)

Duração: 50 minutos

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada um dos quatro problemas vale 5 pontos, sendo a cotação de cada alínea 2.5.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras. É permitida a utilização de papel de rascunho.
- Utilize papel de rascunho para esboços e cálculos preliminares, de modo a guardar o espaço de resposta para uma **apresentação clara e bem justificada** de todos os cálculos ou argumentos.
- **A revisão de provas** é na 6ª feira, 16 de Dezembro, 18h30-19h30, na *antiga* sala de dúvidas, localizada na cave -2 do Edifício de Pós-Graduação.
- Boa sorte!

Para a correcção

pergunta	classificação
(1)(a)	
(1)(b)	
(2)(a)	
(2)(b)	
(3)(a)	
(3)(b)	
(4)(a)	
(4)(b)	
total	

Nº:

Curso: ________________

Nome: ____

(1) Considere a variedade

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1, y > 0\} \ .$$

(a) Exiba uma parametrização global de X.

(b) Calcule a massa de uma placa com a forma de X e densidade de massa $f(x, y, z) = 1 + z$.

Resolução:

(a) *A variedade X é um hemisfério da esfera unitária centrada no ponto $(1, 0, 1)$. Em coordenadas esféricas adaptadas $(x, y, z) = (1 + r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, 1 + r\cos\varphi)$, a variedade X é dada por $r = 1$, $\theta < \pi$. Obtém-se assim a parametrização de X*

$$G :]0, \pi[\times]0, \pi[\longrightarrow X \ ,$$
$$G(\theta, \varphi) = (1 + \sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, 1 + \cos\varphi) \ .$$

(b) *A parametrização G da alínea anterior tem*

$$G'(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} -\sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta \\ 0 & -\sin\varphi \end{bmatrix}$$

pelo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial\theta} \times \frac{\partial G}{\partial\varphi} &= \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\sin\varphi\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta & 0 \\ \cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi \end{bmatrix} \\ &= (-\sin^2\varphi\cos\theta, -\sin^2\varphi\sin\theta, -\sin\varphi\cos\varphi) \end{aligned}$$

$$\mathcal{J}G(\theta, \varphi) = \left| \frac{\partial G}{\partial\theta} \times \frac{\partial G}{\partial\varphi} \right| = \sin\varphi \ .$$

A massa da placa é

$$\begin{aligned} \textit{Massa} &= \int_X f \, dV_2 \\ &= \int_0^\pi \int_0^\pi \underbrace{(2 + \cos\varphi)}_{f \circ G} \underbrace{\sin\varphi}_{\mathcal{J}G} \, d\theta \, d\varphi \\ &= \pi \left[-2\cos\varphi - \frac{1}{2}\cos^2\varphi \right]_0^\pi \ = \ 4\pi \ . \end{aligned}$$

□

(2) Considere as variedades $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, -1 < z < 1\}$ e $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} = 2 - z^2, -1 < z < 1\}$. Seja F o campo vectorial dado por $F(x, y, z) = (x, y, -2z)$.

(a) Usando a definição, calcule o fluxo de F através de A segundo a normal unitária ν que satisfaz $\nu(0, 1, 0) = (0, -1, 0)$.

(b) Usando o teorema de divergência, calcule o fluxo de F através de B segundo a normal unitária ν que satisfaz $\nu(0, 2, 0) = (0, 1, 0)$.

Resolução:

(a) *Parametriza-se A usando coordenadas cilíndricas:*

$$g :]0, 2\pi[\times]-1, 1[\longrightarrow A \,, \quad g(\theta, z) = (\cos\theta, \sin\theta, z) \,.$$

Como o vector

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial z} = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

aponta no sentido oposto ao de ν (basta verificar num ponto, por exemplo, quando $(\theta, z) = (\frac{\pi}{2}, 0)$, no ponto $(x, y, z) = (0, 1, 0)$ tem-se $\frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial z} = (0, 1, 0) = -\nu(0, 1, 0)$), o fluxo pedido é

$$\int_A F \cdot \nu \, dV_2 = -\int_0^{2\pi} \int_{-1}^{1} \underbrace{(\cos\theta, \sin\theta, -2z)}_{F(g(\theta,z))} \cdot \underbrace{(\cos\theta, \sin\theta, 0)}_{\frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial z}} \, dz \, d\theta = -4\pi \,.$$

(b) *Os fechos das superfícies A e B juntos formam a fronteira de um domínio seccionalmente regular que lembra uma missanga: $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < \sqrt{x^2 + y^2} < 2 - z^2, -1 < z < 1\}$. As normais unitárias dadas em (a) e (b) correspondem à normal exterior a V. Aplicando o teorema da divergência tem-se*

$$\int_V \operatorname{div} F \, dV_3 = \int_A F \cdot \nu \, dV_2 + \int_B F \cdot \nu \, dV_2 \,.$$

Como $\operatorname{div} F(x, y, z) = 1 + 1 - 2 = 0$, do resultado da alínea (a) conclui-se que

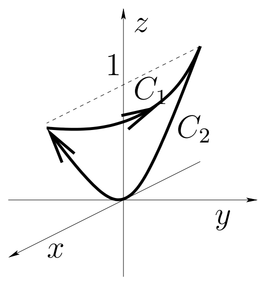
$$\int_B F \cdot \nu \, dV_2 = -\int_A F \cdot \nu \, dV_2 = 4\pi \,.$$

□

(3) Considere o domínio seccionalmente regular $A = \{(x, y, z) \in X : y > 0, z < 1\}$ na variedade $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$ e o campo $F(x, y, z) = (z, y, x - z)$.

(a) Escolha uma orientação o de X e parametrize ∂A respeitando a orientação induzida por o.

(b) Usando o teorema de Stokes clássico, calcule o fluxo de F através de A no sentido da normal unitária ν cuja terceira componente é negativa.



orientação o escolhida em (a)
é oposta à da normal ν em (b)

Resolução:

(a) *O domínio A é a porção do parabolóide $z = x^2 + y^2$ com $y > 0$ e $z < 1$, pelo que tem fronteira ∂A composta pela semi-circunferência C_1 dada por $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$, $z = 1$ e pela parábola C_2 dada por $z = x^2$, $y = 0$, $z \leq 1$. Escolhe-se a orientação de X dada pela normal que no ponto $(0, 0, 0)$ vale $(0, 0, 1)$. As seguintes parametrizações de ∂A respeitam essa orientação:*

$$g_1 :]0, \pi[\to C_1 , \qquad g_1(t) = (\cos t, \sin t, 1) \quad e$$
$$g_2 :]-1, 1[\to C_2 , \qquad g_2(x) = (x, 0, x^2) \ .$$

(b) *Para aplicar o teorema de Stokes clássico, há que escrever F como o rotacional de algum outro campo G. Verifica-se que $G(x, y, z) = (yz, \frac{x^2}{2}, yz)$, por exemplo, é um potencial para F, ou seja $\operatorname{rot} G = F$. Portanto,*

$$\textit{Fluxo} = \int_A F \cdot \nu \, dV_2 = \int_A \operatorname{rot} G \cdot \nu \, dV_2 = \int_{(\partial A)^o} G$$

onde o é a orientação induzida por ν. Como ν é a normal oposta à escolhida na alínea (a), usando as parametrizações acima o integral é

$$\begin{aligned} & \textstyle\int_{(\partial A)^o} G \ = \ -\int_{C_1} G \cdot dg_1 - \int_{C_2} G \cdot dg_2 \\ = \ & -\textstyle\int_0^\pi \underbrace{\left(\sin t, \frac{\cos^2 t}{2}, \sin t\right)}_{G(g_1(t))} \cdot \underbrace{(-\sin t, \cos t, 0)}_{g_1'(t)} \, dt - \int_{-1}^1 \underbrace{\left(0, \frac{x^2}{2}, 0\right)}_{G(g_2(t))} \cdot \underbrace{(1, 0, 2x)}_{g_2'(t)} \, dt \\ = \ & -\textstyle\int_0^\pi \left(-\sin^2 t + \frac{\cos^3 t}{2}\right) dt - 0 \ = \ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left[\sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t\right]_0^\pi \ = \ \frac{\pi}{2} \ . \end{aligned}$$

$\square$

(4) Considere a forma diferencial

$$\omega = \frac{3y}{x^2+y^2}\,dx - \frac{3x}{x^2+y^2}\,dy + 4\,dz\ .$$

(a) Calcule $\int_{C^o}\omega$ onde C é a circunferência no plano xy de raio 1, centro na origem, com orientação o do sentido horário quando observada do ponto $(0,0,10)$, e diga se ω é ou não uma forma exacta no seu domínio.

(b) Calcule $\int_{E^o}\omega$ onde $E = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 4x^2+9y^2 = 36, z = 0\}$ com orientação o do sentido horário quando observada do ponto $(0,0,10)$.

Resolução:

(a) *A parametrização de* C *(excepto um ponto) dada por*

$$g :]0,2\pi[\longrightarrow C\ ,\qquad g(t) = (\cos t, \sin t, 0)$$

tem orientação positiva (ou seja, anti-horária) quando observada de $(0,0,10)$. *Então*

$$\int_{C^o}\omega = -\int_0^{2\pi}\underbrace{(3\sin t, -3\cos t, 4)}_{\omega\circ g}\cdot\underbrace{(-\sin t, \cos t, 0)}_{g'}\,dt = -\int_0^{2\pi}(-3)\,dt = 6\pi\ .$$

A forma ω *não é exacta, pois se fosse exacta o seu integral ao longo de qualquer curva fechada seria zero.*

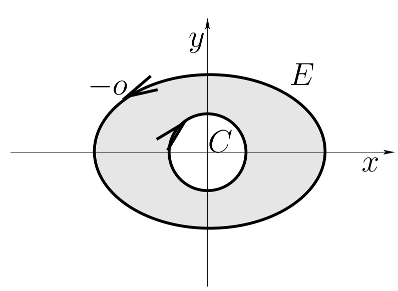
(b) *Como* E *e* C *são curvas fechadas que juntas formam a fronteira do domínio regular* $A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2 > 1, 4x^2+9y^2 < 36, z = 0\}$ *contido no domínio de* ω, *e como* ω *é uma forma fechada, pelo teorema de Stokes conclui-se que*

$$-\int_{E^o}\omega + \int_{C^o}\omega = \int_{(\partial A)^{o+}}\omega = \int_{A^{o+}} d\omega = 0\ .$$

Portanto, do cálculo da alínea (a) obtém-se

$$\int_{E^o}\omega = \int_{C^o}\omega = 6\pi\ .$$

□



Teorema de Stokes e casos particulares (Green, divergência e Stokes clássico)

$$\int_{(\partial A)^o} \omega = \int_{A^o} d\omega$$

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{C_i^{o+}} (M\,dx + N\,dy) = \int_A \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx\,dy$$

$$\int_{\partial A} F \cdot \nu \, dV_2 = \int_A \operatorname{div} F \, dV_3$$

$$\int_\gamma F = \int_A \operatorname{rot} F \cdot \nu \, dV_2$$